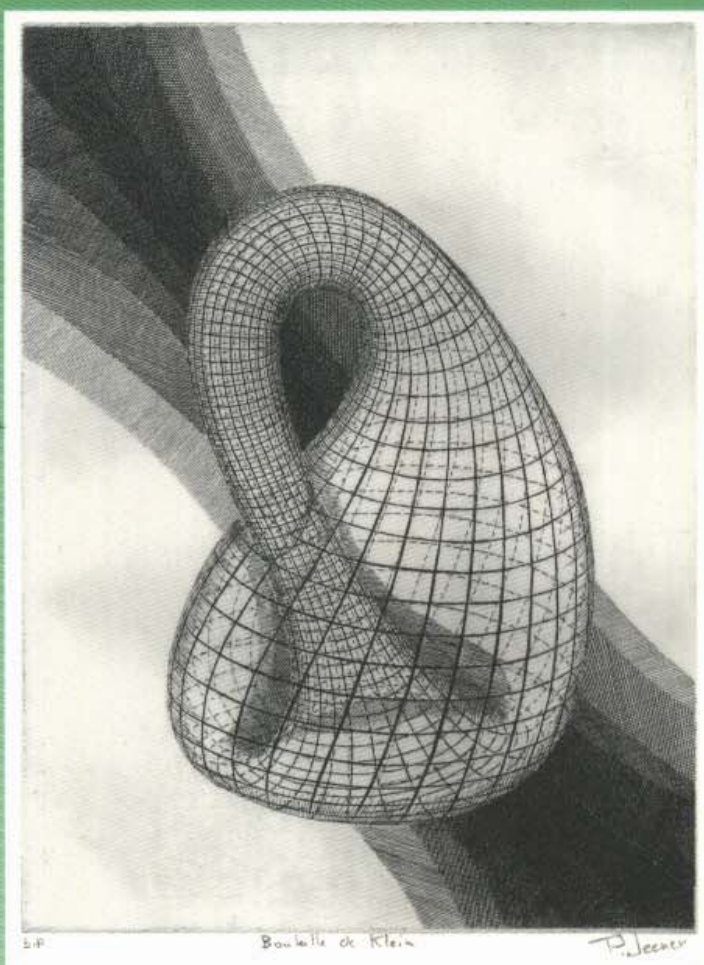


Jean-Pierre Bourguignon

Calcul variationnel



LES ÉDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Table des Matières

Table des Matières	xiii
Préface	ix
Bibliographie	v
Avertissement	iii

Première Partie : Le cadre analytique

Chapitre I. UNE PREMIÈRE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'ESPACE : LES ESPACES DE DIMENSION INFINIE	3
---	---

I.A. Première rencontre avec les espaces vectoriels de dimension infinie	4
I.B. Un cadre utile : les espaces normés	6
I.C. Les espaces compacts	14
I.D. A la recherche des compacts	19
I.E. Quelques points d'Histoire	23

Chapitre II. ESPACES DE BANACH ET ESPACES DE HILBERT	25
--	----

II.A. Suites de Cauchy et espaces métriques complets	26
II.B. Une catégorie fondamentale : les espaces de Banach	28
II.C. Espace dual et topologie faible	33
II.D. Formes bilinéaires et dualités	39
II.E. Les espaces de Hilbert : propriétés fondamentales	48
II.F. Bases hilbertiennes	53
II.G. Quelques points d'Histoire	60

Chapitre III. LINÉARISATION DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES ET INVERSION LOCALE	61
---	----

III.A. Applications différentiables et leurs applications linéaires tangentes	62
III.B. La règle de composition	73
III.C. Le théorème d'inversion locale	78
III.D. Les dérivées d'ordre supérieur	88
III.E. Quelques points d'Histoire	92

TABLE DES MATIÈRES

Deuxième Partie : Le cadre géométrique

Chapitre IV. QUELQUES APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL	97
IV.A. Des variantes géométriques du théorème d'inversion locale	98
IV.B. Champs de vecteurs et équations différentielles ordinaires	105
IV.C. Quelques exemples de champs de vecteurs	112
IV.D. Crochets de Poisson et quantités conservées	116
IV.E. Quelques points d'Histoire	120
Chapitre V. UNE NOUVELLE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'ESPACE : LES ESPACES DE CONFIGURATION	121
V.A. Coordonnées locales et espaces de configuration	122
V.B. Les applications différentiables en coordonnées locales	128
V.C. Les espaces vectoriels en coordonnées curvilignes	133
V.D. Les exemples fondamentaux	137
V.E. Le groupe des rotations	148
V.F. Quelques points d'Histoire	157
Chapitre VI. VECTEURS TANGENTS ET CHAMPS DE VECTEURS DANS LES ESPACES DE CONFIGURATION	159
VI.A. Vecteurs tangents à un espace de configuration	160
VI.B. Les espaces tangents à un espace de configuration	164
VI.C. Applications linéaires tangentes à une application différentiable	166
VI.D. Champs de vecteurs sur les espaces de configuration	170
VI.E. Équations différentielles dans les espaces de configuration	177
VI.F. Quelques points d'Histoire	182
Chapitre VII. POINTS RÉGULIERS ET POINTS CRITIQUES DES FONCTIONS NUMÉRIQUES	185
VII.A. Les différentielles de fonctions	186
VII.B. Sous-variétés et contraintes	188
VII.C. Points critiques et valeurs critiques des fonctions	197
VII.D. Hessiens et formes normales des points critiques génériques	202
VII.E. Quelques points d'Histoire	210

Troisième Partie : Le Calcul des Variations

Chapitre VIII. LES ESPACES DE CONFIGURATION D'OBJETS GÉOMÉTRIQUES	213
VIII.A. Les espaces de courbes	214
VIII.B. Les espaces de surfaces de l'espace numérique $\mathbb{R}^3$	218
VIII.C. Autour du groupe des difféomorphismes	223
VIII.D. Les éléments de volume	225
VIII.E. Quelques points d'Histoire (contemporaine)	230
Chapitre IX. LES ÉQUATIONS D'EULER-LAGRANGE	231
IX.A. L'extension en vitesses d'un espace de configuration	232
IX.B. L'action et sa Variation Première	237
IX.C. Les équations d'Euler-Lagrange	243
IX.D. La géométrie des géodésiques	252
IX.E. Les mouvements du solide	259
IX.F. Les surfaces d'aire stationnaire	262
IX.G. Quelques points d'Histoire	267
Chapitre X. LE POINT DE VUE HAMILTONIEN	269
X.A. L'extension en moments et sa structure symplectique	270
X.B. Les équations d'Hamilton générales	277
X.C. Relations avec l'approche lagrangienne	281
X.D. Crochets de Poisson des observables	286
X.E. Quelques points d'Histoire	288
Chapitre XI. SYMÉTRIES ET LOIS DE CONSERVATION	289
XI.A. Actions de groupe et symétries	290
XI.B. Intégrales premières et lois de conservation	294
XI.C. La notion de moment et le théorème d'Emmy Noether	295
XI.D. Observables en involution et systèmes intégrables	301
XI.E. Quelques points d'Histoire	303

TABLE DES MATIÈRES

Appendices

Appendice 1. RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE	307
Appendice 2. ÉLÉMENTS DE BASE DE LA TOPOLOGIE	311

Index

Index terminologique	315
Index des notations	327



Jean-Pierre
Bourguignon

Jean-Pierre Bourguignon, ancien élève de l'École Polytechnique et Docteur ès Sciences, a rejoint le Centre national de la recherche scientifique en 1969 avec pour affectation le Centre de mathématiques de l'École Polytechnique. Il a été détaché à l'École Polytechnique comme professeur de plein exercice de 1986 à 1993 et a dirigé le Centre de mathématiques de 1991 à 1994. Il a effectué plusieurs séjours de longue durée à l'étranger (State University of New York à Stony Brook, Université de Bonn, Institute for Advanced Study à Princeton, Stanford University, Osaka University, Ohio State University, Mathematical Sciences Research Institute à Berkeley). Depuis 1994 il est directeur de l'Institut des hautes études scientifiques à Bures-sur-Yvette. Jean-Pierre Bourguignon est mathématicien, avec comme domaine de prédilection la géométrie différentielle, notamment dans ses relations avec les équations aux dérivées partielles et la physique mathématique. Il s'est tout particulièrement intéressé à la courbure de Ricci, tant dans ses aspects mathématiques que dans le rôle qu'elle joue en relativité générale.

Ce cours a comme ambition de présenter les concepts de base permettant de discuter quelques problèmes classiques du calcul des variations. Tout en donnant des méthodes de portée générale, il est centré autour de la recherche des extremums d'une fonction définie sur un espace. Pour faire cela, il convient de généraliser la notion d'espace dans deux directions : d'abord, pour traiter commodément des objets qui sont « variés » (le plus souvent des fonctions), il faut disposer d'espaces qui possèdent naturellement une infinité de dimensions (c'est là une amorce de l'étude de l'analyse fonctionnelle qui s'est révélée si féconde dans la résolution des équations aux dérivées partielles) ; ensuite, pour trouver les extremums de la fonction étudiée, il faut pouvoir continuer à disposer d'une notion de dérivée dans des espaces courbes comme le sont la plupart des espaces de configuration intervenant dans des situations concrètes, par exemple en mécanique. C'est là une première rencontre avec la géométrie différentielle intrinsèque ; cette partie se cache souvent sous le nom de calcul différentiel. Pour ce faire nous avons délibérément utilisé le langage géométrique parce qu'il nous semble le mieux adapté et le plus efficace pour traiter les problèmes que nous avons en vue, d'où le titre de « Calcul variationnel » donné à ce cours.

Ces notes de cours en onze chapitres se décomposent naturellement en trois parties qu'il est bon d'aborder avec des états d'esprit assez différents. La première, intitulée « Le cadre analytique », regroupe les chapitres I, II et III. Elle se propose d'amplifier et de fortifier les connaissances antérieures des étudiants sur les fondements de l'analyse. La deuxième, intitulée « Le cadre géométrique », couvre les chapitres IV, V, VI et VII et introduit une démarche et des concepts plus nouveaux. Elle suppose la pratique de nombreux exercices (dont certains proposés dans ces notes de cours) pour se persuader que parler « en prose » tout en le sachant n'est finalement pas chose si difficile. La troisième enfin, intitulée « Le calcul des variations », englobe les chapitres VIII, IX, X et XI, (et est le véritable aboutissement du cours). Elle ouvre sur un champ très large d'applications, et c'est cette variété qui fait la force des théorèmes présentés.

Illustration de couverture :

© « Bouteille de Klein » Patrice Jeener.