

Jean-Marie Monier

Cours – Tome 4

ANALYSE 4

Cours et
500 exercices corrigés

2^e année
MP • PSI • PC • PT

l'intégrale

PRÉPAS SCIENTIFIQUES

DUNOD

Table des matières du tome 4

Première partie – Cours

Chapitre 4. – Suites et séries d'applications	3
4.1. Suites d'applications	3
4.1.1. Convergences	3
4.1.2. Convergence uniforme et limite	9
4.1.3. Convergence uniforme et continuité	10
4.1.4. Convergence uniforme et intégration sur un segment	13
4.1.5. Convergence uniforme et dérivation	16
4.1.6. Convergence d'une suite d'applications et intégration sur un intervalle quelconque	18
4.2. Approximation des fonctions d'une variable réelle	28
4.2.1. Approximation par des fonctions en escalier ou affines par morceaux et continues	28
4.2.2. Approximation par des polynômes	29
4.2.3. Approximation par des polynômes trigonométriques	38
4.3. Séries d'applications	42
4.3.1. Convergences	42
4.3.2. Convergence uniforme et limite	54
4.3.3. Convergence uniforme et continuité	54
4.3.4. Convergence uniforme et intégration sur un segment	58
4.3.5. Convergence uniforme et dérivation	61
4.3.6. Convergence d'une série d'applications et intégration sur un intervalle quelconque	66
Compléments	70
Chapitre 5. – Séries entières	81
5.1. Rayon de convergence	81
5.1.1. Notion de série entière	81
5.1.2. Rayon de convergence et somme d'une série entière	82
5.1.3. Comparaisons de rayons	85
5.1.4. Règle de d'Alembert	86
5.2. Opérations sur les séries entières	92
5.2.1. Structure vectorielle	92

5.2.2.	Dérivation	94
5.2.3.	Produit de deux séries entières	96
5.3.	Convergence	98
5.4.	Régularité de la somme d'une série entière	99
5.5.	Développements en série entière	101
5.5.1.	Généralités	101
5.5.2.	Opérations sur les fonctions développables en série entière	105
5.5.3.	DSE(0) usuels	108
5.6.	Fonctions usuelles d'une variable complexe	118
5.6.1.	L'exponentielle complexe	118
5.6.2.	Fonctions circulaires directes	120
5.6.3.	Fonctions hyperboliques directes	122
	Compléments	124
Chapitre 6. – Séries de Fourier		129
6.1.	Généralités	129
6.1.1.	Ensemble $\mathcal{CM}_T$	129
6.1.2.	Coefficients de Fourier d'un élément de $\mathcal{CM}_T$	131
6.1.3.	Série de Fourier d'un élément de $\mathcal{CM}_T$	135
6.2.	Structure préhilbertienne	136
6.2.1.	Espace préhilbertien $\mathcal{D}_T$	136
6.2.2.	Famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$	138
6.2.3.	Le théorème de Parseval	139
6.3.	Convergence ponctuelle	143
6.3.1.	Convergence normale	143
6.3.2.	Le théorème de Dirichlet	144
6.4.	Exemples	147
	Complément	153
Chapitre 7 – Équations différentielles (2 ^{ème} étude)		155
7.1.	Généralités	155
7.1.1.	Définitions	155
7.1.2.	Remplacement théorique d'une équation différentielle d'ordre n par une équation différentielle d'ordre 1	157
7.1.3.	Équations différentielles autonomes	158
7.2.	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	160
7.2.1.	Théorie	160
7.2.2.	Exemples d'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz	170
7.3.	Systèmes différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre	182

7.3.1	Généralités	182
7.3.2.	Existence et unicité d'une solution du problème de Cauchy sur tout l'intervalle I	184
7.3.3.	Structures de $\mathcal{S}_0$ et de $\mathcal{S}$	187
7.3.4.	Résolution de (E_0)	188
7.3.5.	Résolution de (E)	189
7.3.6.	Systèmes différentiels linéaires du 1 ^{er} ordre à coefficients constants	192
7.3.7.	Systèmes différentiels autonomes linéaires	200
7.4.	Equations différentielles linéaires scalaires du second ordre	204
7.4.1.	Généralités	204
7.4.2.	Résolution de (E_0)	205
7.4.3.	Résolution de (E)	207
7.4.4.	Problème des raccords	209
7.4.5.	Utilisation de séries entières	211
Chapitre 8 – Fonctions de plusieurs variables réelles (2^{ème} étude)		217
8.1.	Dérivées partielles premières	219
8.1.1.	Définitions	219
8.1.2.	Applications de classe C^1 sur un ouvert	220
8.1.3.	Différentielle d'une application de classe C^1	222
8.1.4.	Différentiabilité	228
8.1.5.	Inégalité des accroissements finis	232
8.1.6.	C^1 -difféomorphismes	235
8.1.7.	Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre	241
8.2.	Dérivées partielles successives	246
8.2.1.	Définition	246
8.2.2.	Applications de classe C^k sur un ouvert	246
8.2.3.	Intervention des dérivations	247
8.2.4.	C^k -difféomorphismes	250
8.2.5.	Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre ≥ 2	251
8.3.	Extremums des fonctions numériques de plusieurs variables réelles	254
8.3.1.	Définitions	254
8.3.2.	Etude à l'ordre 1	254
8.3.3.	Etude à l'ordre 2	255
8.3.4.	Extremums globaux	261
8.4.	Fonctions implicites	263

8.5. Formes différentielles	266
8.5.1. Définition	266
8.5.2. Formes différentielles exactes	266
8.5.3. Formes différentielles fermées	267
Complément	270
Chapitre 9 – Compléments de calcul intégral (2^{ème} étude)	271
9.1. Intégrales de surface	271
9.1.1. Applications de classe C^1	271
9.1.2. Surfaces	272
9.1.3. Intégrales de surface	274
9.2. Aire d'un morceau de surface	276
9.2.1. Généralités	276
9.2.2. Cas particuliers	277
9.3. Flux	281
9.3.1. Généralités	281
9.3.2. Angle solide	283
9.3.3. Théorèmes de Stokes et Ostrogradski	285
9.4. Masse, centre d'inertie, moments d'inertie pour une plaque gauche	290
9.4.1. Plaques gauches	290
9.4.2. Masse d'une plaque gauche	290
9.4.3. Centre d'inertie d'une plaque gauche	291
9.4.4. Moments d'inertie d'une plaque gauche	296

Deuxième partie

Indications et réponses des exercices

Chap. 4, 301; Chap. 5, 403; Chap. 6, 451; Chap. 7, 471; Chap. 8, 501;
Chap. 9, 537.

Index des notations	545
Index alphabétique	547

Table des matières du tome 3

Première partie – Cours

Chapitre 1. – Espaces vectoriels normés	3
1.1. Vocabulaire de la topologie d'un espace vectoriel normé	3
1.2. Limites, continuité	37
1.3. Compacité	57
1.4. Complétude	68
1.5. Connexité par arcs	76
1.6. Espaces préhilbertiens	86
Chapitre 2. – Fonctions vectorielles d'une variable réelle	111
2.1. Généralités	111
2.2. Dérivation	123
2.3. Intégration sur un segment	138
2.4. Comparaison locale	176
2.5. Intégration sur un intervalle quelconque	181
Chapitre 3. – Séries	231
3.1. Séries à termes dans un evn	231
3.2. Séries à termes dans $\mathbb{R}_+$	238
3.3. Séries à termes dans un evn	254
3.4. Familles sommables	289

III Analyse

Deuxième partie **Indications et réponses des exercices**

Chap. 1, 313; Chap. 2, 357; Chap. 3, 435.

Index des notations 495

Index alphabétique 497

COLLECTION J'INTÈGRE
Série Monier

Jean-Marie Monier



J'intègre

2^e année
MP
PSI
PC
PT

ANALYSE 4 - TOME 4

Cours et 500 exercices corrigés

COURS

L'objectif de ce cours de mathématiques est de devenir l'outil de travail familier, efficace et adapté des élèves des classes préparatoires, des étudiants du 1^{er} cycle universitaire scientifique et des candidats aux concours externes et internes de recrutement de professeurs.

Le tome 3 contient l'étude des **espaces vectoriels normés**, les **fonctions vectorielles d'une variable réelle** ainsi que les **séries** ce qui correspond à la première partie de l'analyse en 2^e année.

Le tome 4 contient l'étude des **suites et séries d'applications**, **séries entières**, **séries de Fourier**, **équations différentielles**, **fonctions de plusieurs variables** et **compléments de calcul intégral**, ce qui correspond à la deuxième partie de l'analyse en 2^e année.

JEAN-MARIE MONIER
est professeur
en classe de Spéciales
au lycée La Martinière-
Monplaisir à Lyon.

COURS		EXERCICES CORRIGÉS		
	ANALYSE	ALGÈBRE	ANALYSE	ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE
SUP	MPSI • PCSI • PTSI		MPSI	
	T1 Analyse 1	T5 Algèbre 1	Analyse MPSI	Algèbre et géométrie MPSI
	T2 Analyse 2	T7 Géométrie 1 ^{re} et 2 ^e années	PCSI • PTSI	
SPÉ	MP • PSI • PC • PT		MP	
	T3 Analyse 3	T6 Algèbre 2	Analyse MP	Algèbre et géométrie MP
	T4 Analyse 4	T7 Géométrie	PSI • PC • PT	
			Analyse PSI • PC • PT	Algèbre et géométrie PSI • PC • PT



ISBN 2 10 003466 9
Code 043466

