

Jean Saint Raymond

Topologie
calcul différentiel
et variable complexe



Calvage & Mounet

Table des matières

I. Les nombres réels et les nombres complexes

1. Densité des rationnels	1
2. Racine carrée	3
3. Nombres complexes	4

II. Topologie des espaces métrisables

1. Distances	7
2. Ouverts	8
3. Espaces topologiques	10
4. Intérieur et adhérence	12
5. Sous-espaces et produits	13
6. Suites convergentes	16
7. Applications continues	19
8. Homéomorphismes	26
9. Continuité uniforme	28
10. Espaces métriques séparables	28
11. Exercices	30

III. Espaces compacts

1. La propriété de Borel-Lebesgue	33
2. Espaces métriques compacts	37
3. Produit de compacts métrisables	40
4. Parties compactes de la droite réelle	41
5. Fonctions continues sur un compact	42
6. Espaces localement compacts	45
7. Exercices	47

IV. Espaces complets

1. Suites de Cauchy	53
2. Complétude	55
3. Compacité et complétude	57
4. Prolongement d'une application uniformément continue	58
5. Points fixes des contractions	59
6. Le théorème de Baire	60
7. Exercices	63

V. Espaces connexes

1. Connexité	69
2. Compacts connexes	71
3. Espaces localement connexes	74
4. Exercices	76

VI. Espaces de fonctions continues

1. Ensembles compacts de fonctions continues	81
2. Ensembles denses de fonctions continues	84
3. Exercices	88

VII. Espaces normés

1. Normes	93
2. Espaces normés de dimension finie	96
3. Exemples d'espaces normés	99
4. Applications linéaires continues	101
5. Quotient par un sous-espace fermé	105
6. Applications bilinéaires continues	110
7. Perturbations lipschitziennes de l'identité	112
8. Le théorème de Hahn-Banach	113
9. Le théorème de Banach-Steinhaus	117
10. Exercices	118

VIII. Espaces de Hilbert

1. Produit scalaire	131
2. Projection orthogonale	135
3. Adjoint d'un opérateur	140
4. Compacité faible	141
5. Exercices	145

IX. Fonctions dérivables

1. Fonctions réelles dérivables	153
2. Opérations sur les fonctions dérivables	154
3. Extremums	156
4. Le théorème des accroissements finis	157
5. Fonctions dérivables à valeurs dans un espace de Banach	158
6. Inégalité des accroissements finis	161
7. Primitives	163
8. La formule de Taylor	166
9. Exercices	168

X. Fonctions différentiables

1. Notations de Landau.	171
2. Différentiabilité	173
3. Opérations sur les fonctions différentiables	176
4. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	178
5. Le théorème des accroissements finis	179
6. Limites de fonctions différentiables	183
7. Fonctions à valeurs dans un espace de dimension finie	186
8. Fonctions différentiables sur un produit	187
9. Applications bilinéaires continues	190
10. Inversion	190
11. Fonctions définies sur un espace de dimension finie	191
12. Matrice jacobienne	193
13. Exercices	195

XI. Différentielles du second ordre

1. Différentielle seconde	199
2. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$	200
3. Dérivées partielles secondes	201
4. Le théorème de symétrie de Schwarz	203
5. Formule de Taylor	206
6. Fonctions convexes	208
7. Exercices	211

XII. Fonctions implicites et inversion locale

1. Difféomorphismes	215
2. Second ordre	218
3. Fonctions implicites	219
4. Exercices	222

XIII. Théorèmes du rang constant

1. Rang de la différentielle	227
2. Cas du rang maximum	228
3. Le cas général	231
4. Exercices	236

XIV. Optimisation

1. Extremums sur un ouvert	239
2. Extremums liés	242
3. Conditions du second ordre	245
4. Calcul des variations	252
5. Exercices	256

XV. Fonctions holomorphes

1. Formes différentielles	261
2. Intégrales curvilignes	262
3. Formes différentielles fermées	265
4. Ouverts simplement connexes	269
5. Séries entières	270
6. Fonctions holomorphes	274
7. Exponentielle	276
8. Indice d'un lacet	278
9. Holomorphie et analyticité	279
10. Inégalités de Cauchy	283
11. Limites de fonctions holomorphes	284
12. Logarithme d'une fonction	286
13. Exercices	287

XVI. Le théorème des résidus

1. Singularités isolées	293
2. Fonctions méromorphes	296
3. Le théorème des résidus	298
4. Calculs d'intégrales	300
5. Dérivée logarithmique	304
6. La formule de Jensen	307
7. Exercices	309

XVII. Convergence des fonctions holomorphes

1. Topologie de la convergence compacte	319
2. Le théorème de Montel	322
3. Séries de fonctions méromorphes	323
4. Produits infinis de fonctions holomorphes	325
5. Exercices	330

III. Le principe du maximum

1. Principe du maximum dans un ouvert borné	335
2. Le lemme de Schwarz	335
3. La méthode de Phragmen-Lindelöf	337
4. Exercices	338

IV. Représentation conforme

1. Équivalence conforme	341
2. Représentation conforme des ouverts simplement connexes . . .	343
3. Exemples de représentations conformes	345
4. Exercices	347

A. Ensembles dénombrables

1. L'ensemble des entiers	349
2. Dénombrabilité	350

B. Le théorème de l'application ouverte

1. Le théorème de l'application ouverte	353
2. Le théorème du graphe fermé	355

C. Connexité dans la sphère de Riemann

1. Compacts connexes de S^2	357
---	-----

D. Théorèmes de point fixe

1. Points fixes et rétractions	361
2. Champs de vecteurs sur les sphères	363
3. Le théorème de Brouwer	366
4. Le théorème de Schauder	367

E. Quelques problèmes

1. Polygones d'aire maximale	373
2. Densité des fractions rationnelles	375
3. Familles sommables de fonctions holomorphes	377
4. Racine carrée d'un opérateur hermitien positif	379
5. Interpolation complexe (Riesz-Thorin)	380
6. Racine carrée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$	383
7. Valeurs propres d'un opérateur compact	385
8. Un difféomorphisme de ℓ^2 sur lui-même privé d'un point	387
9. Une classe de normes $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$	389

F. Indications de solutions

Exercices du chapitre II	391
Exercices du chapitre III	392
Exercices du chapitre IV	394
Exercices du chapitre V	396
Exercices du chapitre VI	398
Exercices du chapitre VII	399
Exercices du chapitre VIII	400
Exercices du chapitre IX	403
Exercices du chapitre X	406
Exercices du chapitre XI	409
Exercices du chapitre XII	411
Exercices du chapitre XIII	414
Exercices du chapitre XIV	414
Exercices du chapitre XV	418
Exercices du chapitre XVI	423
Exercices du chapitre XVII	426
Exercices du chapitre XVIII	429
Exercices du chapitre XIX	431

Bibliographie	433
----------------------	------------

Notations	437
------------------	------------

Index	439
--------------	------------

Écrit par un des professeurs les plus appréciés du campus parisien de Jussieu, ce cours de licence –L3– vient à point pour répondre aux besoins des étudiants et de leurs professeurs en analyse fondamentale. On y trouve un traitement complet des fondements et des premiers développements sérieux de la topologie (théorèmes de Baire et de Hahn-Banach), une introduction au calcul différentiel et à l'optimisation, et une initiation solide à l'analyse complexe à une variable (incluant, bien sûr, le théorème des résidus, mais également des développements pertinents sur les séries et produits infinis de fonctions holomorphes, et sur la représentation conforme). Souvent traités dans des manuels séparés, tous ces chapitres sont ici réunis par Jean Saint Raymond, qui leur imprime sa marque et en fait ressortir la profonde unité. Il offre ainsi un instrument unique et puissant aux étudiants de licence, certes, mais aussi aux futurs candidats à l'agrégation ou aux apprentis chercheurs en analyse. Tous trouveront matière à aller au delà des limites habituelles du programme, grâce à deux chapitres plus spécialisés et à trois appendices. L'ouvrage est agrémenté d'une collection très originale d'exercices et de problèmes d'examen, accompagnés, pour la plupart, de solutions rédigées par l'auteur lui-même.

"L'ouvrage de Jean Saint Raymond aura à l'évidence un réel impact sur plusieurs générations d'étudiants."

Hervé Queffelec

Collection.— Mathématiques en devenir

Calvage & Mounet

<http://www.calvage-et-mounet.fr>



Prix : 39 €