
**RECUEIL
D'EXERCICES
ET
DE PROBLÈMES
D'ANALYSE
MATHÉMATIQUE**

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	9
Chapitre premier. INTRODUCTION À L'ANALYSE	11
§ 1. Notion de fonction	11
§ 2. Graphiques des fonctions élémentaires	17
§ 3. Limites	24
§ 4. Infiniment petits et infiniment grands	37
§ 5. Continuité des fonctions	41
Chapitre II. DÉRIVATION DES FONCTIONS	47
§ 1. Calcul des dérivées	47
§ 2. Tableau des principales formules de dérivation et leurs applications	52
§ 3. Dérivées des fonctions qui ne sont pas données explicitement	62
§ 4. Applications géométriques et mécaniques de la dérivée	66
§ 5. Dérivées d'ordres supérieurs au premier	74
§ 6. Différentielles du premier ordre et d'ordres supérieurs	78
§ 7. Théorèmes de la moyenne	83
§ 8. Formule de Taylor	85
§ 9. Règle de Lhopital-Bernoulli pour lever les indéterminations	87
Chapitre III. EXTRÊMUMS DES FONCTIONS ET APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA DÉRIVÉE	92
§ 1. Extrémums d'une fonction d'une variable	92
§ 2. Concavité. Points d'inflexion	101
§ 3. Asymptotes	103
§ 4. Construction des graphiques des fonctions d'après leurs points caractéristiques	106
§ 5. Différentielle d'un arc de courbe. Courbure	113
Chapitre IV. INTÉGRALE INDÉFINIE	119
§ 1. Intégration directe	119
§ 2. Méthode de substitution	126
§ 3. Intégration par parties	130

§ 4.	Intégrales simples contenant un trinôme du second degré	132
§ 5.	Intégration des fonctions rationnelles	135
§ 6.	Intégration de certaines fonctions irrationnelles	140
§ 7.	Intégration des fonctions trigonométriques	143
§ 8.	Intégration des fonctions hyperboliques	149
§ 9.	Application des substitutions trigonométriques et hyperboliques pour calculer les intégrales du type $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, où R est une fonction rationnelle	150
§ 10.	Intégration de différentes fonctions transcendentes.	151
§ 11.	Application des « formules de récurrence »	152
§ 12.	Exemples mixtes d'intégration	152
Chapitre V. INTÉGRALE DÉFINIE		155
§ 1.	Intégrale définie en tant que limite de sommes	155
§ 2.	Calcul des intégrales définies à l'aide des intégrales indéfinies	158
§ 3.	Intégrales impropres	160
§ 4.	Changement de variable dans une intégrale définie	165
§ 5.	Intégration par parties	168
§ 6.	Théorème de la moyenne	169
§ 7.	Aires des figures planes	172
§ 8.	Longueur d'un arc de courbe.	178
§ 9.	Volumes des corps	181
§ 10.	Aire d'une surface de révolution	186
§ 11.	Moments. Centre de gravité. Théorèmes de Guldin	189
§ 12.	Application des intégrales définies à la résolution de problèmes de physique	194
Chapitre VI. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES		202
§ 1.	Notions fondamentales	202
§ 2.	Continuité	206
§ 3.	Dérivées partielles	208
§ 4.	Différentielle totale d'une fonction	211
§ 5.	Dérivation des fonctions composées	214
§ 6.	Dérivée dans une direction donnée et gradient d'une fonction	218
§ 7.	Dérivées et différentielles d'ordres supérieurs	222
§ 8.	Intégration des différentielles totales	228
§ 9.	Dérivation des fonctions implicites	231
§ 10.	Changement des variables	238
§ 11.	Plan tangent et normale à une surface	244
§ 12.	Formule de Taylor pour une fonction de plusieurs variables	248
§ 13.	Extrémums des fonctions de plusieurs variables	250
§ 14.	Problèmes sur la détermination des plus petites et plus grandes valeurs des fonctions	256
§ 15.	Points singuliers des courbes planes	259
§ 16.	Enveloppes'	262
§ 17.	Longueur d'un arc de courbe gauche	263
§ 18.	Fonction vectorielle d'une variable scalaire	264
§ 19.	Trièdre naturel attaché à une courbe gauche	268
§ 20.	Courbure et torsion d'une courbe gauche	273

Chapitre VII. INTÉGRALES MULTIPLES ET INTÉGRALES CURVILIGNES 277

§ 1. Intégrale double en coordonnées rectangulaires	277
§ 2. Changement de variables dans une intégrale double	284
§ 3. Calcul des aires	288
§ 4. Calcul des volumes	290
§ 5. Calcul des aires des surfaces	292
§ 6. Applications mécaniques de l'intégrale double	292
§ 7. Intégrales triples	295
§ 8. Intégrales impropres dépendant d'un paramètre. Intégrales multiples impropres	303
§ 9. Intégrales curvilignes	307
§ 10. Intégrales de surface	319
§ 11. Formule d'Ostrogradski-Gauss	323
§ 12. Eléments de la théorie du champ	324

Chapitre VIII. SÉRIES 331

§ 1. Séries numériques	331
§ 2. Séries de fonctions	344
§ 3. Série de Taylor	352
§ 4. Séries de Fourier	360

Chapitre IX. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 366

§ 1. Solutions. Equations différentielles de famille de courbes. Conditions initiales	366
§ 2. Equations différentielles du premier ordre	369
§ 3. Equations différentielles du premier ordre à variables séparables. Trajectoires orthogonales	371
§ 4. Equations différentielles homogènes du premier ordre	375
§ 5. Equations linéaires du premier ordre. Equations de Bernoulli	377
§ 6. Equations aux différentielles totales. Facteur intégrant	380
§ 7. Equations différentielles du premier ordre non résolubles par rapport à la dérivée	383
§ 8. Equations de Lagrange et de Clairaut	385
§ 9. Exercices mixtes sur les équations différentielles du premier ordre	387
§ 10. Equations différentielles d'ordres supérieurs	393
§ 11. Equations différentielles linéaires	397
§ 12. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	399
§ 13. Equations différentielles linéaires d'ordres supérieurs au second à coefficients constants	405
§ 14. Equations d'Euler	406
§ 15. Systèmes d'équations différentielles	408
§ 16. Intégration des équations différentielles à l'aide de séries entières	411
§ 17. Problèmes sur la méthode de Fourier	413

Chapitre X. CALCUL NUMÉRIQUE 417

§ 1. Opérations sur des nombres approchés 417

§ 2. Interpolations des fonctions 423

§ 3. Calcul des racines réelles des équations 427

§ 4. Intégration numérique 434

§ 5. Intégration numérique des équations différentielles 437

§ 6. Calcul approché des coefficients de Fourier 448

RÉPONSES 450

Chapitre I premier 450

Chapitre II 456

Chapitre III 465

Chapitre IV 474

Chapitre V 488

Chapitre VI 497

Chapitre VII 509

Chapitre VIII 521

Chapitre IX 531

Chapitre X 543

APPENDICES 546

I. Alphabet grec 546

II. Quelques constantes remarquables 546

III. Grandeurs inverses, puissances, racines, logarithmes 547

IV. Fonctions trigonométriques 549

V. Fonctions exponentielles, hyperboliques et trigonométriques 550

VI. Quelques courbes remarquables 551

COURS DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

(en 5 volumes) par V. SMIRNOV

Tome IV, 2^e partie

La 2^e partie du tome IV du «Cours de mathématiques supérieures» de Vladimir Smirnov, membre de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., prix d'Etat, inclut les chapitres suivants: «Théorie générale des équations aux dérivées partielles» et «Problèmes aux limites». Dans le premier chapitre sont étudiées les équations du premier ordre et d'ordre supérieur, ainsi que les systèmes d'équations différentielles. Le deuxième chapitre est consacré aux problèmes aux limites pour trois types classiques d'équations (elliptiques, paraboliques et hyperboliques) à coefficients variables dans des domaines arbitraires. Pour cela, l'auteur fait appel à la théorie de la dérivation distributionnelle et à une série de théorèmes d'immersion. Il examine, par ailleurs, des solutions distributionnelles des problèmes aux limites avec application de certains théorèmes de l'analyse fonctionnelle et de nouvelles méthodes de recherche. Le matériel présenté, qui tient compte des développements récents des mathématiques, déborde largement les cours classiques de mathématiques supérieures. Destiné aux étudiants des facultés de mathématiques et de physique des universités et des établissements d'enseignement technique supérieur aux programmes de mathématiques élargis. Ce livre a soutenu 6 éditions en russe et a été traduit en plusieurs langues.