

RECHERCHES EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Sous la direction de P.G. CIARLET et J.-L. LIONS

20358

BIFURCATIONS ET MÉTHODES NUMÉRIQUES

APPLICATIONS AUX
PROBLÈMES ELLIPTIQUES
SEMI-LINÉAIRES

Jean-Claude Paumier

MASSON



Table des matières

Avant-propos	1
1 Préliminaires	5
1.1 Théorème de Banach, alternative de Fredholm	5
1.2 Lemme de Morse, formules de Taylor	10
1.3 Le théorème des fonctions implicites	13
1.4 Espaces fonctionnels, espaces de Sobolev	19
1.5 Opérateurs de superposition	25
1.6 Solutions des problèmes aux limites linéaires	32
1.6.1 Les différentes formulations des problèmes	32
1.6.2 Régularité des solutions faibles	34
1.7 Estimations dans les méthodes d'éléments finis	36
1.7.1 Estimations de base	40
1.7.2 Estimations dans d'autres normes	41
1.7.3 Méthodes avec intégration numérique	43
1.8 Notes bibliographiques	47
2 Exemples et rudiments	49
2.1 Généralités	49
2.2 Exemple d'un système de barres articulées	50
2.3 Notions de bifurcation	54
2.4 Exemples à plusieurs degrés de liberté	55
2.4.1 Système algébrique	55
2.4.2 Flambage d'une barre élastique	56
2.4.3 Brisure de symétrie et stabilité	58
2.5 Autres exemples	59
2.5.1 Combustion des gaz	59
2.5.2 Flambage des plaques élastiques	61
2.5.3 Structures dissipatives en morphogenèse	63
2.5.4 Écoulements des fluides	64
3 Étude locale des problèmes non linéaires dépendant d'un paramètre	67
3.1 Analyse d'un problème modèle	67
3.2 Le cadre fonctionnel standard	70
3.3 Condition nécessaire d'existence de bifurcations	72
3.4 La méthode de Liapounov-Schmidt	74

3.5	Points singuliers simples	77
3.5.1	Points limites simples	77
3.5.2	Points de bifurcation simples	80
3.6	Bifurcation à partir de la branche triviale	84
3.7	Différents types de branches	87
3.8	Notes bibliographiques	90
4	Approximation des branches de solutions	93
4.1	Exemples d'approximations	93
4.2	Résultats préliminaires sur l'approximation	96
4.3	Application à la méthode de Galerkin	102
4.4	Hypothèses dans le cadre fonctionnel standard	106
4.5	Approximation des branches régulières	108
4.6	Approximation des points de retournement	115
4.7	Cas d'une branche bifurquant de la branche triviale	120
4.8	Méthode de Liapounov-Schmidt et approximation	131
4.9	Approximation des branches d'une bifurcation simple	137
4.9.1	Existence locale des solutions approchées	139
4.9.2	Présentation des résultats de convergence	141
4.9.3	Convergences et majorations préliminaires	144
4.9.4	Convergences et majorations finales	155
4.9.5	Exemple d'application	163
4.10	Notes bibliographiques	168
5	Calcul numérique des branches	171
5.1	Introduction	171
5.2	La méthode d'Euler-Newton	173
5.3	Les méthodes de cheminement de Keller	177
5.4	Cheminement par l'abscisse curviligne	180
5.4.1	Méthode de Kubiček	182
5.4.2	Méthode d'Allgower et Georg	183
5.5	Commentaires sur le calcul des branches	184
5.5.1	Contrôle du pas	184
5.5.2	Détection des points de bifurcation	186
5.5.3	Changement de branche	187
5.5.4	Calcul de points singuliers	189
5.6	Compléments bibliographiques	189
6	Exercices	191
7	Indications pour les exercices	215
	Références bibliographiques	233
	Index	241
	Principales notations	244

L'objectif principal de cet ouvrage est de développer une méthode originale d'analyse numérique concernant des problèmes de bifurcations semi-linéaires elliptiques. Il est destiné aux étudiants de troisième cycle de mathématiques appliquées, ainsi qu'aux chercheurs et aux ingénieurs.

Après une introduction des outils mathématiques de base, le phénomène de bifurcation est appréhendé à l'aide d'exemples (flambages des barres et des plaques élastiques, combustion des gaz, réactions et diffusions en morphogenèse et écoulement des fluides). À partir d'une étude locale des problèmes non linéaires dépendant d'un paramètre, l'auteur explique l'existence et l'unicité de branches de solutions (méthode de Liapounov-Schmidt, lemme de Morse). L'analyse de leur approximation en dimension finie est réalisée à l'aide du théorème des fonctions implicites utilisant le pas de discrétisation comme petit paramètre. L'auteur obtient ainsi les résultats d'existence, d'unicité locale et de convergence des branches approchées ainsi que des estimations d'erreurs dans différentes normes. Enfin, les principales méthodes de cheminement sont proposées pour réaliser le calcul effectif des branches de solutions approchées (méthodes d'Euler-Newton, de Keller, de Kubiček, d'Allgower et Georg).

La qualité pédagogique de cet ouvrage repose sur un large choix de rappels et d'exercices corrigés facilitant l'accès aux arguments mathématiques.

Jean-Claude Paumier est professeur à l'université Joseph Fourier (Grenoble I).