

COLLECTION
LE COURS
DE MATHÉMATIQUE

I.N.E.S. de Mécanique BATNA

MANSOURI Abdelhamid

ANALYSE (Module 310)

Cours et Exercices résolus



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES
1, Place centrale de Ben-Aknoun (Alger)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

$$\cos x,$$

$$+$$

$$\Delta y_i,$$

$$<$$

$$\sin x$$

$$\Phi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$=$$

$$y'$$

$$x$$

$$0$$

$$(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

$$\cos x,$$

$$+$$

$$\Delta y_i,$$

$$<$$

$$\sin x$$

$$\Phi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

TABLE DES MATIERES

Chapitre I. Analyse Vectorielle

Champ Scalaire

I. Définition	1
II. Lignes isosclaires	1
III. Liaison entre champ scalaire et fonction de plusieurs variables.	1

Champ de Vecteurs

I. Définition	3
II. Lignes de champ	3
III. Liaison entre champ de vecteurs et fonction vectorielle	4

Intégrale Curviligne - Intégrale de Surface

Circulation et Flux.

I. Intégrale Curviligne	5
II. Circulation scalaire d'un vecteur le long d'un arc orienté.	6

III. Intégrale de surface	7
IV. Flux d'un vecteur à travers une surface	8

Fonction de points pour un champ scalaire et un champ de vecteurs

I. Gradient d'un scalaire en un point	9
II. Divergence d'un vecteur en un point	14
III. Rotationnel d'un vecteur en un point	19

Exercices corrigés	20
--------------------	----

Chapitre II. Séries

I. Séries numériques	30
----------------------	----

1/ Convergence d'une série numérique	30
--------------------------------------	----

2/ Critères essentiels de convergence et de divergence des séries à termes positifs.	32
--	----

3/ Séries alternées : Théorème de Leibniz.	35
--	----

.4/ Séries à termes de signes quelconques, convergence absolue et semi-convergence.	36
.5/ Séries à termes complexes	37
.6/ Opérations algébriques sur les séries.	38
II. Séries de fonctions	39
.1/ Définitions	39
.2/ Propriétés des séries de fonctions	39
.2.1/ Convergence simple	40
.2.2/ Convergence uniforme	40
.2.3/ Critères de convergence	41
.2.4/ Séries majorantes	42
.2.5/ Critère de convergence normale	42
.2.6/ Propriétés générales	43
Exercices corrigés	44

Chapitre III . Les Intégrales Multiples	55
.I. Intégrales doubles	55
.1/ Somme Intégrale et Intégrale double	56
.2/ Propriétés de l'intégrale double	56
.3/ Calcul des Intégrales doubles en coordonnées cartésiennes	56
.II. Changement de variables dans l'intégrale double	59
.1/ Changement de variable : $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$	59
.2/ Changement de variable : $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$	61
.III. Intégrales Triples	62
.1/ Définition	62
.2/ Propriétés	62
.3/ Calcul des Intégrales triples en coordonnées cartésiennes	63
.4/ Centre de-gravité d'un volume	64
.5/ Changement de variables dans une intégrale triple	64
$x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$	
Exercices Corrigés	67

IV	Intégrales de Surface	73
1.1	Notion de surface	73
2.1	Intégrale de surface	77
V	Formules de Stokes et d'Ostrogradsky	80
1.1	Formule de Green Riemann	80
2.1	Formule de Stokes	82
3.1	Formule d'Ostrogradsky	84
	Exercices Corrigés	88

Chapitre IV	Les Equations différentielles	91
I	Définition	91
II	Théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle du 1 ^{er} ordre	91
1.1	Fonction Lipschitzienne	91
2.1	Théorème d'existence et d'unicité	92
III	Equations différentielles d'ordre supérieur à deux	95
1.1	Définition	95
2.1	Cas d'une fonction linéaire	96
3.1	Théorème	96
4.1	Equation différentielle du second ordre	98
	Exercices corrigés	104

Chapitre V	Notions sur les distributions	118
I	Mesures - Intégration	118
1.1	Algèbre de boole. Tribu	118
2.1	Mesure sur une tribu	118
3.1	Convergence et intégration des fonctions mesurables	119
4.1	Propriétés de l'intégrale de Lebesgue	121
5.1	Autres propriétés de l'intégrale de Lebesgue	123
6.1	Espaces fonctionnels L_p	124
7.1	Les mesures en tant que fonctionnelles linéaires	125

II Distributions	126
1./ Exemple de distributions de charge en électrostatique	126
2./ Espace vectoriel D	127
3./ Les distributions	129
4./ Opérations sur les distributions	131
5./ Convergence	135
Exercices corrigés	137

Chapitre VI Les Séries de Fourier

I Les séries trigonométriques	146
1/ Définition	146
2/ Convergence	146
3./ Calcul des coefficients	148
4./ Remarque sur les formules du calcul des coefficients	149
5./ Généralisation	149
II Les Séries de Fourier	150
1/ Définition	150
2./ Théorème de Dirichlet	150
Exercices Corrigés	161

Chapitre VII Les transformations de Fourier

I Intégrale de Fourier	163
II Forme complexe de l'intégrale de Fourier	164
III Transformations de Fourier	164
IV Interprétation de la T.F des fonctions non périodiques	166
V Propriétés de la T.F	166
1./ Inversion	167
2./ Linéarité	167
3./ Similitude	167
4./ Translation	167
5./ Dérivation	167

6.1 Convolution	168
Exercices corrigés	170
Chapitre VIII Transformation de Laplace	173
I Définitions et existence	173
1.1 Généralités	173
2.1 Fonctions d'ordre exponentiel	176
II Propriétés	177
1.1 Linéarité	177
2.1 Homothétie	178
3.1 Dérivation	178
4.1 Intégration	178
5.1 Proposition	179
6.1 - 7.1 Propositions	179
8.1 Théorème du retard	179
III Applications	180
1.1 Application aux équations différentielles	180
2.1 Application aux systèmes d'équations différentielles	181
Exercices Corrigés	183

Chapitre IX Equations aux dérivées partielles du second ordre.

I Classification	190
II Problèmes aux limites	192
1.1 Problème elliptique	192
2.1 Problème hyperbolique	193
3.1 Problème parabolique	193
III Méthode de Séparation des Variables	193
IV Cas de la corde vibrante	194
1.1 Méthode des caractéristique	194
2.1 Méthode de séparation des variables	195

V	Equation de la chaleur	196
1.1	Problème de Cauchy	196
2.1	Problème aux limites	196
	Exercices Corrigés	199

Chapitre X Calcul des Variations

I	Problème de la brachistochrone	206
II	Problème pour une intégrale multiple	207
III	Lemmes fondamentaux	208
IV	Equation d'Euler dans le cas simple	209
V	Equation d'Euler dans le cas d'une fonctionnelle J du type $J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx = 0$	211
VI	Equation d'Euler dans le cas d'une fonctionnelle J du type $J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) dx = 0$	212
VII	Extremes. liés - problèmes isopérimétriques	213
VIII	Remarques relatives aux équations d'Euler	213
	Exercices Corrigés	215
		218
	Exercices et problèmes sans solutions	219