

Francine Delmer

DEUG SCIENCES

MATHÉMATIQUES

Fonctions de plusieurs variables et intégration

Rappels du cours et exercices résolus



DUNOD

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1. Introduction, topologie	1
I. Espaces topologiques, généralités	2
1. Ouverts, fermés, voisinages	2
2. Adhérence, intérieur, frontière	3
3. Propriétés	4
4. Exemples	4
II. Distances et normes	5
1. Distances	5
2. Normes	6
3. Ouverts, fermés, liés à une distance	7
4. Propriétés et remarques	8
III. Points d'accumulation, suites, valeurs d'adhérence	9
1. Définitions	9
2. Propriétés	11
3. Suites de Cauchy	11
IV. Compacité	12
1. Définitions	12
2. Propriétés	12
V. Connexité	13
1. Définitions	13
2. Propriétés	14
<i>Exercices</i>	
1. a. Ouverts, fermés, adhérence, intérieur	15
1. b. Distances, normes	16
1. c. Suites, limites, valeurs d'adhérence	19
1. d. Complétude	19
1. e. Compacité	21
1. f. Connexité	22
Chapitre 2. Fonctions de plusieurs variables	23
I. Limites, continuité	23
1. Applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$	23
2. Propriétés	24

3. Fonctions continues sur un compact	25
4. Fonctions continues sur un connexe	26
II. Applications différentiables	26
1. Définitions	26
2. Opérations sur les différentielles	30
3. Inégalités des accroissements finis	31
III. Différentielles d'ordre supérieur	31
1. Définitions	32
2. Formules de Taylor	33
IV. Extrema des fonctions	35
1. Définitions	35
2. Étude des points critiques	36
3. Points critiques, cas général	37
4. Extrema globaux	38
V. Fonctions implicites	39
1. Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$	39
2. Généralisation	39
3. Théorème d'inversion locale	40
4. Extrema liés	41
<i>Exercices</i>	
2. a. Continuité, continuité uniforme	42
2. b. Continuité, différentiabilité	43
2. c. Équations aux dérivées partielles, changements de variables	45
2. d. Recherche d'extrema	47
2. e. Extrema liés	48
2. f. Fonctions implicites, inversion locale	49
Chapitre 3. Intégrale de Riemann	50
I. Intégration des fonctions en escalier	51
II. Riemann-intégrabilité	53
1. Définitions	53
2. Fonctions intégrables	54
3. Sommes de Riemann	55
III. Propriétés de l'intégrale	56
1. Propriétés élémentaires	56

2. Théorèmes de la moyenne	56
3. Généralisation	57
4. Inégalité de Schwarz	58
IV. Primitives	58
V. Intégrales généralisées	59
1. Définitions	59
2. Exemple fondamental	61
3. Critère de Cauchy	62
4. Fonctions positives, comparaisons	62
5. Étude générale	63

Exercices

3. a. Intégrale de Riemann, définition	64
3. b. Exercices de calcul	65
3. c. Exercices théoriques	65
3. d. Intégrales généralisées, calculs	66
3. e. Intégrales généralisées, exercices théoriques	68

Chapitre 4. Intégrales à paramètres 69

I. Intégrales à paramètres définies sur un compact	69
1. Continuité	70
2. Dérivabilité	70
II. Intégrales généralisées à paramètres	71
1. Définitions	71
2. Continuité	72
3. Dérivabilité	73
4. Autre méthode	73
5. Règle d'Abel	74

Exercices

4. a. Continuité des intégrales à paramètres	75
4. b. Dérivabilité des intégrales à paramètres	75
4. c. Intégrales généralisées à paramètres	77
4. d. Calcul d'intégrales numériques	78
4. e. Intégration d'intégrales généralisées dépendant d'un paramètre	80

Chapitre 5. Intégrales multiples	82
I. Intégration sur des pavés de $\mathbb{R}^n$	82
1. Définitions	82
2. Riemann-intégrabilité sur des pavés de $\mathbb{R}^n$	84
II. Intégration sur des bornés de $\mathbb{R}^n$	85
1. Ensembles quarrables	85
2. Fonctions intégrables	86
3. Propriétés	87
III. Calcul pratique	88
1. Notations	88
2. Utilisation du Théorème de Fubini	89
3. Changement de variables	90
4. Intégration des intégrales à paramètres	90
IV. Intégrales curvilignes	91
5. Propriétés	93
6. Abscisse curviligne	94
V. Formule de Green-Riemann	95
<i>Exercices</i>	
5. a. Intégrales multiples définition	96
5. b. Calcul d'intégrales doubles et triples	97
5. c. Intégrales multiples liées à la physique	98
5. d. Changement de variables	99
5. e. Liens entre intégrales simples et multiples	100
5. f. Intégrales curvilignes et applications	102
Solutions des exercices du chapitre 1	104
Solutions des exercices du chapitre 2	138
Solutions des exercices du chapitre 3	174
Solutions des exercices du chapitre 4	202
Solutions des exercices du chapitre 5	229
Index	247

SCIENCES SUP



FONCTIONS DE PLUSIEU

98042

96917

131098

0001

1
4
X
3

Francine Delmer

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES ET INTÉGRATION

Les fonctions de plusieurs variables et l'intégration constituent l'un des deux piliers de l'analyse enseignée en seconde année d'université dans toute filière mathématique ou physique.

Fruit d'une expérience pédagogique dense, cet ouvrage comprend :

- un **résumé de cours** qui a pour objectifs, d'une part, d'aider l'étudiant à percevoir la « grande ligne » de l'organisation des notions fondamentales tout en respectant la personnalité du cours oral et, d'autre part, de lui fournir une source de référence pour vérifier la précision des énoncés de base ;
- un choix d'**exercices** de difficulté variable pour faciliter l'assimilation progressive des concepts et des subtilités de leur mise en œuvre ;
- des **solutions** rédigées en détail pour chaque exercice proposé, ce manuel fournit ainsi un guide sûr pour un travail personnel indispensable ;
- de **nombreuses remarques**, dans le cours comme dans les corrigés, lesquelles constituent des mises en garde contre certains mauvais réflexes et délimitent les hypothèses sur lesquelles s'appuie l'exposé.

Contenu : Topologie. Fonctions de plusieurs variables. Intégrale de Riemann. Intégrales à paramètres. Intégrales multiples.



ISBN 2 10 003274 7
Code 043274



FRANCINE DELMER

enseigne depuis de nombreuses années à l'université Bordeaux I. Elle est auteur aux éditions Dunod de deux autres ouvrages : *Mathématiques*, qui traite du programme global de 1^{re} année de 1^{er} cycle et *Les séries*, qui couvre avec celui-ci le programme d'analyse de 2^e année de 1^{er} cycle.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

PHYSIQUE APPLIQUÉE

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA NATURE
ET DE LA VIE


DUNOD
É D I T E U R