

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA 1
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE



Projet de Fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de
Master

Option : Energétique

Thème :

*Effet de l'imperfection thermique et
calorifique sur la fonction de prandtl
Meyer*

Réalisé par :

- DELMADJI Mohamed
- TALBI Mohamed Amine

Promoteur :

Mr.SALHI Merouane

Co-promoteur :

Mr.ROUDANE Mohamed

Année Universitaire

2017/2018

Résumé

Notre travail consiste à étudier l'effet de l'imperfection thermique et Calorifique d'un fluide en régime supersonique sur les paramètres thermodynamiques et géométriques d'un écoulement supersonique et sur la fonction de Prandtl Mayer.

Pour la première étape, on a étudié et déterminé les paramètres thermodynamique, géométriques pour les rapports de pression, de la température, masse Volumiques et le rapport des sections a fin de généraliser le modèle gaz parfait.

Pour la deuxième étape on à développer une nouvelle forme de la fonction de Prandtl Mayer (détente supersonique) sur la base d'ajouter l'effet des imperfections Thermique et calorifique sur cette forme.

On a trouvé plusieurs résultats et nous les avons comparés avec le modelé GP et on a calculé aussi l'erreur entre notre modelé et les modèles gaz parfait et HT Comme une comparaison.

Mots clés : *Ecoulement Supersonique, Gaz Réel, Rapports Thermodynamiques et Géométriques, Fonction de Condensation, Gaz Caloriquement Imparfait, Gaz thermiquement Imparfait, Quadrature de Simpson, Fonction de Prandtl Meyer, Méthode des Caractéristiques, Erreur Relative.*

Abstract

Our work is to study the effect of thermal imperfection and Calorific of a supersonic fluid on thermodynamic parameters and geometric supersonic flow and the function of Prandtl Mayer.

For the first stage, thermodynamic parameters were studied and determined and geometric for the pressure ratios, the temperature, mass Volumetric, section report to generalize the perfect gas model.

For the second stage we have to develop a new form of the function of Prandtl Mayer (supersonic relaxation) on the basis of adding the effect of imperfections Thermal and calorific on this form.

We found several results and we compared them with the GP model and we also calculated the error between our modeled and the models perfect gas and HT Like a comparison.

Key words: *Supersonic Flow, Real Gas, Thermodynamic and Geometric Ratios, Condensation Function, Calorifically Imperfect Gas, Thermally Imperfect Gas, Simpson's Quadrature, Prandtl Meyer Function, Characteristic Method, Relative Error.*

ملخص

عملنا هو دراسة تأثير النقص الحراري و الطاقوي لسائل في حالة تدفق فوق سرعة الصوت على إعدادات الديناميكا الحرارية و الهندسية لجريان فوق سرعة الصوت لوظيفة برانتل ماير .

بالنسبة للمرحلة الاولى , قمنا بدراسة و تحديد العوامل الديناميكية الحرارية و الهندسية من أجل تقارير الضغط , الحرارة , الكتلة الحجمية و تقرير الاقسام لتعميم نموذج الغاز المثالي.

في المرحلة الثانية عملنا على تطوير شكل جديد من وظيفة الاسترخاء الاسرع من الصوت لوظيفة برانتل ماير على أساس تأثير النقص الحراري و الطاقوي على هذا الشكل.

نحصلنا على العديد من النتائج و قارناها مع نموذج الغاز المثالي كما حسبنا نسبة الخطأ و الارتياب نمودجنا و نماذج الغاز المثالي ونمودج الحرارة العالية و أجرينا المقارنة.

الكلمات المفتاحية : التدفق الأسرع من الصوت ، الغاز الحقيقي ، النسب الديناميكية والهندسية ، دالة التكتيف ، الغاز الناقص من الناحية الحرارية ، الغاز الناقص حرارياً ، تربيع سيمبسون ، دالة براندتل ماير ، الطريقة المميزة ، الخطأ النسبي.

Remerciements

Ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'intervention, consciente, d'un grand nombre de personnes, nous souhaitons ici les en remercier.

Nous tenons d'abord à remercier très chaleureusement Mr. SAL MEROUANE qui nous a permis de bénéficier de son encadrement. Les conseils qu'il nous a prodigués, la patience, la confiance qu'il nous a témoignés ont été déterminants dans la réalisation de notre travail de recherche.

Je tiens à remercier notre prof Mr.ROUDANE MOHAMED.

Enfin, nous tenons à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Dédicace

*Je dédie ce modeste travail spécialement à mes très chers parents qui
m'ont encouragé et éclairé le chemin en me donnant la main et douaa,*

Tout le long de mes années d'étude.

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE.....	1
----------------------------	---

Chapitre I

Généralités sur les gaz réelles

1.1. Introduction.....	3
1.2. Les gaz réels.....	4
1.2.1. Le covolume.....	4
1.2.2. Les forces d'attraction intermoléculaires.....	5
1.2.3. Equation d'État des gaz réels.....	6
1.2.4. Equation générale.....	6
1.2.5. Equation de Berthelot.....	7
1.2.6. Equation de Berthelot Modifiée.....	7
1.3. Les coordonnées du point critique- équations réduites.....	8
1.3.1. Application pour l'équation de Berthelot.....	9
1.3.2. Calcul les constants a, b et R.....	10
1.3.3. Equation réduite.....	10
1.4. Facteur de compressibilité.....	11
1.5. Choix de l'équation d'état.....	12
1.6. Validation du choix de l'équation de Berthelot.....	13
1.7. Conclusion.....	15

Chapitre II

L'effet d'imperfection thermique et calorifique sur un écoulement

supersonique

2.1. Introduction.....	16
2.2. Hypothèses de base.....	17
2.3. Configuration des équations.....	18
2.3.1. L'équation de la conservation d'énergie.....	18
2.3.2. Détermination la différentielle dP en fonction de dp lorsque la température T sera constante.....	20
2.3.3. Détermination la différentielle dp/ρ.....	21
2.3.4. Détermination du nombre de Mach.....	21

2.3.5. Calcul de la vitesse.....	21
2.3.5.1. Détermination de la célérité du son.....	22
2.3.5.2. Le nombre de Mach.....	22
2.3.6. La chaleur spécifique à volume constante $c_v(T, \rho)$	23
2.3.7. La chaleur spécifique à pression constante $c_p(T, \rho)$	24
2.4. Rapport des chaleurs spécifiques γ	25
2.5. Calcul numérique des rapports thermodynamiques.....	26
2.5.1. La méthode de Newton.....	27
2.5.2. Algorithme de la méthode de Newton appliquée aux systèmes.....	29
2.5.3. Le choix de la solution initial.....	29
2.6. Erreur entre le modèle du gaz réel et les modèles GP et HT.....	30
2.6.1. Erreur du modèle gaz parfait.....	31
2.6.2. Erreur du modèle haute température.....	32
2.7. Conclusion.....	32

Chapitre III

Développement d'une nouvelle forme de la fonction de PRANDTL MEYER

3.1. Introduction.....	33
3.2. Détente de Prandtl-Meyer.....	34
3.3. Le modèle GP (caloriquement et thermiquement parfait).....	35
3.4. Le modèle HT (caloriquement imparfait et thermiquement parfait).....	35
3.5. Détermination de la fonction de Prandtl Meyer pour un GR.....	35
3.5.1. Formulations mathématiques.....	36
3.5.2. Détermination la fonction de Prandtl Meyer d'un gaz parfait à partir de la nouvelle fonction.....	39

3.5.3. Détermination la fonction de Prandtl Meyer d'un à haute température à partir de la nouvelle fonction.....	42
3.6. Les Procédures du calcul numérique.....	43
3.6.1. Détermination la masse volumique génératrice ρ_0	43
3.6.2. Détermination les rapports thermodynamiques.....	43
3.6.3. Détermination les rapports critiques au col.....	44
3.6.4. Procédure de calcul par la méthode de Simpson.....	44
3.6.5. Effet de la quadrature sur la convergence du problème.....	48
3.7. Conclusion.....	49

Chapitre IV

RESULTATS ET COMMENTAIRES

4.1. Résultats pour les caractéristiques d'un gaz réel.....	50
4.2. Résultats pour les paramètres critiques (au col).....	55
4.3. Résultats pour les paramètres supersoniques.....	57
4.4. Résultats sur l'erreur pour les paramètres supersoniques.....	62
4.5. Résultats sur la fonction de Prandtl Meyer.....	67
4.6. Résultats sur l'erreur pour la fonction de Prandtl Meyer.....	69
4.7. Résultats de la simulation numérique CFD.....	70
4.8. Comparaison entre M2 de GP et de RG et les résultats du CFD.....	74
Conclusion générale.....	75
Références.....	79

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Représentation de l'effet de covolume	05
Figure 1.2	Représentation des forces intermoléculaires	06
Figure 1.3	Représentation graphique de l'état du fluide pour le cas d'un gaz réel	08
Figure 3.1	Schéma de la détente de Prandtl-Meyer	35
Figure 3.2	Présentation de la condensation des nœuds	46
Figure 3.3	Variation de la fonction $F_{VT}(T, \rho)$ dans $[T_S, T^*]$	47
Figure 3.4	Condensation des nœuds vers les deux extrémités de l'intervalle $[T_S, T^*]$	47
Figure 3.5	Variation de la fonction $F_{VP}(T, \rho)$ dans $[\rho_S, \rho^*]$	47
Figure 4.1	Variation de la masse volumique génératrice ρ_0	50
Figure 4.2	Variation de l'erreur relative de ρ_0 en fonction de T_0	51
Figure 4.3	Variation de facteur de compressibilité en fonction de T_0 pour quelque valeur de pression P_0	52
Figure 4.4	Variation de la chaleur spécifique C_p en fonction de T_0 pour différentes P_0	52
Figure 4.5	Variation du rapport des chaleurs spécifiques γ en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	53
Figure 4.6	Variation du coefficient C_T en fonction de T_0 pour quelque valeur de P_0	54
Figure 4.7	La célérité du son en fonction de la température génératrice T_0 pour quelques valeurs de pression P_0	54
Figure 4.8	Rapport des températures critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	55
Figure 4.9	Rapport des masses volumique critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	56
Figure 4.10	Rapport des pressions critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	56
Figure 4.11	Rapport des vitesses du son critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	57
Figure 4.12	Rapport de débit massique critique en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0	57
Figure 4.13	Variation de rapport des températures en fonction du nombre de Mach	58
Figure 4.14	Variation de rapport des densités en fonction du nombre de Mach	59
Figure 4.15	Variation de rapport de pressions en fonction du nombre de Mach	59

Figure 4.16	Variation de rapport des célérités du son en fonction du nombre de Mach	60
Figure 4.17	Variation de rapport des sections en fonction du nombre de Mach	61
Figure 4.18	Correction de nombre de Mach du modèle GR par rapport au modèle GP	62
Figure 4.19	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des températures en fonction de nombre de Mach	62
Figure 4.20	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des masses volumiques en fonction de nombre de Mach	63
Figure 4.21	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport de pression en fonction de nombre de Mach	64
Figure 4.22	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des célérités du son en fonction de nombre de Mach	65
Figure 4.23	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des sections en fonction de nombre de Mach	66
Figure 4.24	Variation de la fonction de Prandtl Meyer en fonction de nombre de Mach pour quelques valeurs de la pression génératrice P_0	68
Figure 4.25	Variation de la fonction de Prandtl Meyer v en fonction de la température génératrice pour quelques valeurs de pression génératrice P_0	68
Figure 4.26	Variation de l'erreur relative de la fonction de Prandtl Meyer v entre les modèles GP et GR en fonction du nombre de Mach	69
Figure 4.27	Variation de l'erreur relative de la fonction de Prandtl Meyer v entre les modèles HT et RG en fonction du nombre de Mach	70
Figure 4.28	La présentation du maillage raffiné du volume de contour étudié	70
Figure 4.29	La représentation de l'histoire de convergence pour le cas traité	71
Figure 4.30	La représentation du contour de la pression statique dans le volume de contour étudié	71
Figure 4.31	La représentation du contour de l'amplitude de la vitesse dans le volume de contour étudié	72
Figure 4.32	La présentation du contour de nombre de mach dans le volume de contour étudié	72
Figure 4.33	La représentation du contour de la température statique dans le volume étudié	73
Figure 4.34	La représentation du contour de la densité dans le volume étudié	73
Figure 4.35	La représentation du contour de la vitesse du son dans le volume de contour étudié	74

Liste des tableaux :

Tableau 1.1	Comparaison entre les valeurs expérimentales de l'air et les résultats numériques pour chaque équation du gaz réel.	12
Tableau 1.2	Valeurs numériques de la masse volumique ρ par le modèle de Berthelot pour des différentes pressions.	14
Tableau 1.3	Valeurs expérimentales de la masse volumique ρ pour des différentes pressions et températures	14
Tableau 2.1	les équations thermodynamiques des modèles GP et HT.	30
Tableau 2.2	Les coefficients polynômiaux du C_p .	31
Tableau 3.1	Efficacité des quadratures sur le résultat pour une précision $\epsilon=10^{-6}$	49
Tableau 4.1	Tableaux 4.1 : Comparaison entre M2 de GP et RG et les résultats du CFD.	74

Nomenclature

LISTE DES SYMBOLES

a	Constante des forces intermoléculaire.
b	Constante de taille moléculaire.
m	Débit massique critique.
U	Energie interne.
v	Volume spécifique.
x	Abscisse d'un point.
y	Rayon d'un point.
u, v	Composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse.
H	Enthalpie.
M	Nombre de Mach.
P	Pression.
R	Constant thermodynamique de l'air.
T	Température.
V	Vitesse de l'écoulement.
W	Travail.
Z	Facteur de compressibilité.
C_P	Chaleur spécifique à pression constante.
C_V	Chaleur spécifique a volume constant.
C_T	Constant déterminée à température constante.
C_F	Coefficient de la force de pression.
C_S	Célérité du son.
b_1, b_2	Coefficients de la fonction de la condensation.
γ	Rapport des chaleurs spécifiques.
ρ	Masse volumique.
θ	Température caractéristique de vibration.
ε	Tolérance.
ν	Fonction de Prandtl Meyer.
μ	Angle de Mach.

INTRODUCTION GENERALE

L'étude de la nature des gaz constitue une introduction idéale à la thermophysique. Cette étude, poursuivie dans les deux premiers chapitres, présente trois aspects nettement caractéristiques. Le premier se borne à la mise en ordre des résultats expérimentaux obtenus à partir de l'étude du monde qui nous entoure, en d'autres termes du monde macroscopique, afin d'aboutir à des conclusions générales ou lois. Le deuxième nous amène à l'élaboration d'un modèle pour les molécules, ce qui revient à une étude du monde sub-microscopique ou moléculaire. Finalement, ces deux points de vue se rassemblent pour conduire à une interprétation faisant fournir un aperçu sur le développement des équations d'état pour le calcul des propriétés thermodynamiques des gaz.

Une large variété de problèmes dans l'écoulement compressible a été résolue sur l'hypothèse que l'air se comporte comme gaz parfait. Cette hypothèse est justifiée, pourvu que la pression et la température ambiante d'intérêt est petit et proche atmosphérique. Cependant, quand de l'air est soumis aux changements de l'état aux pressions et aux températures loin enlevé d'atmosphérique, il cesse de se conformer à la loi simple de gaz et présente d'autres propriétés non caractéristiques d'un gaz parfait. En conséquence, des procédés d'écoulement dans lequel aèrent sous réserve de ces conditions extrêmes peut être prévu s'écarter du comportement de gaz parfait. il est connu que qu'un tel écoulement sera produit dans des souffleries hypersoniques et par le vol d'avions aux vitesses anémométriques supersoniques élevées, par conséquent, la nature et l'ampleur de ce lièvre de départ deviennent des considérations importantes en aérodynamique.

La fonction de Prandtl Meyer joue un rôle très important dans le calcul des écoulements supersoniques. Si on veut concevoir une tuyère supersonique donnant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie, il est nécessaire de connaître l'angle de détente initiale au col qu'il faut donner pour avoir le nombre de Mach de sortie voulu.

Le premier chapitre fournit un aperçu sur le développement des équations d'état pour le calcul des propriétés thermodynamiques des gaz.

Dans le deuxième chapitre, des équations d'écoulement sont obtenues à l'aide de l'équation d'état de Berthelot. Cette équation, plutôt que Van der Waals', est utilisée pour que des évaluations légèrement meilleures des effets de force intermoléculaire puissent être obtenues.

Dans le troisième chapitre on a étudié l'effet de la pression génératrice sur la fonction de Prandtl Meyer. Le travail consiste essentiellement à développer des nouvelles relations et des expressions concernant l'écoulement supersonique en utilisant les hypothèses d'équation d'état des Berthelot.

Dans le quatrième chapitre, on procède à la présentation des divers résultats obtenus par un programme de calcul élaboré en exploitant les différentes équations trouvées par notre modèle dans les chapitres précédents et de les comparer avec les résultats obtenus par le modèle du gaz parfait GP et le modèle haute température HT.

On a fait une simulation numérique avec le logiciel ansys fluent, pour comparer et valider les résultats avec le CFD, qui été basé sur les équations de Navier stocks.

Finalement, on a fait une conclusion et quelque perspectives et travaux de future.

Chapitre 1

*Généralités sur les gaz
réels*

1.1. Introduction :

L'étude de la nature des gaz constitue une introduction idéale à la thermophysique. Cette étude, poursuivie dans les deux premiers chapitres, présente trois aspects nettement caractéristiques. Le premier se borne à la mise en ordre des résultats expérimentaux obtenus à partir de l'étude du monde qui nous entoure, en d'autres termes du monde macroscopique, afin d'aboutir à des conclusions générales ou lois. Le deuxième nous amène à l'élaboration d'un modèle pour les molécules, ce qui revient à une étude du monde sub-microscopique ou moléculaire. Finalement, ces deux points de vue se rassemblent pour conduire à une interprétation faisant fournir un aperçu sur le développement des équations d'état pour le calcul des propriétés thermodynamiques des gaz.

Rarement les aspects expérimentaux et théoriques d'une étude n'ont été aussi nettement séparés qu'ils le sont ici. Néanmoins, nous trouvons une bonne illustration de la façon dont ces deux aspects d'un problème scientifique vont de pair, pour conduire à une interprétation plus profonde du monde qui nous entoure. Cependant, la plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont antérieurs aux interprétations théoriques du chapitre suivant. Pour mémoire, rappelons que l'intervention de l'hypothèse moléculaire pour la matière est née avec le dix-neuvième siècle et devint convenablement élaborée à la fin de ce même siècle.

Signalons que certains travaux expérimentaux marquants des époques antérieures au dix-neuvième siècle, non guidés de manière appréciable par une quelconque théorie existante alors, furent vraiment empiriques.

Ce chapitre fournit un aperçu sur le développement des équations d'état pour le calcul des propriétés thermodynamiques des gaz. En commençant par l'équation d'état des gaz parfaits, ses applications et ces limites puis les premières modélisations des équations d'état semi-empirique des gaz réels datant du 19ème siècle et leurs développement pendant le 20ème siècle, le lecteur est invité à suivre les grandes lignes du développement de ces équations en insistant sur les changements des approches moléculaires (notion de covolume et des forces d'attraction intermoléculaires) entre le modèle des gaz parfaits, et les modèles des

gaz réels. Ainsi que l'impact sur le calcul des fonctions thermodynamiques tel que l'énergie interne, l'entropie et l'enthalpie. On procédera aussi dans ce chapitre spécifiquement à l'étude (détermination des coefficients de covolume et de l'attraction moléculaire à partir du point critique) et l'application du modèle de Berthelot pour les gaz réels.

1.1. Les gaz réels :

Le modèle du gaz parfait décrit les gaz réels lorsque leur pression est faible, c'est-à-dire lorsque leur densité, n/v , est petite. Dans de telles conditions, les molécules constitutives du gaz interagissent peu entre elles. En fait, le modèle du gaz parfait suppose qu'il n'y a *aucune interaction* entre les molécules.

Dans ce cas, la différence entre un gaz réel et un gaz parfait c'est l'aptitude du gaz réel à se comprimer, ce phénomène de compressibilité est dû à l'effet des forces d'attraction intermoléculaire et à l'effet de covolume [3], alors, on peut tenir compte de ces interactions afin d'obtenir une meilleure équation d'état.

Des molécules proches l'une de l'autre ne peuvent s'interpénétrer et exercent donc l'une sur l'autre une action répulsive. Au contraire, des molécules éloignées exercent l'une sur l'autre une faible force d'attraction.

Cette interaction peut être décrite par le potentiel de van der Waals.

Pour des molécules prises au sein du gaz, les interactions avec les autres molécules ont une moyenne nulle. Pour celles proches des parois, en revanche, l'attraction exercée par les molécules du gaz n'est pas compensée. Il en résulte une force tendant à ramener ces molécules vers l'intérieur du gaz, équivalente à une pression supplémentaire, p_i , dite *pression interne*.

Le volume accessible aux molécules est celui du récipient, diminué de celui occupé par les autres molécules. Le volume qu'occupent les autres molécules est appelé *covolume* et noté ***nb***.

1.2.1 Le covolume :

Si on se réfère à l'équation des gaz parfaits on remarquera que pour une température constante le volume tend vers zéro si la pression tend vers l'infinie.

$$T = cte \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} v = 0 \quad (1.1)$$

Mais la répulsion entre les molécules d'un gaz impose un volume minimal appelé le covolume. Rendant compte ainsi de l'impossibilité de réduire à zéro le volume réellement occupé par la matière.

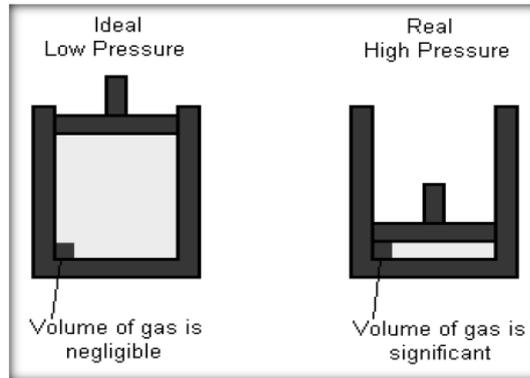


Figure 1.1 : Représentation de l'effet de covolume

1.2.2. Les forces d'attraction intermoléculaires :

Dans un fluide non parfait les interactions entre molécules ne sont pas nulles. Au sein du fluide, une molécule est soumise à une force résultante nulle puisqu'elle est entourée de façon isotrope par les molécules voisines; ceci n'est plus vrai quand la molécule s'approche de la paroi car les molécules voisines n'occupent plus que le demi-espace interne et la molécule est freinée. La pression résultante, conséquence des chocs contre la paroi, en est diminuée [1].

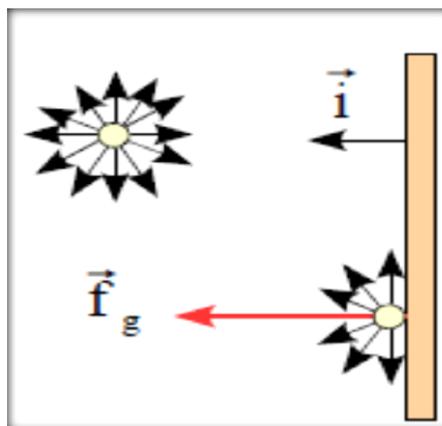


Figure 1.2 : Représentation des forces intermoléculaires

Si une molécule est loin de la paroi, la distribution de ces forces d'attraction est isotrope et leur résultante est nulle. Si une molécule est contre la paroi, la

résultante, \vec{f}_g de ces forces est orientée vers l'intérieur du gaz pour maintenir les molécules. Ce qui cause une diminution de la pression au voisinage des parois.

1.2.3 Equation d'État des gaz réels :

Les fluides réels regroupent les liquides ainsi que les gaz aux pressions suffisamment élevées pour que leur comportement s'écarte notablement de celui du gaz parfait. La différence essentielle entre les fluides réels et le gaz parfait est que *l'on ne peut plus négliger les interactions entre les particules du fluide.*

Concernant ces interactions, on retiendra seulement :

- qu'elles sont généralement attractives à grande distance.
- qu'elles sont répulsives à courte distance (les particules ne s'interpénètrent pas).

La relation entre la pression P et le volume V pour un gaz parfait :

$$V \propto \frac{1}{P} \text{ ou } V = \frac{Cste}{P} \text{ ou } PV = Cste \quad (1.2)$$

L'équation (1.2) introduit deux corrections dans la loi des gaz parfaits :

1. Les molécules ont un volume non nul et incompressible (volume exclu).
2. Il existe des forces d'attraction entre les molécules.

Introduisant les valeurs corrigées du volume et de la pression dans l'équation des gaz parfaits, van der Waals aboutit à l'équation :

$$(p + p_i)(v - nb) = nRT \quad (1.3)$$

La pression interne est fonction croissante de la densité du gaz. Une analyse détaillée montre que :

$$p_i = \frac{an^2}{v^2} \quad (1.4)$$

Les valeurs de a et b varient selon la nature du gaz étudié.

1.2.4. Equation générale :

La théorie cinétique des gaz amène à remplacer l'équation caractéristique des gaz parfaits $P v = RT$ Par une équation générale $(P + \pi)(v - b) = RT$ (1.5)

Avec :

π : Excès de pression due à l'attraction mutuelle des particules (pression intérieure). La pression au sein de fluide est supérieure à la pression au voisinage de la paroi (tient compte des forces intermoléculaires).

b : le covolume, c'est le volume minimum que peut occuper l'unité de masse du gaz considéré (tient compte du volume propre des molécules environ 4 fois)

1.2.5 Equation de BERTHELOT:

Elle s'écrit:

$$\left(P + \frac{a}{T v^2} \right) (v - b) = RT \quad (1.6)$$

Ou bien :

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{T v^2} \quad (1.7)$$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a \rho^2}{T} \quad (1.8)$$

Avec: $a = 3 P_c V_c^2 T_c$, $b = \frac{V_c}{3}$ et $R = \frac{8 P_c V_c}{3 T_c}$

1.2.6 Equation de Berthelot Modifiée :

L'équation finale de la pression en fonction de la température et de la masse volumique sous la forme :

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{\left[1 - \left[\left(\frac{9 \rho R T_c}{128 P_c} \right) \left(1 - \frac{6 T_c^2}{T^2} \right) \right] \right]} \quad (1.9)$$

1.3 Les coordonnées du point critique- équations réduites :

Pour $T > T_c$, P diminue quand V augmente. Pour une valeur de P , correspond une seule valeur de V qui est le volume réellement occupé par le gaz à cette température et à cette pression.

Pour $T < T_c$, les isothermes présentent un minimum E et un maximum F .

A une valeur de P , peuvent correspondre 3 valeurs de volumes (3 racines). A mesure de l'accroissement de la température, les 3 racines se confondent fournissant un point d'inflexion sur l'isotherme correspondante où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Ce point est caractérisé par une pression critique P_c , une température critique T_c et un volume critique V_c .

Physiquement seules les branches BG et AH représentent des états stables du fluide.

BG c'est l'état gazeux et AH c'est l'état liquide.

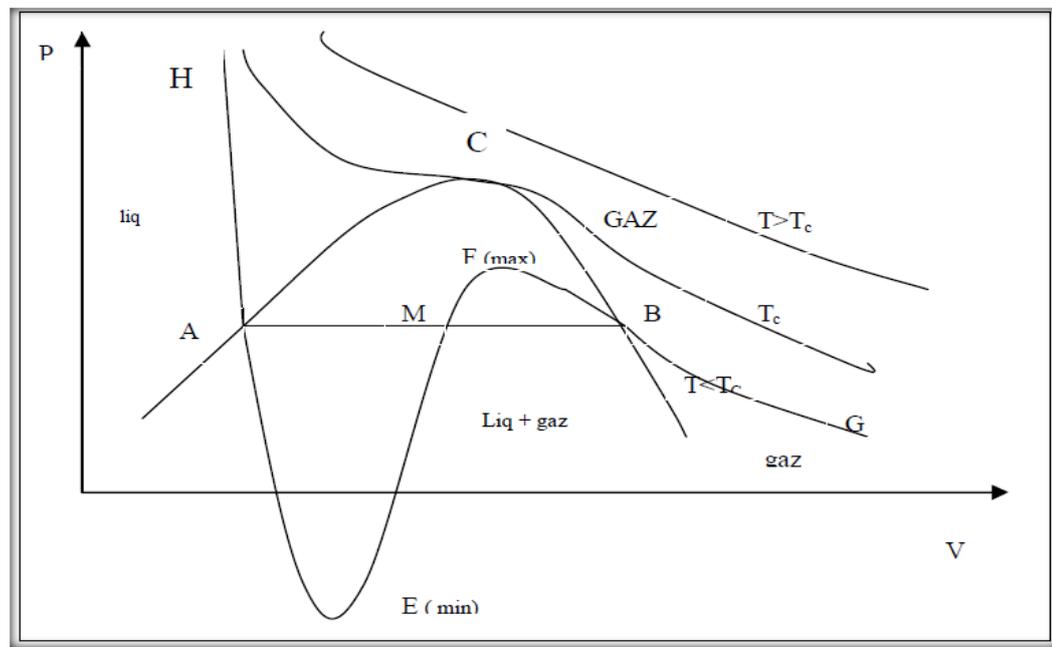


Figure 1.3 : représentation graphique de l'état du fluide pour le cas d'un gaz réel

Les états d'équilibres du fluide représentés par des portions AE et BF de l'isotherme sont des états d'équilibre métastables.

AE : correspond au retard de la vaporisation.

BF : correspond au retard de la condensation.

La portion d'isotherme EMF n'est pas observable car elle est relative à des états instables. P et V évoluent dans le même sens.

1.3.1 Application pour l'équation de BERTHELOT:

Elle s'écrit:

$$\left(P + \frac{a}{T v^2} \right) (v - b) = RT$$

(1.10)

Ou bien :

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{T v^2} \quad (1.11)$$

Calculons les coordonnées du point critique C (PC, VC, TC) en fonction de (a, b et r).

$$\text{L'équation caractéristique: } P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{T v^2}$$

$$\text{En point critique C : } P_c = \frac{RT_c}{(V_c - b)} - \frac{a}{T_c V_c^2} \quad (1.12)$$

$$\text{Tangente horizontale en C : } \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_c} = 0 \Rightarrow \frac{RT_c}{(V_c - b)^2} = \frac{2a}{T_c V_c^3} \quad (1.13)$$

$$\text{Point inflexion en C: } \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_{T_c} = 0 \Rightarrow \frac{RT_c}{(V_c - b)^3} = \frac{3a}{T_c V_c^4} \quad (1.14)$$

Divisons l'équation (1.13) par l'équation (1.14), on obtient:

$$(V_c - b) = \frac{2}{3} V_c \Rightarrow V_c = 3b \quad (1.15)$$

Remplaçons l'équation (1.15) dans l'équation (1.14), on obtient:

$$T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb} \quad (1.16)$$

Remplaçons les équations (1.15) et (1.16) dans l'équation (1.11), on obtient:

$$P_c = \frac{a}{27b^2} \quad (1.17)$$

1.3.2 Calcul des constants a, b et R:

En C, on a :

$$\begin{cases} V_c = 3b \\ T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb} \\ P_c = \frac{a}{27b^2} \end{cases}$$

Ici nous avons trois équations à trois inconnues, la solution de ce système donne :

$$\begin{cases} a = 3 P_c V_c^2 T_c \\ b = \frac{V_c}{3} \\ R = \frac{8 P_c V_c}{3 T_c} \end{cases} \quad (1.18)$$

Les caractéristiques critiques de l'air sont : $T_c=132,6$ K, $P_c=37,7 \cdot 10^5$ Pa, $V_c=0.1173$ L.

1.3.3 Equation réduite :

En remplaçant les constantes a, b et R dans l'équation de BERTHLOT :

On obtient :

$$\left(P + \frac{3P_c V_c^2 T_c}{TV^2} \right) \left(v - \frac{V_c}{3} \right) = \frac{8}{3} P_c V_c \frac{T}{T_c} \quad (1.19)$$

Divisons par P_c et V_c , ça donne :

$$\left(\frac{P}{P_c} + 3\frac{V_c^2}{V^2}\frac{T_c}{T}\right)\left(\frac{V}{V_c} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\frac{T}{T_c} \quad (1.20)$$

L'équation réduite de BERTHELOT sous la forme:

$$\left(\omega + 3\frac{1}{\theta\varphi^2}\right)\left(\varphi - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\theta \quad (1.21)$$

Cependant, à la suite d'expériences, BERTHELOT a trouvé une meilleure représentation des résultats expérimentaux pour les gaz réels en dehors du point critique, par l'équation modifiée suivante :

$$\left(\omega + \frac{16}{3}\frac{1}{\theta\varphi^2}\right)\left(\varphi - \frac{1}{4}\right) = \frac{32}{9}\theta \quad (1.22)$$

L'équation (1.22) s'appelle Équation réduite modifiée de BERTHELOT, Avec cette équation, les constantes a , b et R , auront pour valeurs dans l'équation de BERTHELOT :

$$\begin{cases} a = \frac{16}{3} P_c V_c^2 T_c \\ b = \frac{V_c}{4} \\ R = \frac{32}{9} \frac{P_c V_c}{T_c} \end{cases}$$

Il est à rappeler que l'équation réduite modifiée de BERTHELOT, à l'encontre de celle de VAN DER WAALS, n'est pas applicable au point critique et en son voisinage. Par ailleurs, l'équation réduite de BERTHELOT est plus précise que celle de VAN DER WAALS. Elles servira en particulier pour les calculs des correction à apporter aux grandeurs thermodynamiques des gaz parfaits.

1.4 Facteur de compressibilité:

L'équation d'état des gaz réels peut également être utilisée sous la forme très générale $P \cdot V = Z \cdot R \cdot T$, Z est appelé coefficient ou facteur de compressibilité.

L'équation de Berthelot : $\left(P + \frac{a}{Tv^2}\right)(v-b) = RT$

$$\left(P + \frac{a}{TV^2}\right)(V-b) = RT \Rightarrow PV - Pb + \frac{a}{TV} - \frac{ab}{TV^2} = RT \quad (1.23)$$

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{Pb}{RT} - \frac{a}{RT^2V} + \frac{ab}{RT^2V^2} \quad (1.24)$$

Finalement :

$$Z = 1 + \frac{Pb}{RT} - \frac{a}{RT^2V} + \frac{ab}{RT^2V^2} \quad (1.25)$$

1.5 Choix de l'équation d'état

Les différentes lois d'état ont été exposées. Il convient maintenant de choisir laquelle nous allons utiliser dans notre modèle.

Le tableau 1.1 représente une comparaison entre les valeurs expérimentales de l'air et les résultats numériques obtenu par des séries de tests pour chaque équation du gaz réel. Si on accepte une erreur inférieure à 5 %, ce qui est le cas généralement pour les applications aérodynamiques, on peut étudier un écoulement supersonique en utilisant les d'un gaz réels, si la température T et la pression P bien déterminées. Les conditions nécessaires pour obtenir une erreur inférieure à 5 % présentées dans le tableau suivant :

Tableau 1.1 : comparaison entre les valeurs expérimentales de l'air et les résultats numériques pour chaque équation du gaz réel.

	1 Bar	10 Bar	100 Bar
Van der Waals	✓	T > 132,5 K	T > 300 K
Berthelot	✓	✓	✓
Dieterici	T > 170 K	T > 230 K	T > 440 K

Redlich Kwong	✓	T > 170 K	T > 270 K
Beattie-Bridgeman	✓	T > 170 K	T > 298 K
Clausius	T > 201 K	T > 489 K	Toujours > 5%
Wohl	✓	T > 186 K	T > 300 K
Berthelot modifiée	✓	T > 166 K	T > 274 K

Les équations empiriques et semi-empiriques dites non analytiques sont généralement plus précises mais nécessitent de connaître un grand nombre de constantes qui peuvent être difficiles à obtenir dans la littérature.

Ainsi, notre choix se porte sur l'équation d'état analytique de Berthelot requière un nombre de paramètres limité et peuvent être résolue de manière analytique tout en conduisant à une bonne estimation du comportement des gaz. L'équation d'état de Berthelot ne nécessite que deux coefficients, a et b , disponibles dans la littérature [14].

1.6. Validation du choix de l'équation de Berthelot

Nous venons de choisir la loi d'état de Berthelot pour son faible nombre de coefficient et sa simplicité. Il convient donc de s'assurer de la validité des résultats que donne cette loi, et aussi de vérifier les différences par rapport à la loi des gaz parfaits pour le gaz retenu pour cette validation qui est dans notre étude l'air. On compare, sur le Tableau 1.2, la masse volumique de l'air calculée avec la loi des gaz parfaits et la loi de Berthelot, aux valeurs expérimentales d'une base de données [11], sur le Tableau 1.3. On remarque que pour ces températures et ces pressions, les gaz ne se comportent pas du tout comme des gaz parfait, et que la loi de Berthelot donne des valeurs plus correctes de la masse volumique, l'analyse de ces résultats sera bien détailler dans le quatrième chapitre. La loi de Berthelot est donc utilisable et justifiée

Tableau 1.2 : Valeurs numériques de la masse volumique ρ par le modèle de Berthelot pour des différentes pressions.

T(K)	P=1 (atm)			P=10 (atm)			P=100 (atm)		
	$\rho(g/cm^3)$ GP	$\rho(g/cm^3)$ Berthelot	Erreur %	$\rho(g/cm^3)$ GP	$\rho(g/cm^3)$ Berthelot	Erreur %	$\rho(g/cm^3)$ GP	$\rho(g/cm^3)$ Berthelot	Erreur %
298.15	1.18413	1.18262	0.127	11.84131	11.69331	1.250	118.41314	105.10024	11.243
500	0.70609	0.70554	0.078	7.06097	7.00792	0.751	70.60975	65.64144	7.036
1000	0.35304	0.35291	0.039	3.53048	3.51714	0.378	35.30487	34.01631	3.650
1500	0.23536	0.23530	0.025	2.35365	2.34772	0.252	23.53658	22.95672	2.464
2000	0.17652	0.17644	0.042	1.76524	1.76190	0.189	17.65243	17.32422	1.859
2500	0.14121	0.14114	0.049	1.41219	1.41004	0.152	14.12195	13.91110	1.493
3000	0.11768	0.11764	0.028	1.17682	1.17532	0.128	11.76829	11.62150	1.247

Tableau 1.3 : Valeurs expérimentales de la masse volumique ρ pour des différentes pressions et températures

La pression P (bar)	La température T (K)	masse volumique $\rho(g/cm^3)$
1	500	0.696
1	1000	0.348
10	200	17.835
10	300	11.643
10	500	6.944
10	1000	3.471
100	200	213.950
100	300	116.945
100	500	66.934
100	1000	33.613

1.7. Conclusion :

Dans le but de développer les relations des rapports thermodynamiques et géométriques nécessaires, et d'étudier l'écoulement supersonique isentropique pour un gaz réel (cas de l'air) en utilisant l'équation de Berthelot qui introduit les effets de taille moléculaire et de la force intermoléculaire. Cette équation, plutôt que les autres équations d'états, est utilisée pour que des évaluations légèrement meilleures des effets de force intermoléculaire puissent être obtenues. Cette dernière sera utilisé pour développer un nouveau modèle mathématique pour déterminer les relations thermodynamiques et géométriques dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

L'effet d'imperfection thermique et calorifique sur un écoulement supersonique

2.1. Introduction:

Une large variété de problèmes dans l'écoulement compressible a été résolue sur l'hypothèse que l'air se comporte comme gaz parfait. Cette hypothèse est justifiée, fourni la pression et la température ambiante d'intérêt est petit et proche atmosphérique. Cependant, que quand de l'air est soumis aux changements de l'état aux pressions et aux températures loin enlevé d'atmosphérique, il cesse de se conformer à la loi simple de gaz et présente d'autres propriétés non caractéristiques d'un gaz parfait. En conséquence, des procédés d'écoulement dans lequel aèrent sous réserve de ces conditions extrêmes peut être prévu s'écarter du comportement de gaz parfait. il est connu que qu'un tel écoulement sera produit dans des souffleries hypersoniques et par le vol d'avions aux vitesses anémométriques supersoniques élevées, par conséquent, la nature et l'ampleur de ce lièvre de départ deviennent des considérations importantes en aérodynamique.

Les théories et les expériences classiques ont prouvé que des trois propriétés de gaz réel, d'abord il pour montrer des caractéristiques à la différence de ceux d'un gaz parfait. Ces propriétés peuvent être classifiées en tant qu'imperfections thermiques et caloriques. Les imperfections thermiques sous forme de forces intermoléculaires et de taille moléculaire sont sensiblement manifestes à de basses températures et à pressions. Les changements des capacités de chaleur deviennent une imperfection calorique importante relativement à températures élevées. Des circonstances dans lesquelles les effets de la dissociation moléculaire ou de l'excitation électronique deviennent importants (les températures sensiblement au-dessus de 3550 K) peuvent être négligées pour le présent. Pour autant que des gaz en équilibre soient concernés, il est habituellement suffisant d'expliquer la force intermoléculaire et les effets de taille moléculaires avec des limites additionnelles dans l'équation d'état. De même, des changements des capacités de chaleur des molécules peuvent être expliqués avec une fonction de la température dans les expressions dans les chaleurs spécifiques.

Dans ce chapitre, des équations d'écoulement sont obtenues à l'aide de l'équation d'état de Berthelot. Cette équation, plutôt que Van der Waals', est utilisée pour que des évaluations légèrement meilleures des effets de force intermoléculaire puissent être obtenues. On le suppose que des imperfections caloriques peuvent être expliquées dans les expressions des chaleurs spécifiques.

2.2. Hypothèses de base

- l'air se comporte comme un gaz diatomique qui a :
 - une constante universelle du gaz $R=8.3145 \text{ J}/(\text{mol.K})$.
 - une température caractéristique de vibration $\theta=3056 \text{ K}$.
 - une masse molaire $m=28.96 \text{ g/mol}$.
- Les paramètres de stagnation (pression et température génératrices) obéissent à la loi des gaz réels, en exploitant l'équation de Berthelot qui introduit les effets de taille moléculaire (covolume) et de la force intermoléculaire.
- L'expansion (la détente) de l'air a lieu de manière uniforme sans choc ni discontinuités.
- Les effets de transfert thermique par conduction, convection ou rayonnement sont négligeables.
- Le fluide (air) est thermiquement et calorifiquement imparfait.

Toute hypothèse supplémentaire sera dictée -si c'est nécessaire-durant les prochaines analyses. Bien qu'il semble avoir eu beaucoup de suppositions simplificatrices, celles-ci sont toutes raisonnables et on peut s'attendre qu'elles reflètent le véritable comportement de notre domaine d'étude assez précisément.

2.3. Configuration des équations :

Dans le but de développer les relations des rapports thermodynamiques et géométriques nécessaires, et d'étudier l'écoulement supersonique isentropique pour un gaz réel (cas de l'air) en utilisant l'équation de Berthelot qui introduit les effets de taille moléculaire et de la force intermoléculaire.

L'équation de Berthelot elle s'écrit:

$$\left(P + \frac{a}{Tv^2}\right)(v-b) = RT \quad (2.1)$$

Ou bien :

$$P(T,v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2} \quad (2.2)$$

Connaissons: $v = \frac{1}{\rho}$

$$P(T,\rho) = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a\rho^2}{T} \quad (2.3)$$

Avec: $a = 3 P_c V_c^2 T_c$ et $b = \frac{V_c}{3}$

Avec : b est la constante de taille moléculaire.

a est la constante des forces intermoléculaire.

P_c, V_c : sont la pression et le volume critique.

2.3.1. L'équation de la conservation d'énergie :

L'équation d'énergie pour un écoulement adiabatique est [10] :

$$dH + VdV = 0 \quad (2.4)$$

D'autre part: $dH = C_p dT + (h+v)dP$ (2.5)

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP \quad (2.6)$$

Avec:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = h + V \quad (2.7)$$

$$h = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad (2.8)$$

$$\text{Alors : } \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = V - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad (2.9)$$

$$\text{On a : } \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P = -1 \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{-1}{\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P} \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v}{\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T} \quad (2.12)$$

L'équation de Berthelot: $P = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{(v-b)} - \frac{a}{T^2 v^2}, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = \frac{-RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{Tv^3},$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -\frac{-RT^2 v^3 (v-b) + av(v-b)^2}{2aT(v-b)^2 - RT^3 v^3} \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = v - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = v \cdot \left(\frac{3a(v-b)^2 - RT^2 v^2 b}{2a(v-b)^2 - RT^2 v^3}\right) \quad (2.14)$$

Posons: $C = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T \Rightarrow C = v \cdot \left(\frac{3a(v-b)^2 - RT^2 v^2 b}{2a(v-b)^2 - RT^2 v^3}\right)$ (2.15)

Connaissons: $v = \frac{1}{\rho}$ (2.16)

Remplaçons l'équation (2.16) dans l'équation (2.15) on obtient:

$$C = \left(\frac{3ab^2 \rho^2 - 6ab\rho - RT^2 b + 3a}{2ab^2 \rho^3 - 4ab\rho^2 + 2a\rho - RT^2}\right) \quad (2.17)$$

2.3.2. Détermination la différentielle dP en fonction de dp lorsque la température T sera constante :

La relation (2.6) s'écrit : $dH = C_p dT + C dP$ (2.18)

Avec: $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$, et $C = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T$

$$P = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a\rho^2}{T}$$

La différentielle dP en fonction de dp lorsque la température T est constante donne :

$$dP = d\left(\frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a\rho^2}{T}\right)_{T=cte} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a\rho^2}{T}\right)_{T=cte} d\rho$$

$$dP = \left(\frac{RT^2 - 2a\rho(1-\rho b)^2}{T(1-\rho b)^2}\right) d\rho \quad (2.19)$$

Remplaçons l'équation (2.19) dans l'équation (2.18), on obtient:

$$dH = C_p dT + C dP = C_p dT + \underbrace{\left(C \cdot \left(\frac{RT^2 - 2a\rho(1-\rho b)^2}{T(1-\rho b)^2}\right)\right)}_{C_T} d\rho$$

Alors:

$$C_T(T, \rho) = C \cdot \left(\frac{RT^2 - 2a\rho(1-\rho b)^2}{T(1-\rho b)^2}\right) = \left(\frac{3ab^2\rho^2 - 6ab\rho - RT^2 b + 3a}{2T\rho b - Tb^2\rho^2 - T}\right) \quad (2.20)$$

Donc:

$$dH = C_p(T, \rho) dT + C_T(T, \rho) d\rho \quad (2.21)$$

L'identification entre les relations (2.4) et (2.21) donne:

$$VdV = -dH = -C_p(T, \rho) dT - C_T(T, \rho) d\rho \quad (2.22)$$

2.3.3. Détermination la différentielle dp/ρ :

$$\text{Connaissons que la célérité du son : } C_s^2 = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{S=cte} \quad (2.23)$$

$$:VdV + C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.24)$$

$$[-C_p(T, \rho) dT - C_T(T, \rho) d\rho] + C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.25)$$

Alors:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_p(T, \rho)}{C_s^2} dT + \frac{C_T(T, \rho)}{C_s^2} d\rho \quad (2.26)$$

2.3.4. Détermination du nombre de Mach :

Dans le but de déterminer la fonction du nombre de Mach il est nécessaire de trouver la vitesse de l'écoulement ainsi la célérité du son. Ces deux quantités peuvent être trouvées en utilisant l'équation d'énergie pour un écoulement adiabatique [10] :

$$du + d(pv) + VdV = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + d\left(\frac{p}{\rho}\right) + VdV = 0 \quad (2.27)$$

2.3.5. Calcul de la vitesse :

Substituant les équations de Berthelot, dans l'équation (2.27) et on intègre de l'état génératrice à un état statique (température et la masse volumique donné on trouve:

$$VdV = -\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT - d\left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (2.28)$$

$$\text{Avec : } d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\left(\frac{d\rho}{\rho^2}\right)$$

$$\int VdV = \int_{\rho_0, T_0}^{\rho, T} \frac{2a}{T} d\rho - \int_{\rho_0, T_0}^{\rho, T} c_v dT - \int_{\rho_0, T_0}^{\rho, T} d\left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (2.29)$$

Finalement la fonction de vitesse sera :

$$V^2(T, \rho) = 2 \left\{ c_{v,sp} (T_0 - T) + R\theta \left[\frac{1}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}\right)} - \frac{1}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T_0}\right)}\right)} \right] + 4a \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) \right\} \quad (2.30)$$

2.3.5.1. Détermination de la célérité du son :

$$a^2 = d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \frac{dT}{d\rho} \quad (2.31)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{RT}{(1 - b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{T} \quad (2.32)$$

Et on a :

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{1}{c_v} \left(\frac{a}{T} + \frac{RT}{\rho(1 - b\rho)} \right) \quad (2.33)$$

L'expression résultante de la célérité du son est :

$$a^2(T, \rho) = \frac{RT}{(1-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{T} + \frac{\rho^2 T \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)^2}{c_{v_{gp}} \cdot \left[1 + (\gamma_{gp} - 1) \left\{ \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)}}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \right\} \right]} \quad (2.34)$$

2.3.5.2. Le nombre de Mach :

$$M^2(T, \rho) = 2 \frac{\left(\frac{1}{(\gamma_i - 1)} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) + \left(\frac{\theta}{T} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)}} - \frac{1}{1 - e^{\left(\frac{\theta}{T_0} \right)}} \right) + \frac{1}{RT} \left(4a \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) \right) \right)}{\left(\frac{1}{(\gamma_i - 1)} \left(\frac{1}{1-b\rho} + \frac{a\rho}{RT^2} \right)^2 + \frac{1}{(1-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{RT^2} \right) \left[1 + (\gamma_i - 1) \left\{ \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)}}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \right\} \right]} \quad \dots (2.35)$$

Si on considère que θ , b , et a sont nuls ; on obtient l'équation suivante :

$$M^2 = 2 \left(\left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) \left(\frac{1}{\gamma_{gp} - 1} \right) \right) \quad (2.36)$$

Dans ce cas, le rapport des températures devient :

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \quad (2.37)$$

Ces relations (2.36) et (2.37) sont les équations qui caractérisent exactement le nombre de mach (cas de détente), et le rapport des températures pour un gaz parfait [8] et [12].

Donc l'équation (2.35) pour un gaz réel, représente la forme générale du nombre de Mach (calorifiquement et thermiquement imparfait).

2.3.6. La chaleur spécifique à volume constante $c_v(T, \rho)$

$$c_v(T, \rho) = c_{v_{gp}} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}\right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \right\} \quad (2.38)$$

On remarque clairement que la chaleur spécifique à volume constante est indépendante de l'effet de covolume b , et que les paramètres qui l'influent sont seulement les forces d'attraction intermoléculaires et le comportement vibratoire.

Si c'est deux paramètres sont nulles il est aussi clair qu'en revenant à l'état d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait c'est-à-dire

$$c_v(T, \rho) = c_{v(gp)}$$

Si les forces d'attraction intermoléculaires sont nulles ($a=0$) ça va nous revenir au cas d'un gaz thermiquement parfait mais calorifiquement imparfait où la chaleur spécifique à volume constante ne dépend que de la température et le paramètre de comportement vibratoire θ [17] et [18](ce qu'on appelle le modèle HT ou bien gaz parfait à haute température) :

$$c_v(T, \rho) = c_{v(gp)} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}}\right)^2} \right\} \quad (2.39)$$

2.3.7. La chaleur spécifique à pression constante $c_p(T, \rho)$

La chaleur spécifique à pression constante est par définition donnée par la relation suivante [5]:

$$c_p(T, \rho) = c_v(T, \rho) - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T} \quad (2.40)$$

On rappelle l'équation de Berthelot en termes de volume :

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{Tv^2}$$

D'où :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{Tv^3} = -\frac{RT\rho^2}{(1-b\rho)^2} + \frac{2a\rho^3}{T} \quad (2.41)$$

$$c_p(T, \rho) = c_{p(gp)} \left[1 + \frac{\gamma_{(gp)} - 1}{\gamma_{(gp)}} \left\{ \left(\frac{\theta}{T^2}\right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}}\right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \left[1 + \frac{\left(\frac{2-b\rho}{1-b\rho} + \frac{a\rho}{2RT^2}\right)}{\frac{1}{(1-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{RT^2}} \right] \right\} \right] \quad (2.42)$$

Si on considère que θ , b , et a sont nuls ; en revenant à l'état d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait :

$$c_p(T, \rho) = c_{p(gp)}$$

Si on néglige l'effet de l'imperfection des gaz réel (b et a nuls) on obtient une relation qui représente le cas d'un gaz thermiquement parfait mais calorifiquement imparfait:

$$c_p(T, \rho) = c_{p(gp)} \left(1 + \frac{\gamma_{(gp)} - 1}{\gamma_{(gp)}} \left(\left(\frac{\theta}{T^2}\right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}}\right)^2} \right) \right) \quad (2.43)$$

Où la chaleur spécifique à pression constante ne dépend que de la température et le paramètre de comportement vibratoire θ [17] (modèle gaz parfait à haute température).

2.4 Rapport des chaleurs spécifiques γ

Notre domaine d'étude est limité dans le régime supersonique pour un nombre de Mach $M \in [1.0, 6.0]$. Le rapport des chaleurs spécifiques donne la relation suivante:

$$\gamma(T, \rho) = \frac{c_p(T, \rho)}{c_v(T, \rho)} \quad (2.44)$$

$$\gamma(T, \rho) = \gamma_{(gp)} \left[\frac{1 + \frac{\gamma_{(gp)} - 1}{\gamma_{(gp)}} \left\{ \left(\frac{\theta}{T^2} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}}\right)^2} + \frac{2\dot{a}\rho}{RT^2} \left[1 + \frac{\left(\frac{2 - b\rho}{1 - b\rho} + \frac{\dot{a}\rho}{2RT^2} \right)}{\frac{1}{(1 - b\rho)^2} - \frac{2\dot{a}\rho}{RT^2}} \right] \right\}}{1 + (\gamma_{(gp)} - 1) \left(\frac{\theta}{T^2} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}}\right)^2} + \frac{2\dot{a}\rho}{RT^2}} \right] \quad (2.45)$$

Cas de l'air : $\gamma_i = 1.402$, $R = 287.0 \text{ [J/Kg K]}$, $C_{V_i} = \frac{R}{\gamma_i - 1}$, $a = 117.2666 \text{ [Pas. m}^6\text{]}$

$b = 1.07334 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$, $\theta = 3056 \text{ K}$

2.5 Calcul numérique des rapports thermodynamiques :

Pour calculer les rapports il faut d'abord trouver les paramètres thermodynamiques d'état dans une section donnée (T, P, ρ) , et les diviser par les paramètres générateurs (T_0, ρ_0, P_0) respectivement. La détermination des paramètres (T, P, ρ) sera possible en résolvant le système d'équation algébrique non linéaire formé par ces équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{V_i} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln \frac{\rho_0(1-b\rho)}{\rho(1-b\rho_0)} - 2\dot{a} \left(\frac{\rho}{T^2} - \frac{\rho_0}{T_0^2} \right) + R \ln \left(\frac{e^{\frac{\theta}{T_0}} - 1}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1} \right) + R \left(\frac{\theta}{T} \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1} - \frac{\theta}{T_0} \frac{e^{\frac{\theta}{T_0}}}{e^{\frac{\theta}{T_0}} - 1} \right) = 0 \\ \\ M^2 - 2 \left(\frac{\frac{1}{(\gamma_{sp} - 1)} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) + \left(\frac{\theta}{T} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{\frac{\theta}{T}}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{\theta}{T_0}}} \right) + \frac{1}{RT} \left(4\dot{a} \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + \left(\frac{p_0 - p}{\rho_0 - \rho} \right) \right)}{(\gamma_{sp} - 1) \left(\frac{1}{1 - b\rho} + \frac{\dot{a}\rho}{RT^2} \right)^2} + \frac{1}{(1 - b\rho)^2} - \frac{2\dot{a}\rho}{RT^2} \right. \\ \left. \left(1 + (\gamma_{sp} - 1) \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2\dot{a}\rho}{RT^2} \right) \right) = 0 \\ \\ p - \frac{\rho RT}{(1 - b\rho)} - \frac{\dot{a}\rho^2}{T} = 0 \end{array} \right. \quad \text{.....(2.46)}$$

Ces trois équations composent un système d'équation fortement non linéaire où la solution analytique est impossible à trouver. Les phénomènes non linéaires sont extrêmement courants en pratique. Ils sont sans doute plus fréquents que les phénomènes linéaires. Dans ce cas, nous examinons les systèmes non linéaires et nous montrons comment les résoudre à l'aide d'une suite de problèmes linéaires, auxquels on peut appliquer diverses techniques.

Le problème consiste à trouver le vecteur $[T, \rho, P]$ vérifiant les 3 équations non linéaires suivantes:

$$\begin{cases} f_E(T, \rho, P) = 0 \\ f_M(T, \rho, P) = 0 \\ f_B(T, \rho, P) = 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Où f_E , f_M et f_B sont des fonctions de trois variables que nous supposons différentiables et réfèrent respectivement aux équations (2.46).

Contrairement aux systèmes linéaires, il n'y a pas de condition simple associée aux systèmes non linéaires qui permette d'assurer l'existence et l'unicité de la solution. Le plus souvent, il existe plusieurs solutions possibles et seul le contexte indique laquelle est la bonne [6].

Les méthodes de résolution des systèmes non linéaires sont nombreuses. Notamment, nous ne présentons que la méthode la plus importante et la plus utilisée en pratique, soit la méthode de Newton [6] et [9].

2.5.1. La méthode de Newton :

L'application de cette méthode à un système de deux équations non linéaires est suffisante pour illustrer le cas général [9].

Considérons donc le système:

$$\begin{cases} f_E(T, \rho) = 0 \\ f_M(T, \rho) = 0 \end{cases}$$

Soit $[T_i, \rho_i]$, une approximation initiale de la solution de ce système.

Cette approximation initiale, est cruciale et doit toujours être choisie avec soin. Le but de ce qui suit est de déterminer les pas $[dT, d\rho]$ à $[T_i, \rho_i]$ de telle sorte que:

$$\begin{cases} f_E(T_i + dT, \rho_i + d\rho) = 0 \\ f_M(T_i + dT, \rho_i + d\rho) = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Pour déterminer $[dT, d\rho]$ il suffit maintenant de faire un développement de Taylor en deux variables pour chacune des deux fonctions [9]:

$$\begin{cases} 0 = f_E(T_i, \rho_i) + \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho + \dots \\ 0 = f_M(T_i, \rho_i) + \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho + \dots \end{cases} \quad (2.49)$$

Dans les relations précédentes, les pointillés désignent des termes d'ordre supérieur ou égal à deux et faisant intervenir les dérivées partielles d'ordre correspondant.

Pour déterminer $[dT, d\rho]$ il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur et d'écrire:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho = -f_E(T_i, \rho_i) \\ \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho = -f_M(T_i, \rho_i) \end{cases} \quad (2.50)$$

Où encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \rho_i) & \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i, \rho_i) \\ \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \rho_i) & \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i, \rho_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dT \\ d\rho \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_E(T_i, \rho_i) \\ f_M(T_i, \rho_i) \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Ce système linéaire s'écrit, également sous une forme plus compacte [6] et [16]:

$$J(T_i, \rho_i)\Delta\vec{k} = -\vec{R}(T_i, \rho_i) \quad (2.52)$$

Où $J(T_i, \rho_i)$ désigne la matrice des dérivées partielles ou matrice jacobienne évaluée au point (T_i, ρ_i) , où $\Delta\vec{k}$ est le vecteur des corrections relatives à chaque variable ($\Delta\vec{k} = [\Delta T, \Delta\rho]$) et où $-\vec{R}(T_i, \rho_i)$ est le vecteur résidu évalué en (T_i, ρ_i) . Le déterminant de la matrice jacobienne est appelé le jacobien.

Le jacobien doit bien entendu être différent de 0 pour que la matrice jacobienne soit

$$\text{inversible. On pose ensuite: } \begin{cases} T_{i+1} = T_i + \Delta T \\ \rho_{i+1} = \rho_i + \Delta\rho \end{cases} \quad (2.53)$$

Qui est la nouvelle approximation de la solution du système non linéaire. On cherchera par la suite à corriger (T_{i+1}, ρ_{i+1}) d'une nouvelle quantité $\Delta\vec{k}$, et ce jusqu'à la convergence. Pour en arriver à l'algorithme général suivant :

2.5.2. Algorithme de la méthode de Newton appliquée aux systèmes

1. Étant donné ε , un critère d'arrêt.
2. Étant donné N, le nombre maximal d'itérations.
3. Étant donné $\vec{k} = [T_i, \rho_i]$ une approximation initiale de la solution du système
4. Résoudre le système linéaire: $J(T_i, \rho_i)\Delta\vec{k} = -\vec{R}[T_i, \rho_i]$ et poser:

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i + \Delta T \\ \rho_{i+1} = \rho_i + \Delta \rho \end{cases}$$

$$5. \text{ Si } \|T_i - T_{i+1}\| + \|\rho_i - \rho_{i+1}\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\vec{R}[T_i, \rho_i]\| \leq \varepsilon$$

- convergence atteinte
 - écrire la solution
 - arrêt
6. i reçois $i+1$ et retour à l'étape 4
7. Si le nombre maximal d'itérations N est atteint:
- convergence non atteinte en N itérations.
 - arrêt.

2.5.3. Le choix de la solution initial :

La convergence de la méthode de Newton dépend directement de l'approximation initial (T_i, ρ_i) de la solution [9], un mauvais choix de (T_i, ρ_i) causera une divergence, pour cela on va initialiser la solution en utilisant les paramètres thermodynamiques d'un gaz parfait par la suite on verra si ce choix est justifié.

Notre étude est focalisé sur la détente isentropique unidimensionnelle, l'écoulement dans ce cas est considéré comme supersonique ($1 < M < 6$). On va varier le nombre de mach définie dans l'équation f_M dans ce domaine est pour chaque valeur de M on calcule les paramètres initiaux (celles du gaz parfait) on appliquant les lois suivantes [8] et [13]:

$$\frac{T_i}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M^2 \right]^{-1}, \quad \frac{\rho_i}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{-1}{\gamma_{gp} - 1}}, \quad \frac{P_i}{P_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{-\gamma_{gp}}{\gamma_{gp} - 1}} \quad (2.54)$$

2.6 Erreur entre le modèle du gaz réel et les modèles GP et HT :

Pour faire une comparaison entre ce modèle et les modèles du gaz parfait ou haute température, on rappelle les relations thermodynamiques isentropiques d'un gaz parfait ou bien les relations thermodynamiques correspond le modèle haute température, le tableau 2.1 illustre ces relations.

Tableau 2.1 : les équations thermodynamiques des modèles GP et HT.

Rapports	Gaz thermiquement et	Gaz thermiquement parfait et
----------	----------------------	------------------------------

	caloriquement Parfait GP $\gamma = 1.402$ M : variable Principale	caloriquement Imparfait HT $\gamma = \text{variable}$ T : variable Principale
Température $\frac{T}{T_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{-1}$	Résolution de l'équation / T : $M^2(T) \cdot a^2(T) - 2H(T) = 0$
Masse Volumique $\frac{\rho}{\rho_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{\frac{-1}{\gamma-1}}$	$e^{\int_{T_0}^T \left\{ \frac{C_p(T)}{\gamma(T) \cdot r \cdot T} \right\} dT}$
Pression $\frac{P}{P_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}$	$\frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{T}{T_0}$
Section $\frac{A}{A_*}$	$\frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma-1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$	$e^{\int_T^{T_*} \left\{ \frac{C_p(T)}{\gamma(T) \cdot r \cdot T - 2H(T)} \right\} dT}$
Débit $\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0}$	$\left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$	$\frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{a}{a_0} \cdot M \cdot \frac{A}{A_*}$
Vitesse du son a	$\sqrt{\gamma \cdot r \cdot T}$	$\sqrt{\gamma(T) \cdot r \cdot T}$
Enthalpie H	$C_p(T - T_0)$	$\int_{T_0}^T C_p(T - T_0)$
Nombre de Mach M	Variable principale	$\frac{\sqrt{2 \cdot H(T)}}{a(T)}$
Vitesse $\frac{V}{a_0}$	$M \sqrt{\frac{T}{T_0}}$	$M \sqrt{\frac{\gamma(T)}{\gamma(T_0)} \cdot \frac{T}{T_0}}$

Pour les gaz parfaits GP:

$$\gamma = 1.402$$

$$C_p = 1001.28932 \text{ J/(Kg K)}$$

Pour les gaz a haute température HT:

$$C_p(T) = a_1 + T(a_2 + T(a_3 + T(a_4 + T(a_5 + T(a_6 + T(a_7 + T(a_8 + T(a_9 + T(a_{10})))))))))) \quad (2.55)$$

Les coefficients a_i ($i=1, 2 \dots 10$) sont présentées dans le tableau suivant:

Tableau 2.2 : Les coefficients polynômiaux du Cp.

l	a_i	i	a_i
1	1001.1058	6	$3.067736 \cdot 10^{-12}$
2	$4.0661289 \cdot 10^{-2}$	7	$-1.3509355 \cdot 10^{-15}$
3	$-6.3376997 \cdot 10^{-4}$	8	$3.472262 \cdot 10^{-19}$
4	$2.7474759 \cdot 10^{-6}$	9	$-4.8467531 \cdot 10^{-23}$
5	$-4.0338459 \cdot 10^{-9}$	10	$2.8411878 \cdot 10^{-27}$

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_p(T) - r} \quad (2.56)$$

2.6.1. Erreur du modèle gaz parfait :

Le modèle mathématique d'un gaz parfait est développé sur la base de CP la chaleur spécifique et le rapport γ constantes, ce qui donne des résultats acceptables pour des faibles températures et pressions. Selon cette étude, nous pouvons remarquer une différence sur les résultats donnés entre le modèle du gaz parfait et notre modèle. L'erreur donnée par le modèle PG par rapport à notre modèle RG (gaz réel) peut être calculé pour chaque paramètre. Donc, pour chaque valeur (P_0 , T_0 , M), l'erreur de ε peut être évaluée par la relation suivante:

$$\varepsilon_{Parameter}(\%) = \left| 1 - \frac{Parameter_{PG}(P_0, T_0, M)}{Parameter_{RG}(P_0, T_0, M)} \right| \times 100 \quad (2.57)$$

pour l'application aérodynamique, l'erreur doit être inférieure à 5%.

2.6.2. Erreur du modèle haute température :

Les résultats obtenus par le modèle a haute température HT, sont valables à sous l'hypothèse de l'imperfection calorique du gaz, c.-à-d., les chaleurs spécifiques C_p et C_v varient avec la température, et qui donne une erreur considérable à haute pression, par contre, notre modèle RG basé sur les hypothèses de un gaz thermiquement et caloriquement imparfait, donc, des nouvelles expressions d'un gaz réel sont développées, variée avec la température et la masse volumique, corrigent le modèle HT, surtout à haute pression et donne une erreur considérable à haute pression. Alors, pour chaque valeur (P_0 , T_0 , M), l'erreur de ε peut être évaluée par la relation suivante:

$$\varepsilon_{Parameter}(\%) = \left| 1 - \frac{Parameter_{HT}(P_0, T_0, M)}{Parameter_{RG}(P_0, T_0, M)} \right| \times 100 \quad (2.58)$$

2.7. Conclusion :

Dans ce chapitre, on présente d'une manière détaillée les relations thermodynamiques et géométriques lorsque l'on tient compte de la pression génératrice, nous présentons aussi la technique numérique de newton pour résoudre un système d'équation non linéaire formé par trois équations. Ces paramètres thermodynamiques et géométriques sera employées pour élaborer et développer une nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer.

Chapitre 3

Développement d'une nouvelle forme de la fonction de PRANTDL MEYER

3.1. Introduction:

La fonction de Prandtl Meyer joue un rôle très important dans le calcul des écoulements supersoniques. Les théories et les expériences classiques ont prouvé que les propriétés d'un gaz réel, d'abord il pour montrer des caractéristiques à la différence de ceux d'un gaz parfait. Ces propriétés peuvent être classifiées en tant qu'imperfections thermiques et caloriques. Les imperfections thermiques sous forme de forces intermoléculaires et de taille moléculaire sont sensiblement manifestes à de basses températures et à pressions. Les changements des capacités de chaleur deviennent une imperfection calorique importante relativement à températures élevées.

Dans ce chapitre on va étudier l'effet de la pression génératrice sur la fonction de Prandtl Meyer, Le travail consiste essentiellement à développer des nouvelles relations et des expressions concernant l'écoulement supersonique en utilisant les hypothèses d'équation d'état des Berthelot qui explique des effets de taille moléculaire et de force intermoléculaire, et que des changements des capacités de chaleur. Des expressions sont développées pour analyser des écoulements supersoniques pour un gaz caloriquement et thermiquement imparfait. Et pour développer une nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer basée sur ces hypothèses.

Les résultats obtenus d'un écoulement supersoniques des gaz parfait sont valables sous la base de hypothèse d'un gaz caloriquement et thermiquement parfait c'est à dire, les chaleurs spécifiques CP et CV sont constantes et ne dépendent pas de la température, basé sur l'utilisation de l'équation d'état d'un gaz parfait, et les résultats obtenus par le modèle haute température sont valables sous la base de hypothèse d'un gaz caloriquement imparfait, c'est à dire, les chaleurs spécifiques CP et CV sont variables avec la température, mais notre modèle basé sur l'hypothèses d'un gaz caloriquement et thermiquement imparfait, c'est-à-dire, des nouvelles expressions sont développé, variées avec la température et la masse volumique, et basées sur l'hypothèse d'un gaz réel.

Les résultats obtenus par le modèle a haute température HT, sont valables à sous l'hypothèse de l'imperfection calorique du gaz, c.-à-d., les chaleurs spécifiques C_p et C_v varient avec la température, et qui donne une erreur considérable à haute pression, par contre, notre modèle RG basé sur les hypothèses de un gaz

thermiquement et calorifiquement imparfait, donc, des nouvelles expressions d'un gaz réel sont développées, variée avec la température et la masse volumique, corrigent le modèle HT, surtout à haute pression.

L'application est pour l'air dans le domaine supersonique, inférieure au seuil de dissociation des molécules, qui sera applicable si le nombre de Mach reste inférieur à 6.00 environ.

3.2. Détente de Prandtl-Meyer :

La détente de Prandtl-Meyer est un écoulement supersonique d'un fluide (l'air pour notre cas) sur une plaque plane terminée par une rampe déviée vers le bas comme l'indique la figure 3.1 [20].

La déviation de cet écoulement génère des ondes de détentes (lignes de Mach) qui ont pour effet l'augmentation du nombre de Mach et la diminution des caractéristiques du fluide (masse volumique, pression et température).

Dans le cas où la déviation de la rampe est vers le haut les ondes générées sont des ondes de compression et les effets obtenus sont contraires à ceux mentionnés précédemment [20]. L'importance de ces écoulements apparaît dans l'étude aérodynamique autour des profils.

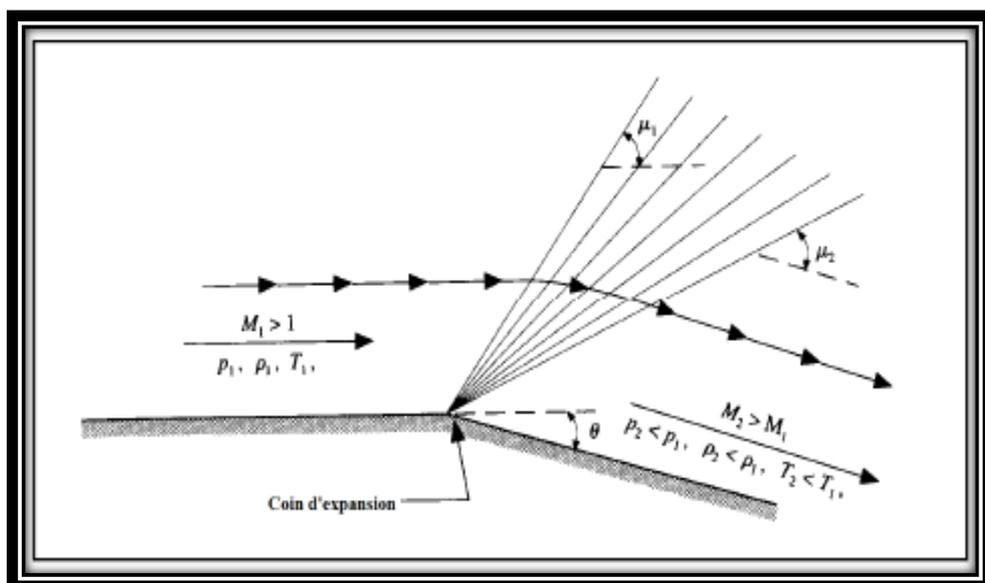


Figure3.1 : Schéma de la détente de Prandtl-Meyer

3.3. Le modèle GP (calorifiquement et thermiquement parfait) :

Les résultats obtenus d'un écoulement supersoniques d'un gaz parfait présentés dans les références [4] et [22] sont valables sous la base de l'hypothèse d'un gaz calorifiquement et thermiquement parfait, c'est à dire, les chaleurs spécifiques C_p et C_v sont constantes et ne dépendent pas de la température, qui n'est pas valable dans le cas réel lorsque la température et la pression croient.

Pour faire une comparaison entre les cas GR et GP, on rappelle la fonction de Prandtl Meyer donnée par la théorie d'un gaz parfait [4] et [22]:

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (M^2 - 1) \right]^{\frac{1}{2}} - \arctg (M^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

La fonction de Prandtl-Meyer (3.1) est reliée explicitement avec le nombre Mach, qui est la variable principale pour le gaz parfait, au contraire pour le modèle HT, où la variable principale est la température T et notre modèle GR, où on a deux variables principales qui sont la température T et la masse volumique ρ .

3.4. Le modèle HT (calorifiquement imparfait et thermiquement parfait) :

Le modèle des gaz parfait à haute température (dite HT) est concentré sur une hypothèse qui dite que lorsque la température génératrice T_0 de la chambre de combustion, d'un gaz parfait augmente, la chaleur spécifique C_p et le rapport γ ne restent plus constants et commencent à varier avec la température T_0 . Le gaz reste parfait, sauf qu'il sera nommé en plus gaz calorifiquement imparfait [21].

La fonction de Prandtl Meyer pour ce modèle est donnée par [19]:

$$v = \int_{T_s}^{T_*} \left(\frac{C_p(T)}{2G(T)} \sqrt{2G(T) / a^2(T) - 1} \right) dT \quad (3.2)$$

Avec :

$$2G(T) = V^2 \quad (3.3)$$

Donc la substitution de l'équation (3.3) dans l'équation (3.2) donne :

$$v = \int_{T_s}^{T_*} \left(\frac{C_p(T)}{V^2} \sqrt{V^2 / a^2(T) - 1} \right) dT \quad (3.4)$$

Mais : $V^2 / a^2(T) = M^2$

Alors la fonction de Prandtl Meyer pour le modèle HT est définie comme :

$$v = \int_{T_s}^{T_*} \frac{C_p(T)}{V^2} \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.5)$$

3.5. Détermination de la fonction de Prandtl Meyer pour un GR :

On cherche à trouver une expression générale pour cette fonction en exploitant l'équation d'état de Berthelot qui porte des corrections importante par l'intervention des termes de covolume et la force d'attraction intermoléculaire sans oublier l'effet de vibration qui rend le gaz calorifiquement imparfait.

La nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer sera le cas général et les autres expressions de cette fonction pour le modèle de gaz parfait (GP) et le modèle des gaz parfait à haute température (HT) deviennent des cas particuliers de notre modèle (GR).

3.5.1. Formulations mathématiques :

La déviation d'un écoulement supersonique peut engendrer une expansion ou une compression. Lorsque l'intensité du choc $\Delta P/P$ tend vers zéro, fournissent l'outil nécessaire à l'étude de ce phénomène [4]. En effet, l'onde de choc oblique devient une onde de Mach. La vitesse normale à l'onde est la vitesse du son. Une petite déviation d'écoulement ($d\nu$) en aval de l'onde est liée à une différence de vitesse (dV) par la relation suivante [2], [8] et [13] on a :

$$d\nu = -\cot g(\mu) \frac{dV}{V} \quad (3.6)$$

μ : Représente l'angle de mach

$d\nu$: Représente une déflexion élémentaire [4].

Notons que l'angle $d\nu$ est considéré positif quand l'écoulement s'éloigne de la direction normale à l'onde (onde de compression) et négatif quand l'écoulement rapproche de la direction normale à l'onde (onde de détente) selon les conventions de la dynamique des fluides.

En insérant la relation entre l'angle de Mach μ et le nombre de Mach M [13] dans l'équation (3.6), on obtient:

$$d\nu = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (3.7)$$

Tel que : ν est définie comme étant la fonction de Prandtl Meyer.

Pour traiter le cas d'un angle fini ν , il faut intégrer la relation ci-dessus, ce qui suppose que l'on puisse exprimer $\frac{dV}{V}$ en fonction de dM et de M .

Connaissons :

$$-d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (3.8)$$

D'après la relation (2.26), on peut écrire :

$$VdV = -C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.9)$$

Divisons la relation (3.9) par V^2 on obtient :

$$\frac{VdV}{V^2} = -\frac{C_s^2}{V^2} \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{1}{M^2} \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.10)$$

Remplaçons l'équation (3.10) dans l'équation (3.8) on obtient:

$$-d\theta = -\frac{1}{M^2} \sqrt{M^2 - 1} \left(\frac{d\rho}{\rho} \right) \quad (3.11)$$

Remplaçons l'équation (2.28) dans l'équation (3.11) on obtient:

$$-d\theta = -\frac{1}{M^2(T, \rho)} \sqrt{M^2(T, \rho) - 1} \left(\frac{C_p(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} dT + \frac{C_T(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} d\rho \right) \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow d\theta = \left(\frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) \right) dT + \left(\frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \right) d\rho \quad (3.13)$$

Alors :

La valeur de la fonction de Prandtl Meyer à un état quelconque supersonique donné par $(T, P, \rho, M,)$ est :

$$d\nu = -d\theta \quad (3.14)$$

$$dv = - \left(\frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) \right) dT - \left(\frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \right) d\rho \quad (3.15)$$

Substituant la relation entre l'état critique (*) ($T_*, \rho_*, P_*, M_* = 1, v_* = 0$) et un état supersonique (T, ρ, P, M, v) et on intègre :

$$\int_{v_*}^v dv = v - v_* = v$$

Finalement la fonction de Prandtl Meyer sera :

$$v(T, \rho) = \int_T^{T_*} \left(\frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) \right)_{\rho=\rho_1} dT + \int_{\rho}^{\rho_*} \left(\frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \right)_{T=T_1} d\rho \quad (3.16)$$

Ou bien :

$$v(T, \rho) = \int_T^{T_*} Fv_T(T, \rho) \Big|_{\rho} dT + \int_{\rho}^{\rho_*} Fv_{\rho}(T, \rho) \Big|_T d\rho \quad (3.17)$$

Avec :

$$Fv_T(T, \rho) = \frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho)$$

(3.18)

$$Fv_{\rho}(T, \rho) = \frac{\sqrt{M^2(T, \rho) - 1}}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \quad (3.19)$$

On remarque clairement que la fonction de Prandtl-Meyer est reliée directement avec la température et la masse volumique.

Aussi il faut noter que cette fonction de Prandtl Meyer est strictement positive parce que notre étude est consacrée spécialement à une détente supersonique où les paramètres supersoniques (T, ρ) sont toujours inférieurs aux paramètres critiques du col (T_*, ρ_*).

3.5.2. Détermination la fonction de Prandtl Meyer d'un gaz parfait a partir de la nouvelle fonction :

Dans le but de déterminer et confirmer que la relation de Prandtl Meyer pour un gaz parfait donnée par l'équation (3.1), est un cas particulier de l'équation (3.16) qu'on a trouvée en exploitant notre modèle, il faut éliminer les paramètres d'imperfection thermique de gaz (b et a) dans l'équation d'état de Berthelot, ainsi le paramètre d'imperfection calorifique qui est la température caractérise le comportement vibratoire des molécules (θ).

Pour montrer que l'équation (3.1) est identique avec l'équation (3.16) si on remplace les paramètres (b , a et θ) par des zéros, il est mieux de comparer ces deux équation en forme différentielle afin de simplifier un peu les calculs.

L'équation (3.1) sous forme différentielle s'écrit [20]:

$$dv = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (3.20)$$

Le nombre de Mach est défini comme étant le rapport de la vitesse par rapport à la célérité du son :

$$M = \frac{V}{a} \quad (3.21)$$

La dérivée logarithmique de l'équation (3.21) nous donne :

$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} - \frac{da}{a} \quad (3.22)$$

On souhaite maintenant d'exprimer $\frac{da}{a}$ en fonction de dM et M :

On utilise la relation qui donne la célérité du son pour un gaz parfait [7] :

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (3.23)$$

Tant que R et γ sont considérés constantes dans le cas d'un gaz parfait, alors on peut utiliser la célérité du son génératrice et écrire :

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \frac{\gamma RT}{\gamma RT_0} = \frac{T}{T_0} \quad (3.24)$$

En exprimant le rapport de température en fonction de nombre de Mach pour un gaz parfait [13] on trouve :

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \quad (3.25)$$

Posons pour simplifier la démarche :

$$f(M) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)$$

Alors l'équation (3.25) s'écrit :

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \frac{1}{f(M)} \quad (3.26)$$

La dérivée logarithmique de l'équation (3.26) nous permet d'écrire :

$$\frac{da}{a} = -\frac{1}{2} \frac{f'(M)}{f(M)} dM \quad (3.27)$$

Remplaçant $f(M)$ et sa dérivée par ces valeurs on obtient :

$$\frac{da}{a} = -\frac{1}{2} \frac{(\gamma-1)M}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} dM \quad (3.28)$$

La substitution de l'équation (3.28) dans l'équation (3.22) donne :

$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} + \frac{1}{2} \frac{(\gamma-1)M}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} dM \quad (3.29)$$

On peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \frac{dM}{M} - \frac{(\gamma-1)M^2}{2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \frac{dM}{M} \\ \frac{dV}{V} &= \frac{dM}{M} \left(\frac{2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) - (\gamma-1)M^2}{2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \right) = \frac{dM}{M} \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Si on remplace l'équation (3.29) et l'équation (3.30) dans l'équation (3.20) on trouve :

$$dv = \left(\frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right) \left(\frac{dV}{V} + \frac{(\gamma-1)M^2}{2} \frac{dV}{V} \right) \quad (3.31)$$

Si on prend $\frac{dV}{V}$ comme facteur commun et simplifie encore l'équation (3.31):

$$dv = \left(\frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right) \left(1 + \frac{(\gamma-1)M^2}{2} \right) \frac{dV}{V} = \sqrt{M^2-1} \frac{dV}{V} \quad (3.32)$$

L'équation de conservation de l'énergie sous forme différentielle [4] s'écrit:

$$C_p dT + V dV = 0$$

Alors :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{C_p dT}{V^2} \quad (3.33)$$

Substituant l'équation (3.33) dans l'équation (3.32), ça donne :

$$dv = -\frac{C_p dT}{V^2} \sqrt{M^2 - 1}$$

$$v = \int_{T_s}^{T_s} \frac{C_p dT}{V^2} \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.34)$$

Cette équation représente la fonction de Prandtl Meyer pour un gaz parfait. Il est très visible qu'elle est identique à l'équation (3.16) qui indique l'équation de notre modèle en considérant que ($\dot{a} = b = \theta = 0$), de là on peut assurer que l'équation de Prandtl Meyer donnée pour le modèle gaz parfait est un cas particulier de la fonction trouvée par l'exploitation de l'équation d'état de Berthelot qui garantit l'imperfection thermique des gaz d'une part, et l'existence de l'effet vibratoire des molécules de l'autre part.

3.5.3. Détermination la fonction de Prandtl Meyer d'un a haute température a partir de la nouvelle fonction :

Si on cherche à comparer cette équation (3.5) avec l'équation (3.16) qui exprime la fonction de Prandtl Meyer avec notre modèle, il faut juste remplacer les valeurs qui caractérisent l'imperfection du gaz (le covolume et les forces d'attraction intermoléculaires) par des valeurs nulles dans les termes constituant l'équation (3.16) tel que l'équation (2.35) du nombre de Mach, l'équation (2.30) de la vitesse, l'équation (2.42) de $C_p(T, \rho)$ et l'équation (2.20) qui exprime le $C_T(T, \rho)$, cela nous donne :

$$v = \int_{T_s}^{T_s} \frac{C_p(T, \rho)}{V^2} \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.35)$$

Cette équation (3.35) est identique avec l'équation (3.5) ce qui permet de conclure que la fonction de Prandtl Meyer déterminée par le modèle HT est un cas particulier de l'équation trouvée dans notre modèle GR.

3.6. Les Procédures du calcul numérique :

3.6.1. Détermination la masse volumique génératrice ρ_0 :

Après de fixer les valeurs de la pression et la température génératrices, il faut calculer la masse volumique génératrice ρ_0 , cette dernière calculée numériquement à partir de l'équation de Berthelot par la méthode de dichotomie, on peut choisir facilement un intervalle $[\rho_1, \rho_2]$ contenant la masse volumique ρ_0 et qui doit vérifier la condition $F(\rho_1) F(\rho_2) \leq 0$. On peut prendre $\rho_1=0 \text{ Kg/m}^3$ et $\rho_2 = \rho_1 + \text{pas}$. Une fois que cet intervalle est déterminé, on peut calculer ρ_0 avec une précision ε et un pas très petit. La valeur ρ_0 obtenue dépend de la précision ε et du pas. Le nombre d'itérations correspondant à la précision ε nécessaire pour déterminer la masse volumique génératrice ρ_0 est donné par :

$$K = \frac{1}{0.6931} \text{Log} \left(\frac{\text{Pas}}{\varepsilon} \right) + 1 \quad (3.36)$$

Si $\varepsilon = 10^{-16}$, et le pas = 10^{-4} , le nombre d'itérations K ne peut excéder 41 itérations.

3.6.2. Détermination les rapports thermodynamiques:

Avant de déterminer les rapports thermodynamiques, On calcule numériquement en premier lieu, les paramètres de l'état statique T, P, ρ , avec un nombre de Mach M connu, ces paramètres statique peuvent être trouvées on résoudre le système d'équation algébrique non linéaire formé par les équations (2.46), le calcul se fait en utilisant l'algorithme de newton avec une dérivation numérique de ces équations, une fois par rapport à la température, et deuxième fois par rapport à la masse volumique, en mettant les paramètres statique T, P, ρ du cas d'un gaz parfait comme un vecteur initial pour le démarrage du calcul, concernant notre algorithme, la dérivation se fait avec un pas = 10^{-4} , et le calcul se fait avec une précision $\varepsilon = 10^{-8}$, et le nombre d'itérations K ne peut excéder 100 itérations.

Une fois que ces paramètres statiques sont déterminés, le calcul de rapports thermodynamiques se fait avec une précision $\varepsilon = 10^{-16}$ en divisant ces paramètres statiques par nos paramètres génératrices pour trouver le rapport des températures

T/T_0 , le rapport des pressions P/P_0 , le rapport des masses volumiques ρ/ρ_0 , et le rapport des vitesses du son a/a_0 , par le remplacement dans l'équation (2.34) les paramètres de l'état génératrice T_0, P_0, ρ_0 pour trouver la célérité du son génératrice a_0 , et les paramètres de l'état statique T, P, ρ pour trouver la célérité du son a .

3.6.3. Détermination les rapports critiques au col :

L'état générateur est donné par le nombre de Mach nul ($M=0$). Alors, les paramètres critiques (T^*, P^*, ρ^* et a^*) correspondant à la température T_0 et la masse volumique ρ_0 , et au nombre de Mach $M=1$ (ce qui est le cas du col) peuvent être déterminés. Si on remplace $M=1$ dans la relation (2.34), et on résout le système d'équation algébrique non linéaire formé par les équations (2.46), par la méthode de Newton, en mettant les paramètres critiques T_c, P_c, ρ_c du cas d'un gaz parfait comme un vecteur initial pour le démarrage du calcul, concernant la méthode utilisée (méthode de Newton), la dérivation se fait numériquement d'équations (2.46) une fois par rapport à la température, et deuxième fois par rapport à la masse volumique, avec un pas $=10^{-4}$, et le calcul se fait avec une précision $\epsilon=10^{-8}$, et le nombre d'itérations K ne peut excéder 100 itérations.

3.6.4 Procédure de calcul par la méthode de Simpson:

La détermination de la valeur de Prandtl Meyer v_s correspondant au nombre de Mach M_s ($T=T_s$) et ($\rho=\rho_s$) demande les intégrations numériques des fonctions $F_{vT}(T, \rho)$ et $F_{v\rho}(T, \rho)$ dans les intervalles $[T_s, T^*]$ et $[\rho_s, \rho^*]$. Notons ici que les intégrations dépendent des paramètres T_0 et P_0 . Dans les figures 3.3 et 3.5, on a présenté la variation de ces fonctions pour voir une idée sur la forme exacte avant de prendre décision sur le choix de la quadrature d'intégration. On peut conclure que les quadratures d'intégrations à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vu la variation très rapide de la fonction $F_{vT}(T, \rho)$ aux extrémités de l'intervalle. Le traçage des fonctions est choisi pour $T_0=2000$ K et $M_s=6.00$ (extrême supersonique) pour une bonne présentation aux extrémités. La fonction $F_{vT}(T, \rho)$ présente une dérivée très grande au voisinage de la température T^* et infini à $T=T^*$ et moins au voisinage de T_s . Mais pour la deuxième fonction $F_{v\rho}(T, \rho)$ une simple intégrale avec pas constant comme Trapèze ou Simpson à pas constant donne un meilleur résultat.

Une condensation des nœuds est alors indispensable et nécessaire aux voisinages des températures T^* et T_S . Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature. La quadrature d'intégration choisie est celle de Simpson [7] et [14] pour le calcul numérique de l'intégrale donnée par (3.17). La forme de condensation optée dans notre calcul est présentée par la relation (3.37). Après avoir obtenu s , on peut facilement déterminer la distribution des valeurs de T par:

$$S_i = b_1 \cdot z_i + (1 - b_1) \cdot \left[1 - \frac{\tanh[b_2 \cdot (1 - z_i)]}{\tanh(b_2)} \right] \quad (3.37)$$

Avec:

$$z_i = \frac{i-1}{N-1} \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.38)$$

$$\frac{T - T_S}{T_* - T_S} = f(s) \quad (3.39)$$

La fonction $f(s)$ de la relation (3.39) est arbitraire. Pour notre calcul, on opte la forme $f(s) = s$. Alors, la distribution des nœuds se fait de la manière suivante:

$$T_i = S_i \cdot (T_* - T_S) + T_S \quad (3.40)$$

Si on prend des valeurs de b_1 proche de zéro (exemple $b_1=0.1$) et $b_2=2.0$, on peut condenser les nœuds vers l'extrémité gauche T_S de l'intervalle. Pour des valeurs de b_1 proche de 2.0 (exemple $b_1=1.9$) et $b_2=2.0$, on peut condenser les nœuds vers l'extrémité droite T^* . La fonction de condensation (3.37) permet uniquement de condenser les nœuds vers une seule extrémité gauche ou droite.

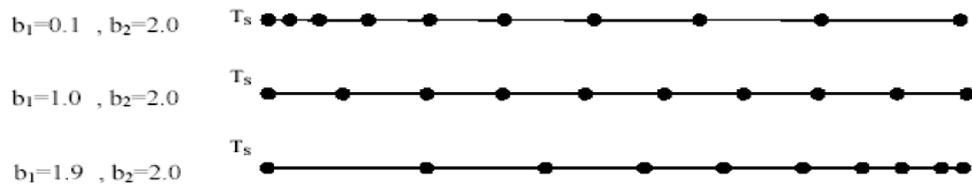


Figure 3.2 : Présentation de la condensation des nœuds

Comme notre fonction présente une variation très rapide aux deux extrémités, il est nécessaire de condenser les nœuds vers les deux aux mêmes temps. Il est alors nécessaire de diviser l'intervalle d'intégration $[T_S, T^*]$ en deux parties, (égales par exemple) $[T_S, T_M]$ et $[T_M, T^*]$ telle que:

$$T_M = \frac{T^* - T_S}{2} \quad (2.41)$$

Pour l'intervalle $[T_S, T_M]$ gauche, on prend b_1 proche de zéro (exemple $b_1=0,1$) et $b_2=2.00$ et pour l'intervalle $[T_M, T^*]$ de droite, on doit prendre des valeurs de b_1 proche de 2.00 (exemple $b_1=1.9$) et $b_2=2.00$ pour condenser respectivement les nœuds vers l'extrémité gauche T_S et droite T^* pour chaque intervalle. On divise encore le nombre N en deux parties. Alors, la subdivision de l'intervalle $[T_S, T^*]$ possède la forme présentée sur la figure 2.

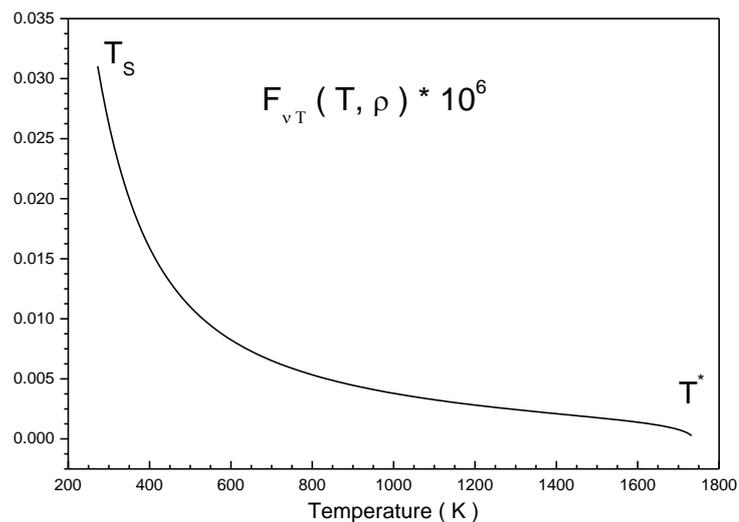


Figure 3.3. Variation de la fonction $F_{vT}(T, \rho)$ dans $[T_S, T^*]$.

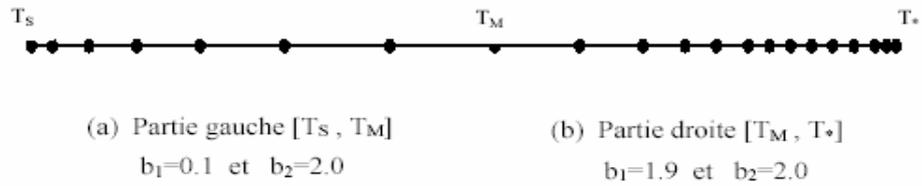


Figure 3.4 : Condensation des nœuds vers les deux extrémités de l'intervalle $[T_S, T^*]$.

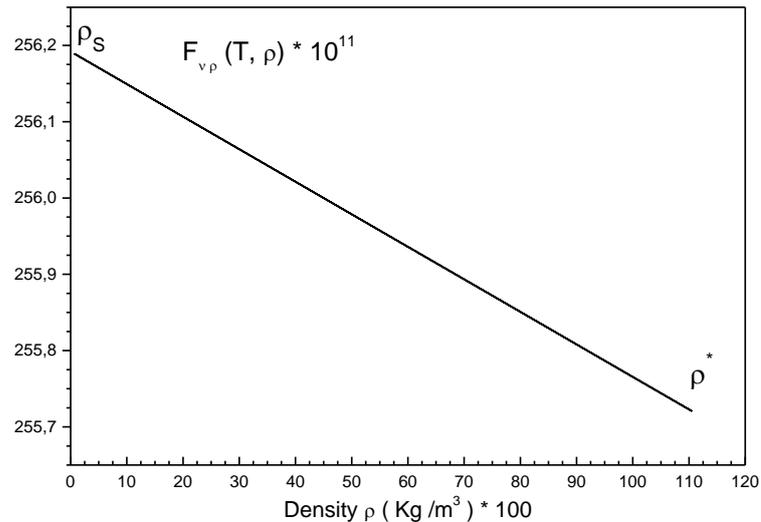


Figure 3.5. Variation de la fonction $F_{vp}(T, \rho)$ dans $[\rho_S, \rho^*]$.

Après la détermination de la fonction de condensations, on peut déterminer la distribution des températures et des masses volumiques par:

$$T_i = S_i \cdot (T_D - T_G) + T_G$$

$$\rho_i = S_i \cdot (\rho_D - \rho_G) + \rho_G$$

La valeur de v_S correspondant au T_S et ρ_S peut être obtenue par la sommation d'intégration de la fonction $F_{vT}(T, \rho)$ dans l'intervalle $[T_S, T^*]$ et d'intégration de la fonction $F_{vp}(T, \rho)$ dans l'intervalle $[\rho_S, \rho^*]$, en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers les deux extrémités.

Enfin si on veut déterminer l'influence des paramètres générateurs, spécialement la pression génératrice, sur la fonction de Prandtl Meyer, pour l'air en exploitant l'équation d'état de Berthelot il suffit de tracer cette fonction pour différentes valeurs des paramètres générateurs et de la comparer avec les modèles de gaz parfait et

haute température afin de les corriger par notre modèle qui est le plus proche d'un cas d'écoulement supersonique réel.

3.6.5. Effet de la quadrature sur la convergence du problème :

L'exemple choisi est pour $T_0=2000\text{ K}$ et $MS=6.00$. Cet exemple demande une quadrature d'ordre élevée par rapport au autre triple (T_0 , ρ_0 et M_S) pour même précision voulue (le cas le plus défavorable). Le résultat donné par la quadrature est toujours inférieur à la solution exacte, c'est-à-dire que *la convergence de la solution aura lieu d'une façon monotone*.

Le contrôle de fixation des chiffres décimaux exactes conduit à dire que, pour avoir la précision $\varepsilon=10^{-6}$, on a besoin de la quadrature de Gauss Legendre d'ordre 32 pour avoir le résultat. Alors, quelque soit le triple (T_0 , ρ_0 et M_S), on peut utiliser la quadrature d'ordre $n=32$ au maximum pour avoir la même précision ε . A titre information, pour avoir une précision $\varepsilon=10^{-6}$ pour le même exemple, les quadratures de rectangle, de trapèze et de Simpson à pas constant ou variable demande un nombre de points *minimum* présenté dans le tableau 3.2 suivant:

Tableau 3.1 : Efficacité des quadratures sur le résultat pour une précision $\varepsilon=10^{-6}$

Quadrature	Rectangle	Trapèze	Simpson A Pas constant	Simpson A Pas Variable	Gauss Legendre
Minimum Nombre de points pour avoir une précision $\varepsilon=10^{-6}$	274.827	162.914	8.637	3734	32

On peut avoir la même précision ε en utilisant la quadrature de rectangle, de trapèze ou Simpson avec un nombre de points inférieure à celui indiqué dans le tableau 3.1, si on utilise la condensation des nœuds vers les deux extrémités de l'intervalle d'intégration $[T_S, T^*]$ comme présente la référence [9], Dans ce cas, *la quadrature de Simpson demande 8.637 points*, et la quadrature de trapèze demande 162.914 points. On peut même obtenir des valeurs inférieures à celles indiquées, si on choisi d'autres paramètres de la fonction de condensation (3.37)

3.7. Conclusion :

Ce chapitre présente le développement et l'élaboration de la forme générale de la fonction de Prandtl Meyer pour un gaz réel qui sera valable pour tous les cas haute et basse température ou de pression, cette dernière calculée par l'intégration de deux complexes fonctions, Les formes de cette fonction pour les modèles gaz parfaits et des gaz parfaits à haute température (dite calorifiquement imparfait) seront des cas particuliers de notre forme générale.

Chapitre 4

Résultats et commentaires

Dans ce chapitre, on procède à la présentation des divers résultats obtenus par un programme de calcul élaboré en exploitant les différentes équations trouvées par notre modèle dans les chapitres précédents et de les comparer avec les résultats obtenus par le modèle du gaz parfait GP et la modèle haute température HT.

On a préféré la présentation des figures pour tous les régimes générateurs possibles, c'est à dire pour les quatre cas suivant:

- basse température et basse pression.
- basse température et haute pression.
- Haute température et haute pression.
- Température et pression modérées.

La gamme de température choisie est de 220 K (au-dessus de la température de liquéfaction) jusqu'à 3000 K (au-dessous du seuil de dissociation moléculaire), et la gamme de pression sélectionnée est de 1 Bar jusqu'à 100 bar pour tous les résultats sauf la fonction de Prandtl Meyer où on augmente la pression jusqu'au 550 bar afin de bien établir l'effet de la pression sur cette fonction.

4.1. Résultats pour les caractéristiques d'un gaz réel :

La figure 4.1 représente la variation de la masse volumique génératrice ρ_0 en fonction de la température génératrice T_0 . On remarque une diminution de la masse volumique lorsque T_0 augmente et on remarque aussi une augmentation de la masse volumique lorsque P_0 augmente. Ce qui montre les effets de la taille moléculaire (b) et de la force intermoléculaire (a) liées par l'équation de Berthelot.

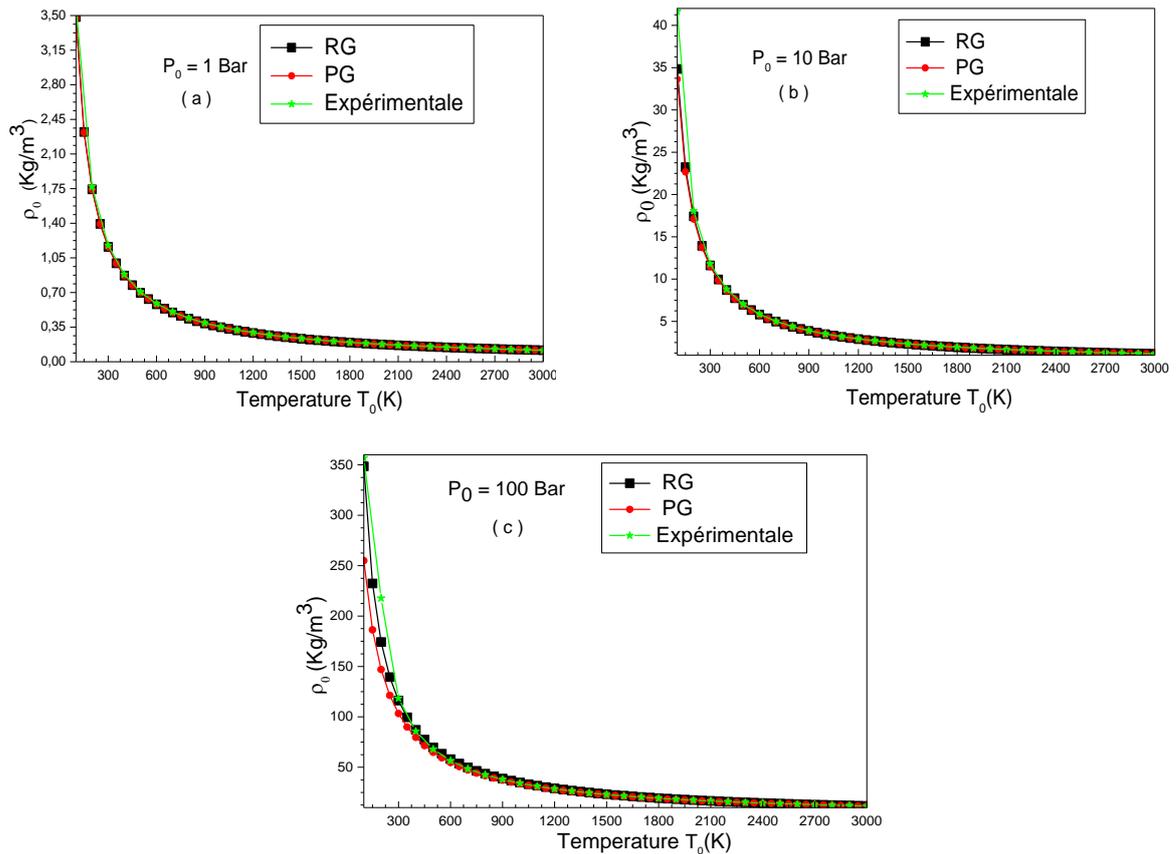


Figure 4.1 : Variation de la masse volumique génératrice ρ_0

La figure 4.2 représente la variation de l'erreur relative donnée par la masse volumique génératrice ρ_0 du modèle gaz réelle au modèle gaz parfait en fonction de la température génératrice T_0 . On remarque que l'erreur dépend des valeurs de T_0 et P_0 et elle augmente lorsque P_0 augmente et lorsque la température augmente l'erreur diminue. Cette variation montre les effets de taille moléculaire (b) et de la force intermoléculaire (a) dans l'équation de Berthelot.

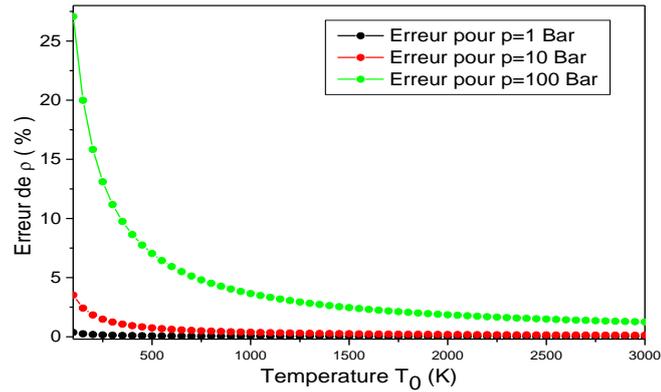


Figure 4.2 : Variation de l'erreur relative de ρ_0 en fonction de T_0

La figure 4.3 représente la variation du facteur de compressibilité Z en fonction de la température génératrice T_0 . On remarque que lorsque la pression P_0 pour une température T donnée le facteur de compressibilité Z augmente et on remarque aussi que lorsque la température génératrice pour une pression P donnée augmente le facteur de compressibilité Z diminue. On peut conclure que notre modèle (modèle de Berthelot), soit proche au modèle du gaz parfait ($Z=1$) lorsque la pression est très faible.

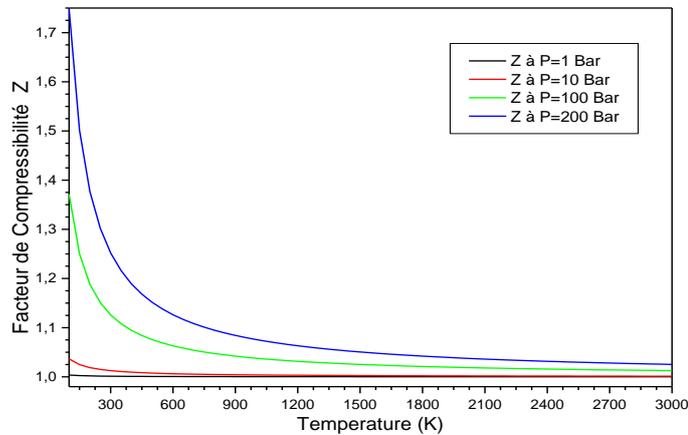


Figure 4.3 : Variation de facteur de compressibilité en fonction de T_0 pour quelque valeur de pression P_0

La figure 4.4 représente la variation des chaleurs spécifiques C_P en fonction de la température pour les modèles HT , GP et RG . Lorsque la température T_0 augmente, on remarque que les deux modèles HT et RG augmentent et prennent la même allure jusqu'à 1300 K. On remarque aussi que le C_P reste constante pour le modèle PG . Ce qui montre les effets de taille moléculaire de la force intermoléculaire et la température caractéristique de vibration.

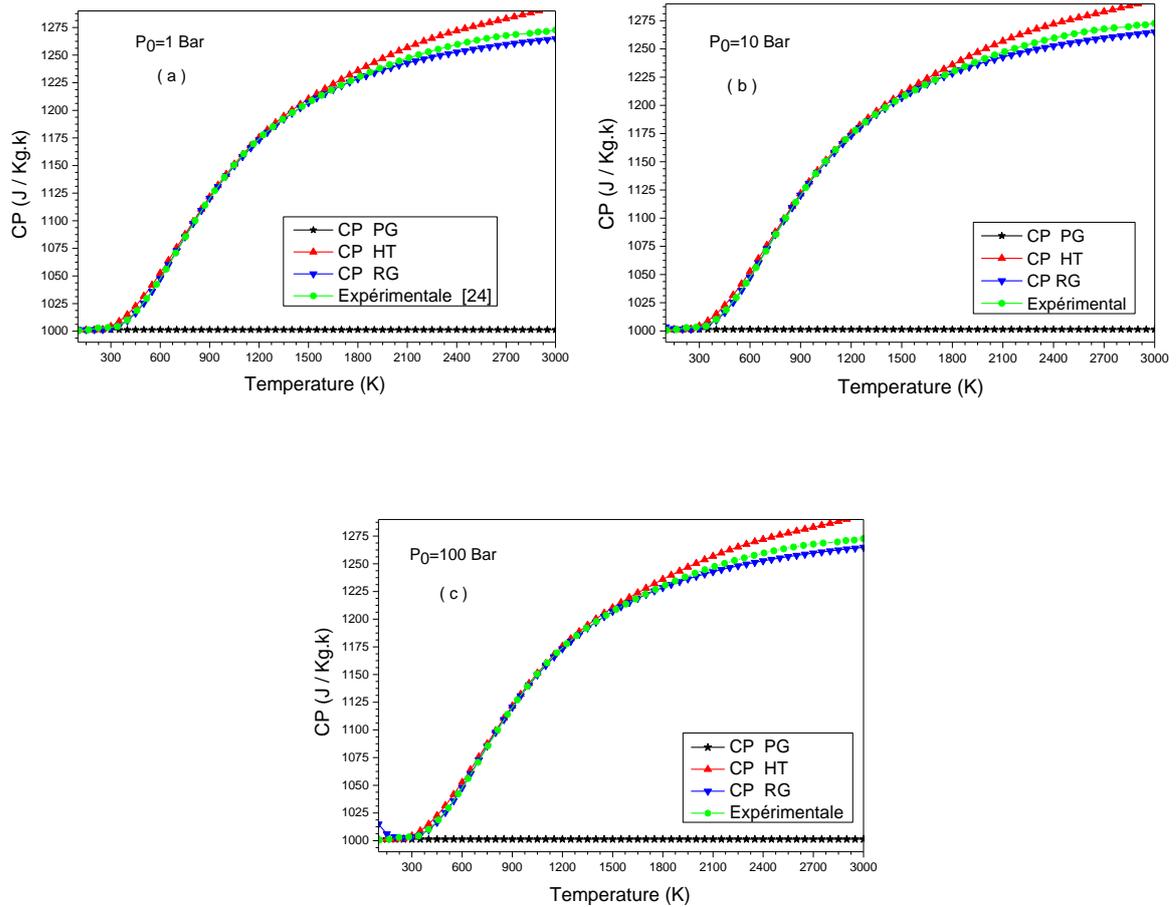
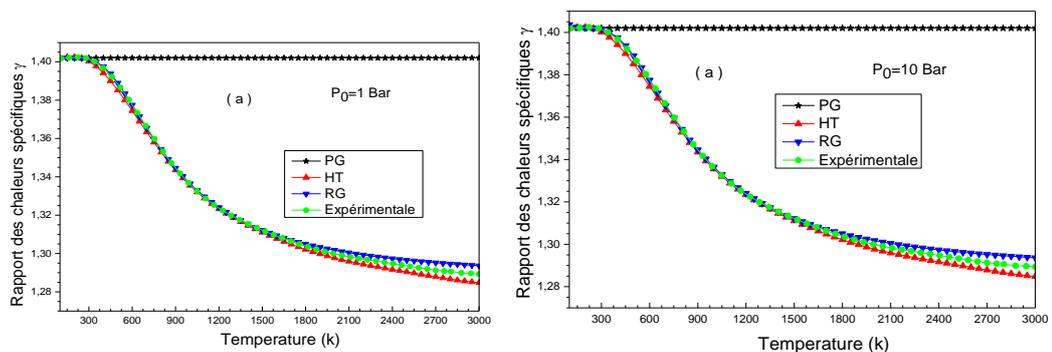


Figure 4.4 : Variation de la chaleur spécifique C_p en fonction de T_0 pour différentes P_0

La figure 4.5 représente la variation du rapport des chaleurs spécifiques γ en fonction de la température jusqu'à 3000 K pour les modèles HT , GP et RG . Le graphe à Haute Température est présenté en utilisant le polynôme d'interpolation. On remarque qu'à basse température les deux modèles HT et GP suivent la même allure. Mais le modèle RG varie avec la pression P_0 . Ce qui montre les effets de taille moléculaire (b) de la force intermoléculaire (a) et la température caractéristique de vibration.



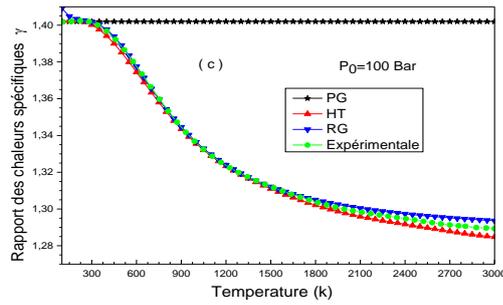


Figure 4.5 : Variation du rapport des chaleurs spécifiques γ en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0

La figure 4.6 représente la variation du coefficient C_T dépend le modèle RG en fonction de la température T_0 jusqu'à 3000 K . On remarque que le coefficient C_T lié linéairement avec la température T_0 . On remarque aussi que lorsque la pression génératrice P_0 augmente le coefficient C_T augmente.

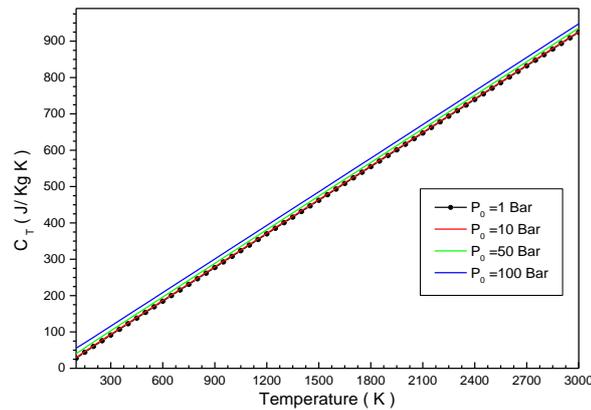


Figure 4.6 : Variation du coefficient C_T en fonction de T_0 pour quelque valeur de P_0

La figure 4.7 représente la variation de la vitesse du son a en fonction de la température jusqu'à 3000 K pour les modèles HT , GP et RG . On remarque que lorsque la température T_0 augmente la vitesse du son augmente pour toutes les modèles et on remarque aussi que de la vitesse du son de le modèle RG dépend a la température T_0 et la pression P_0 . Ce qui montre les effets de taille moléculaire (b) de la force intermoléculaire (a) et la température caractéristique de vibration.

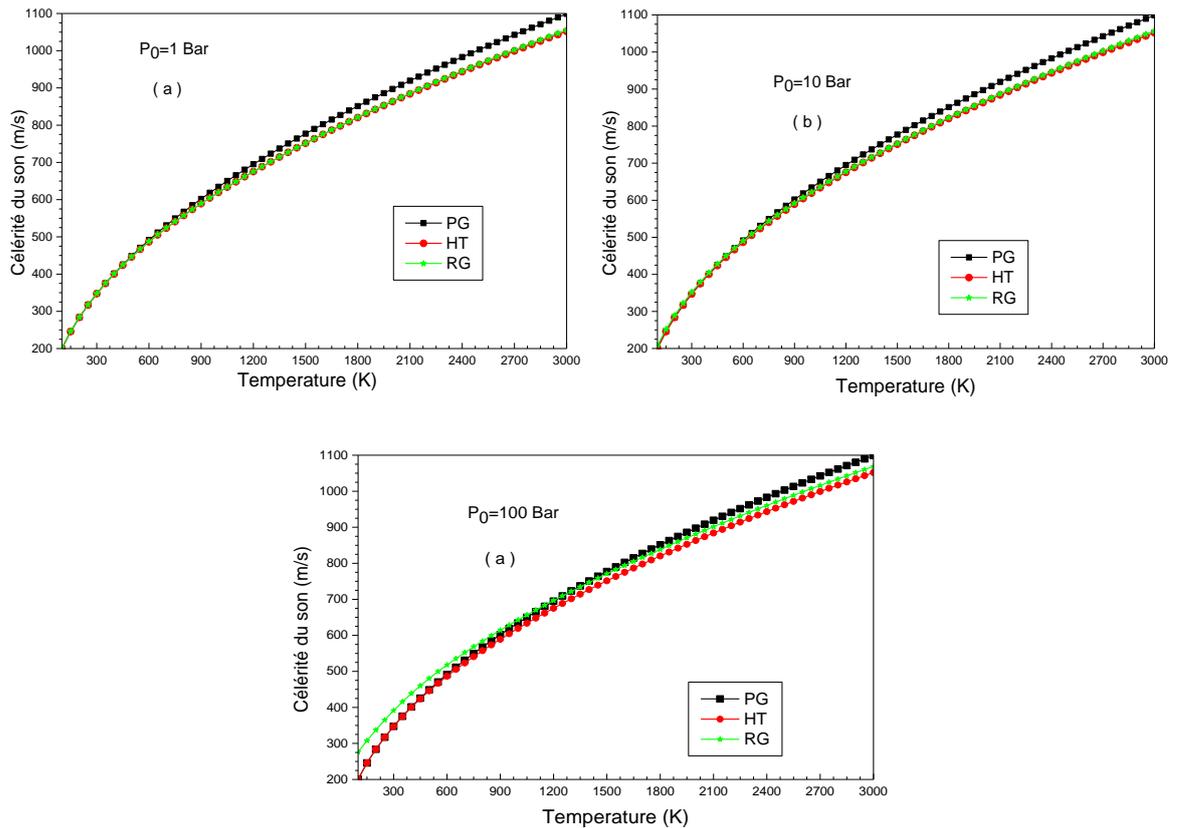


Figure 4.7 : La célérité du son en fonction de la température génératrice T_0 pour quelques valeurs de pression P_0

4.2. Résultats pour les paramètres critiques (au col) :

La figure 4.8 représente la variation des rapports de température critiques T^*/T_0 en fonction de la température génératrice T_0 pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. On remarque que lorsque la température génératrice T_0 augmente les rapports de température critiques T^*/T_0 augmente. Ce qui montre les effets de taille moléculaire de la force intermoléculaire et la température caractéristique de vibration.

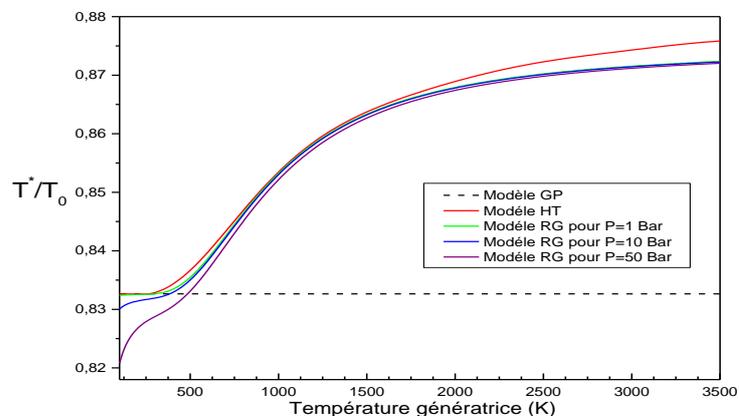


Figure 4.8 : Rapport des températures critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0

La figure 4.9 représente la variation des rapports de la masse volumique critiques ρ^* / ρ_0 en fonction de la température génératrice T_0 , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. On remarque que lorsque la température génératrice T_0 augmente les rapports de la masse volumique critiques ρ^* / ρ_0 diminués. Ce qui montre l'effet de la pression génératrice P_0 sur les paramètres critiques de l'écoulement

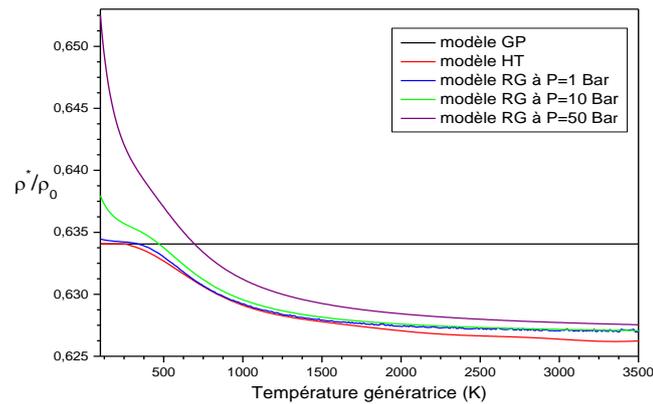


Figure 4.9 : Rapport des masses volumique critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0

La figure 4.10 représente la variation des rapports de la pression critiques P^* / P_0 en fonction de la température génératrice T_0 pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. On remarque que lorsque la température génératrice T_0 augmente les rapports de la pression critiques P^* / P_0 augmentes. Ce qui montre l'effet de la pression génératrice P_0 sur les paramètres critiques de l'écoulement

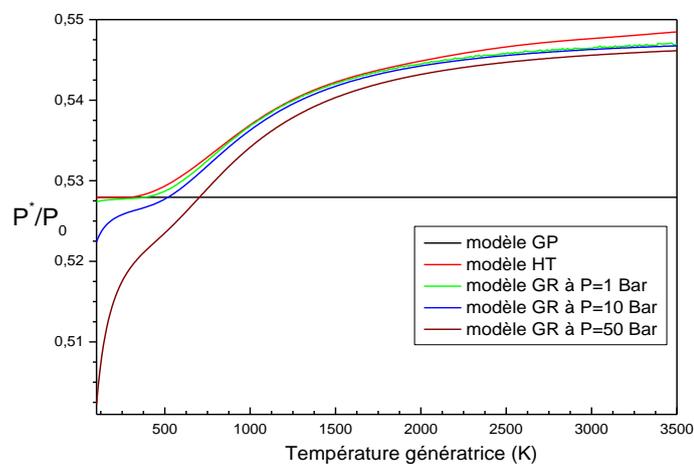


Figure 4.10 : Rapport des pressions critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0

La figure 4.11 représente la variation des rapports de la vitesse du son critiques a^*/a_0 en fonction de la température génératrice T_0 , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. On remarque que lorsque la température génératrice T_0 augmente les rapports de la vitesse du son critiques a^*/a_0 augmentent aussi. Ce qui montre l'effet de la pression génératrice P_0 sur les paramètres critiques de l'écoulement.

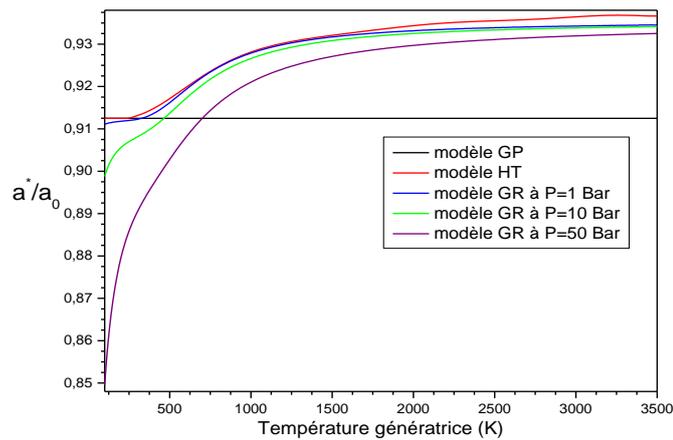


Figure 4.11 : Rapport des vitesses du son critiques en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0

La figure 4.12 représente la variation du débit massique critique non dimensionnel en fonction de la température génératrice T_0 pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. On remarque que l'augmentation de la température génératrice T_0 pour différents modèles entraîne une augmentation des débits massiques critiques. Ce qui montre l'effet de la pression génératrice P_0 sur les paramètres critiques de l'écoulement

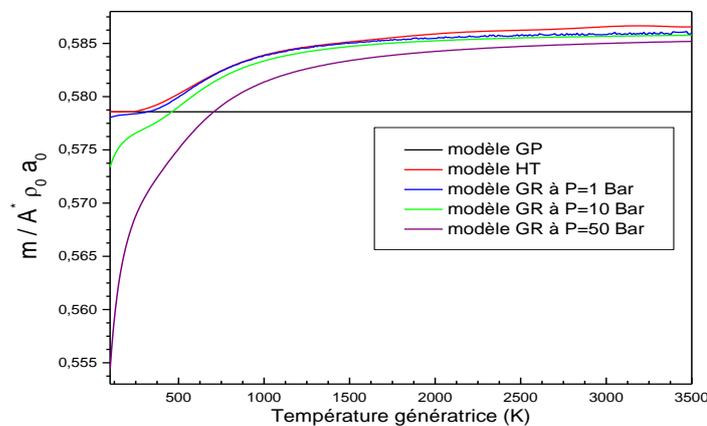


Figure 4.12 : Rapport de débit massique critique en fonction de T_0 pour quelques valeurs de la pression P_0

4.3. Résultats pour les paramètres supersoniques :

La figure 4.13 représente la variation du rapport de température T/T_0 en fonction du nombre de Mach pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. On remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de température. Sur notre figure le courbe du modèle *GP* indique que le gaz parfait va refroidi l'écoulement par rapport au comportement thermodynamique réel du gaz.

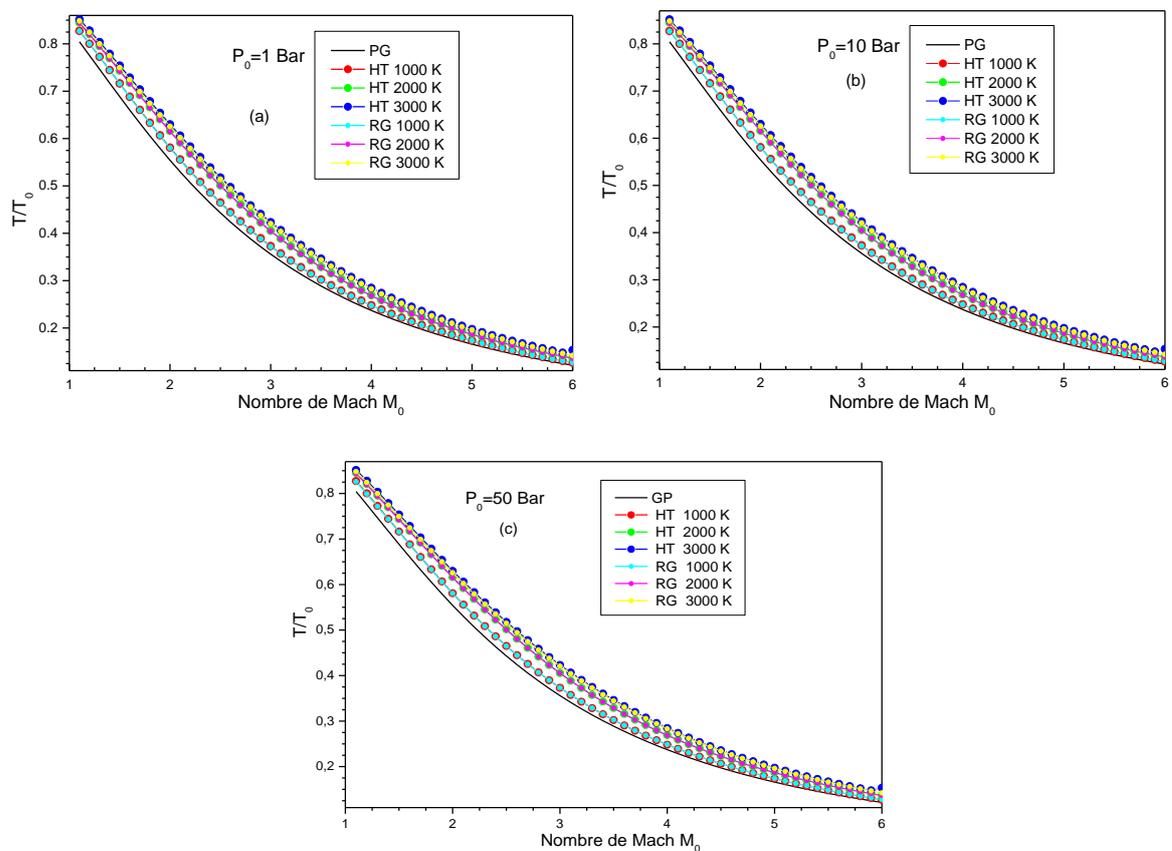


Figure 4.13 : Variation de rapport des températures en fonction du nombre de Mach

La figure 4.14 représente la variation du rapport de la masse volumique ρ/ρ_0 en fonction du nombre de Mach pour les modèles *HT*, *GP* et *RG* on remarque que l'augmentation du nombre de Mach entraîne une diminution des rapports de la masse volumique.

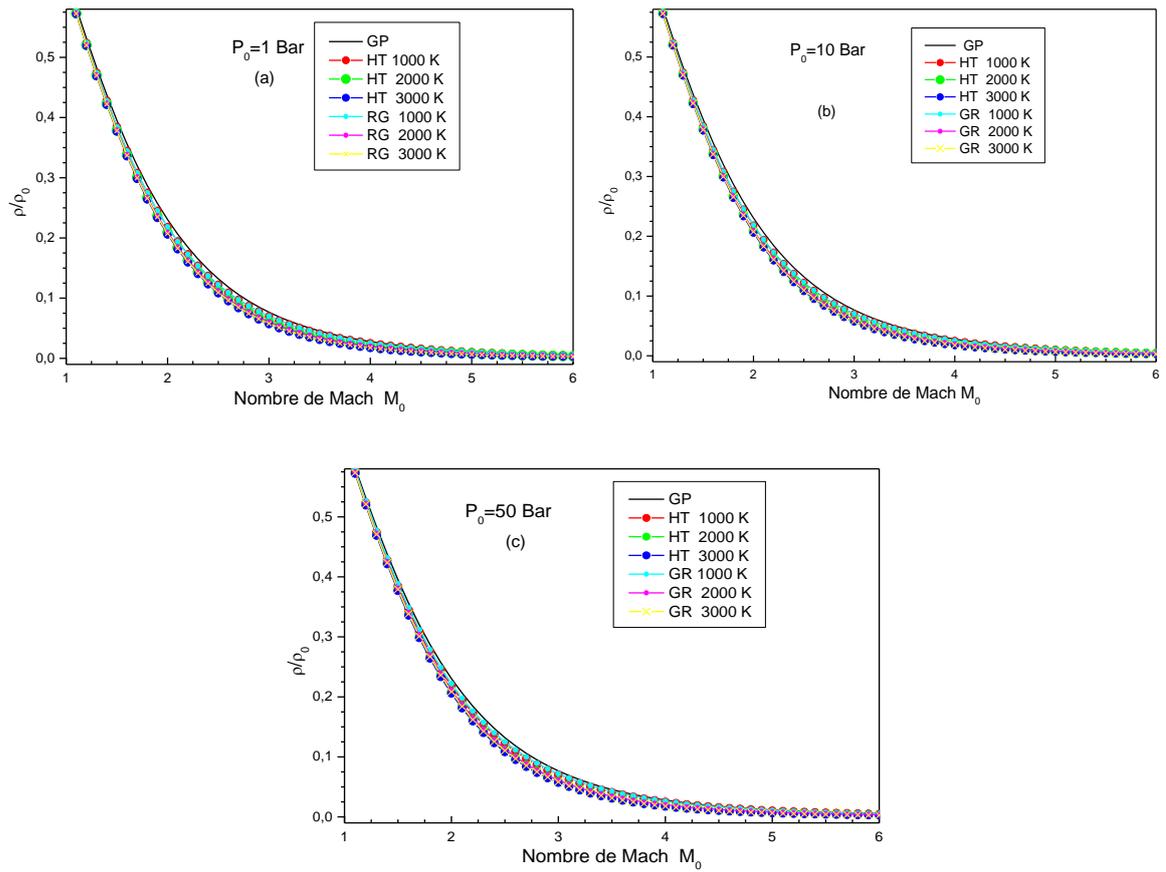
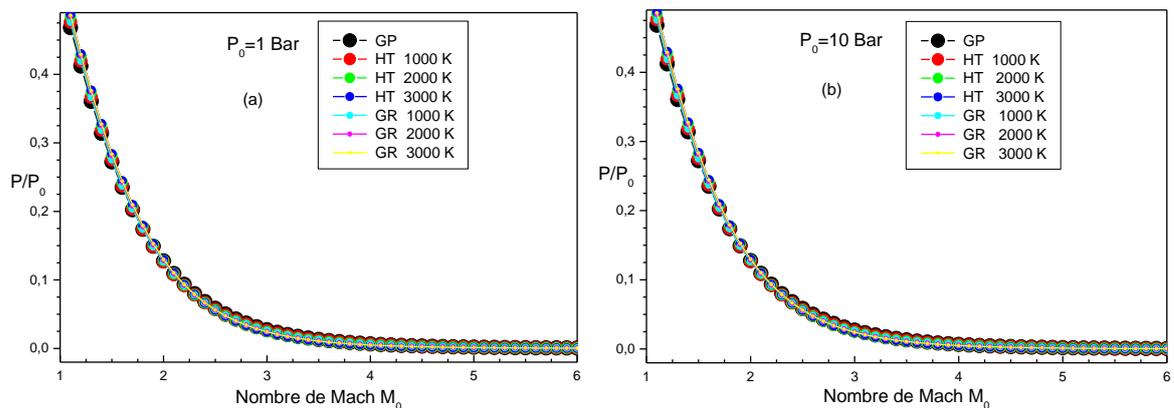


Figure 4.14 : Variation de rapport des densités en fonction du nombre de Mach

La figure 4.15 représente la variation du rapport de la pression P/P_0 en fonction du nombre de Mach pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. On remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de la pression.



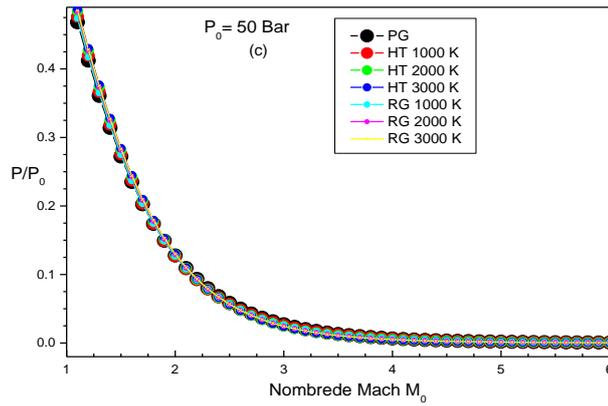


Figure 4.15 : Variation de rapport de pressions en fonction du nombre de Mach

La figure 4.16 représente la variation du rapport de la vitesse du son a/a_0 en fonction du nombre de Mach pour les modèles *HT*, *GP* et *RG* on remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de la vitesse du son. Ce qui montre l'effet de la pression génératrice P_0 .

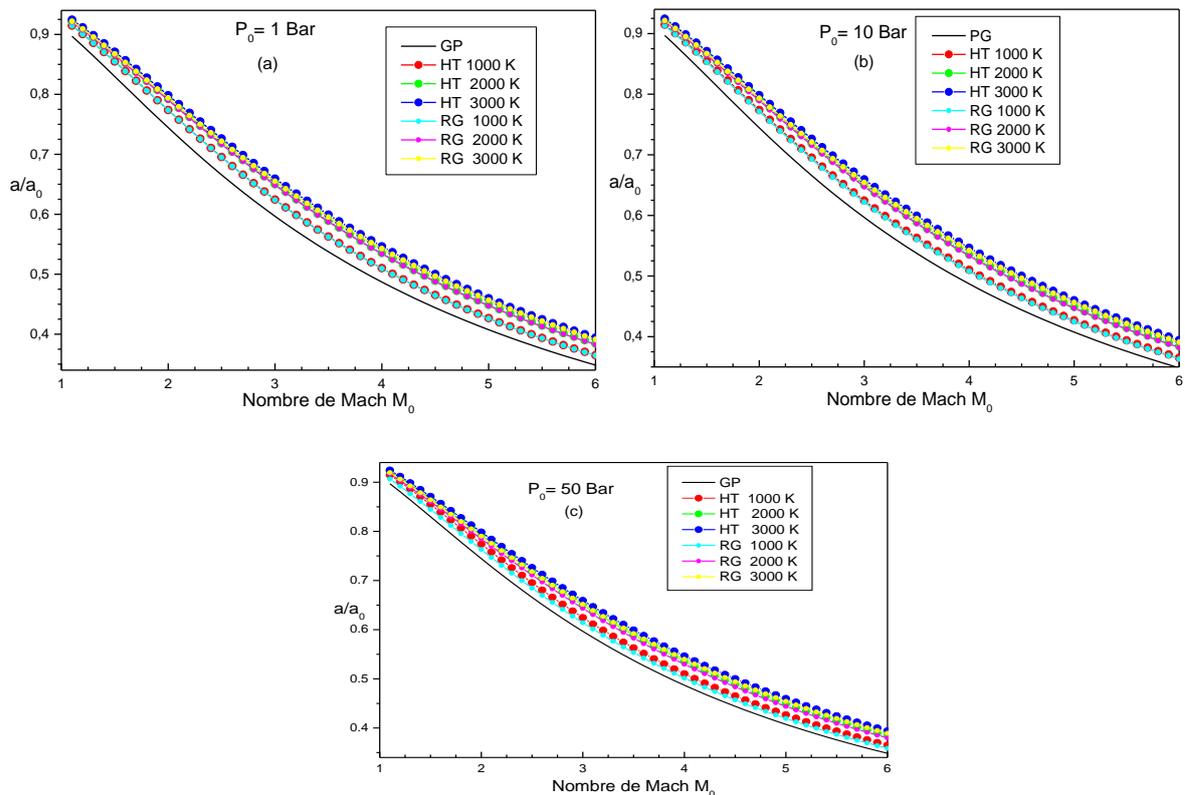


Figure 4.16 : Variation de rapport des célérités du son en fonction du nombre de Mach.

La figure 4.17 représente la variation des rapports critiques des sections A/A^* en fonction du nombre de Mach et pour les modèles HT , GP et RG . On remarque que l'augmentation du nombre de Mach entraîne une augmentation des rapports critiques des sections A/A^* , ce qui montre l'effet de la pression génératrice P_0 .

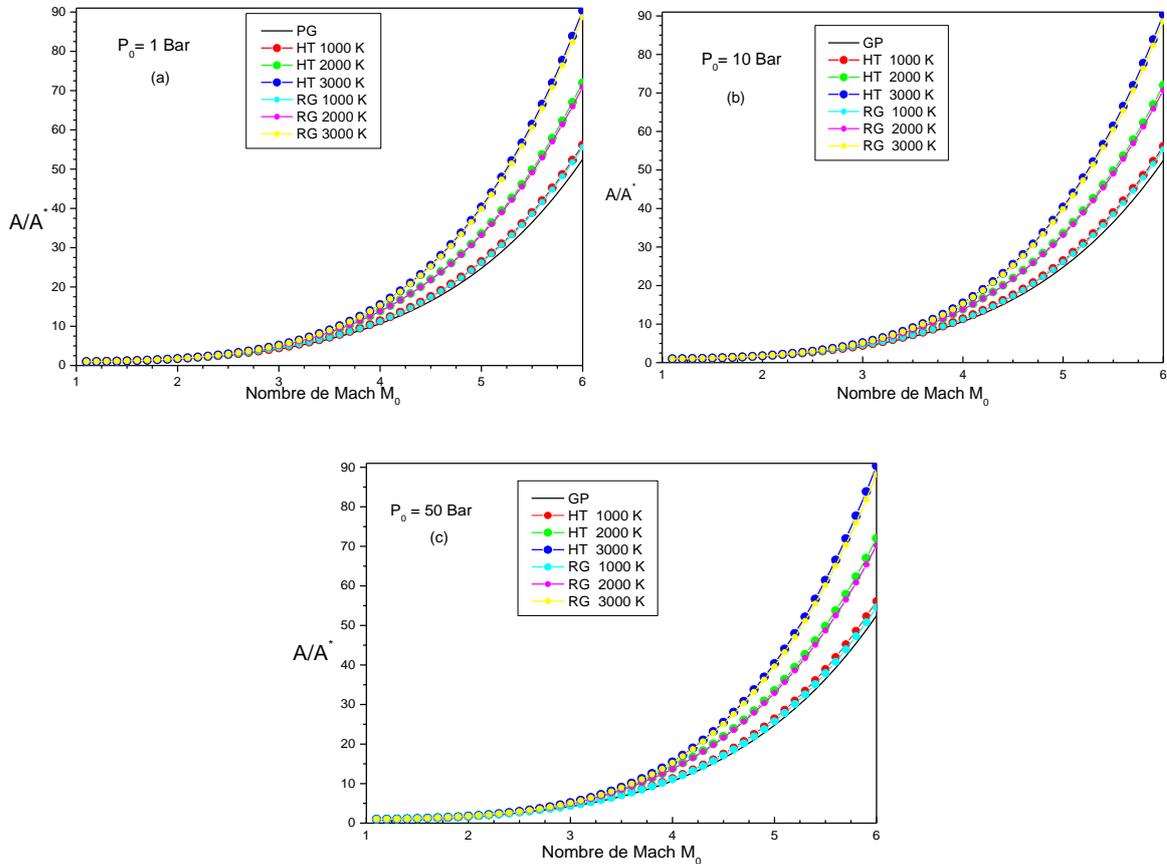


Figure 4.17 : Variation de rapport des sections en fonction du nombre de Mach

La figure 4.18 représente la correction du nombre de Mach du modèle du gaz parfait GP par le nombre de Mach du modèle des gaz réels en fonction du nombre de Mach de sortie, du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que la variation du nombre de Mach dépend de P_0 , T_0 . Si T_0 et P_0 augmentent, le nombre de Mach du modèle des gaz réels diminue. D'après ces résultats on tire que le nombre de Mach pour un gaz réel ne peut jamais atteindre le nombre de Mach du gaz parfait

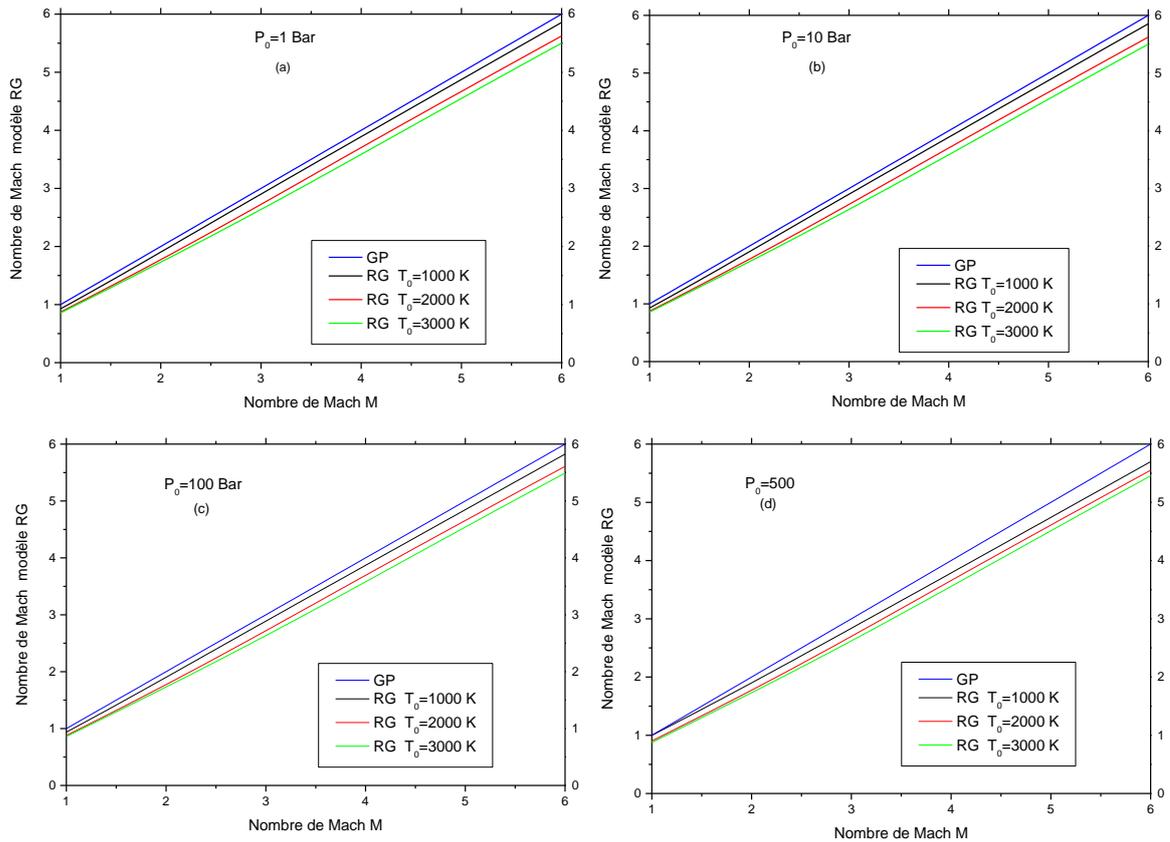
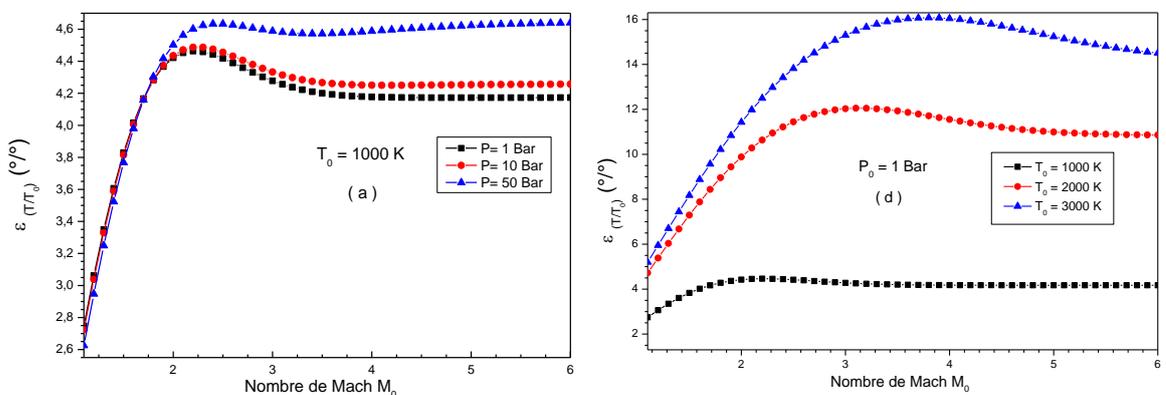


Figure 4.18 : Correction de nombre de Mach du modèle RG par rapport aux modèle GP

4.4. Résultats sur l'erreur pour les paramètres supersoniques :

La figure 4.19 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de température T/T_0 en fonction du nombre de Mach du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 et M_S et elle augmente si T_0 et P_0 augmentent.



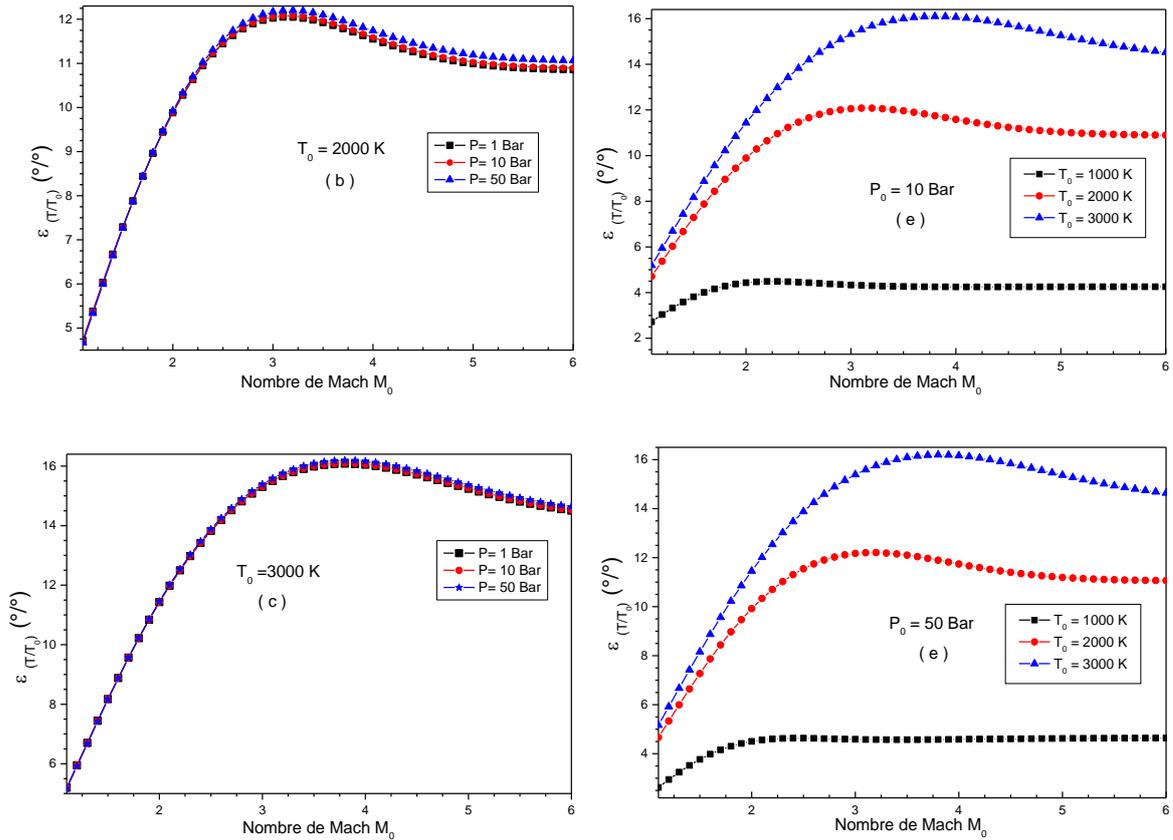
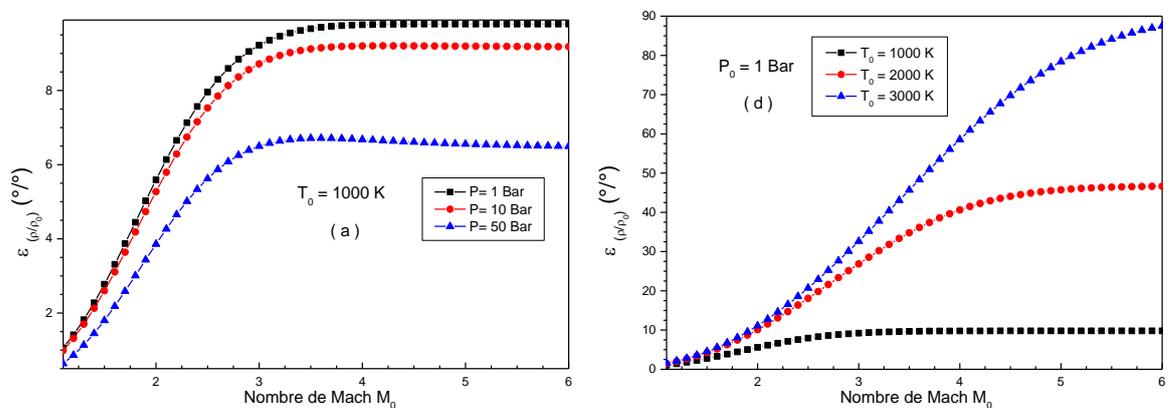


Figure 4.19 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des températures en fonction de nombre de Mach

La figure 4.20 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de masse volumique ρ/ρ_0 en fonction du nombre de Mach du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 et M_S et elle augmente si T_0 augmente.



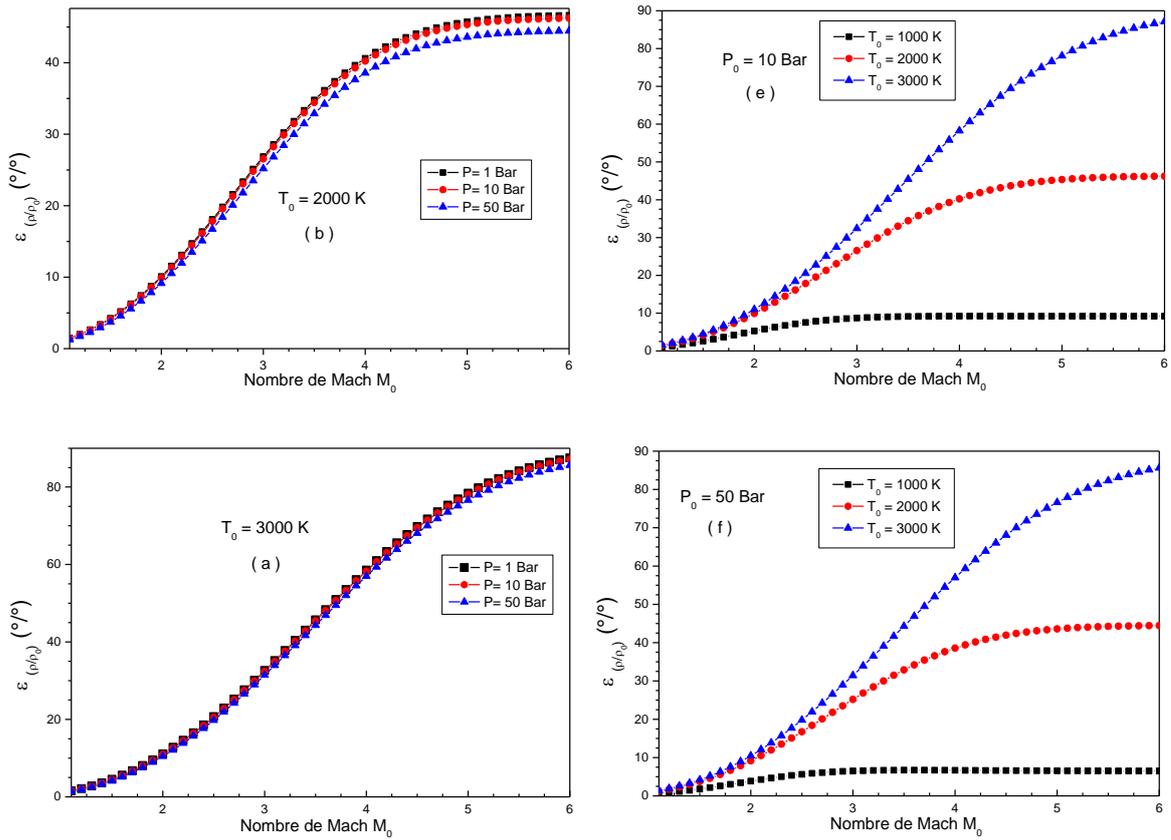
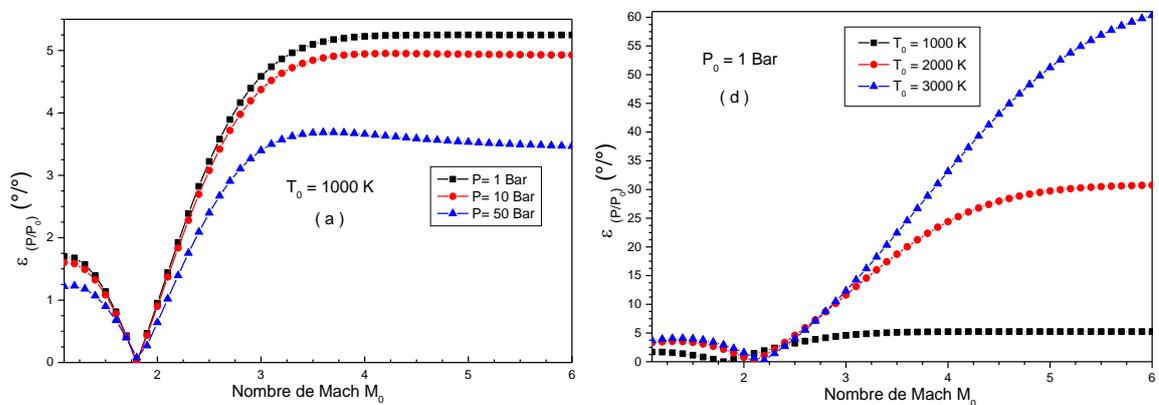


Figure 4.20 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des masses volumiques en fonction de nombre de Mach

La figure 4.21 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de pression P/P_0 en fonction du nombre de Mach du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 et M_S et elle augmente si T_0 et P_0 augmentent.



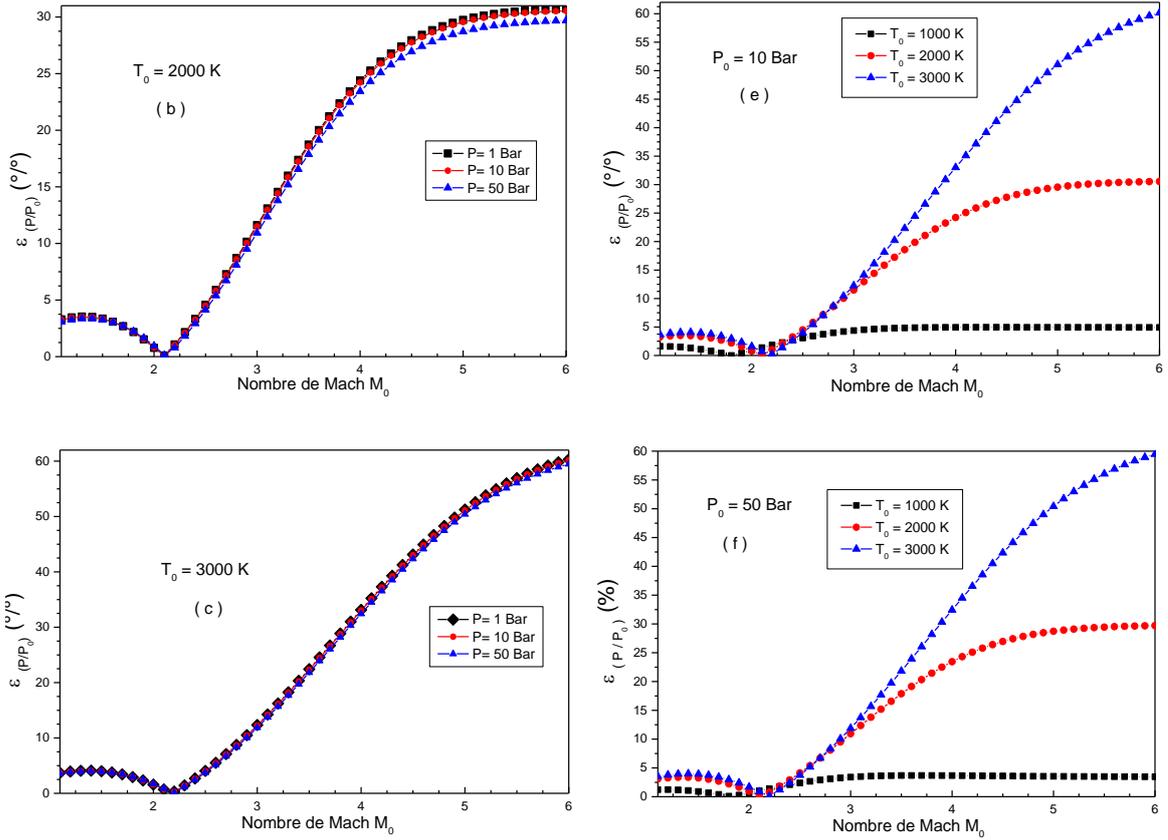
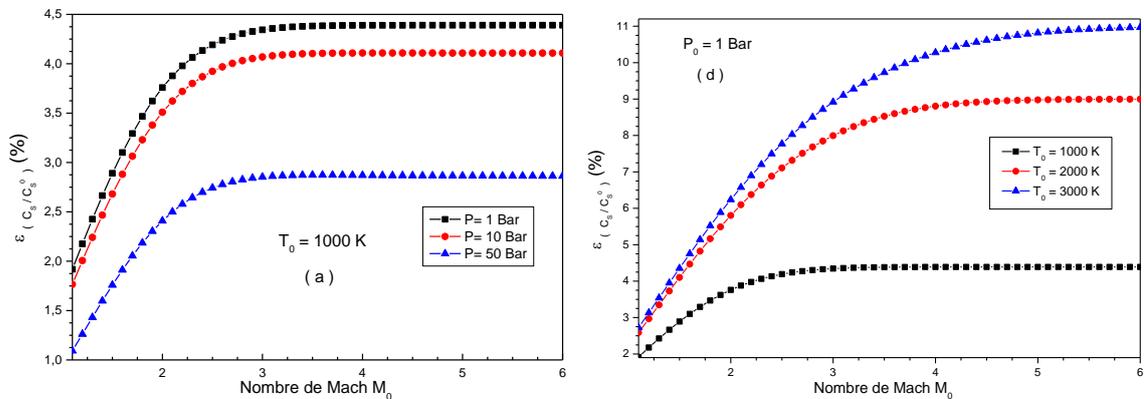


Figure 4.21 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport de pression en fonction de nombre de Mach

La figure 4.22 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de vitesse du son a/a_0 en fonction du nombre de Mach du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 et M_S et elle augmente si T_0 augmente.



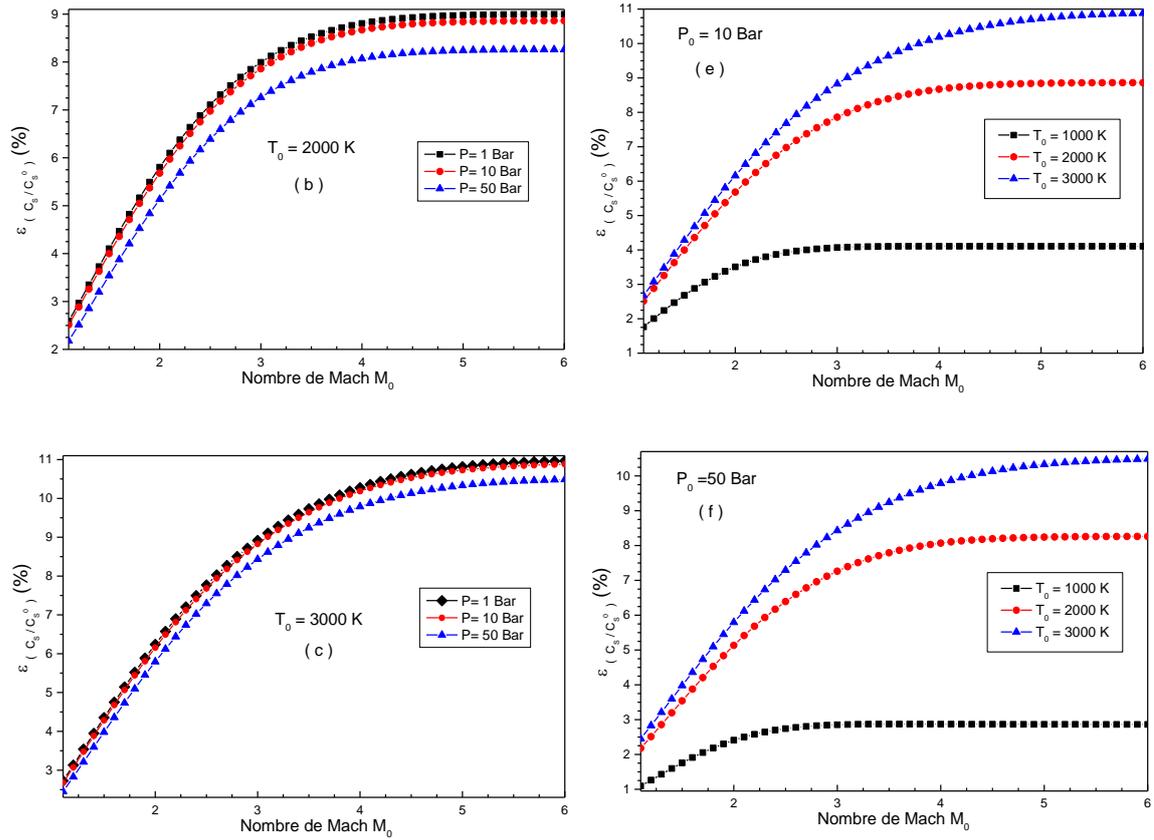
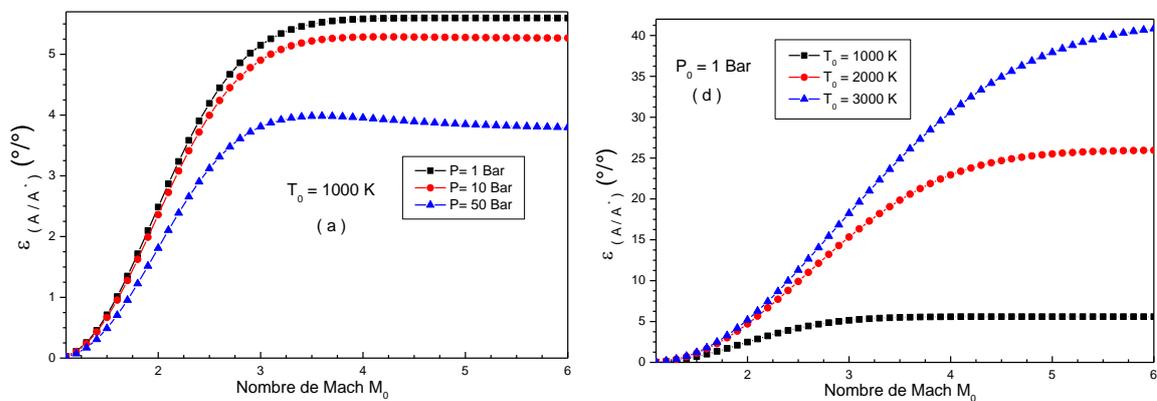


Figure 4.22 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des célérités du son en fonction de nombre de Mach

La figure 4.23 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports critiques des sections A/A^* en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 et M_S et elle augmente si T_0 augmente.



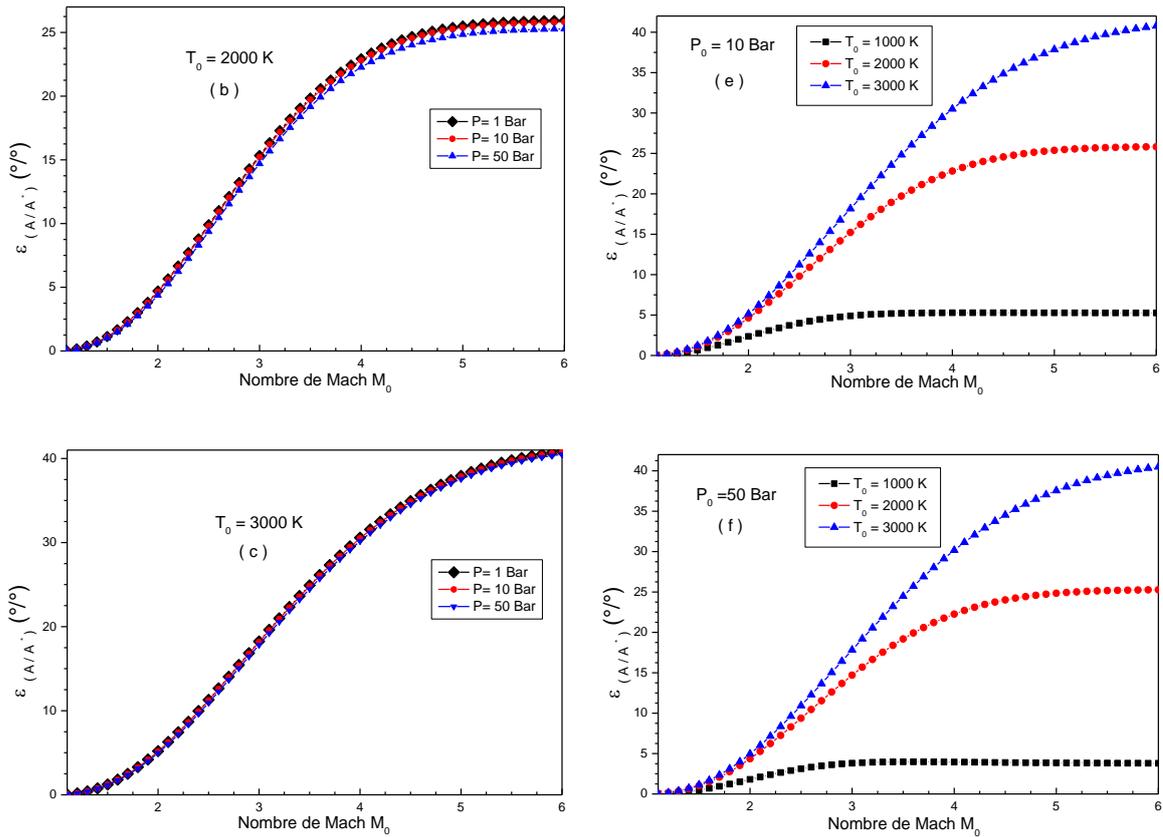


Figure 4.23 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des sections en fonction de nombre de Mach

4.5. Résultats sur la fonction de Prandtl Meyer :

La figure 4.24 représente la variation de la fonction de Prandtl Meyer v en fonction du nombre de Mach jusqu'à $M=6.0$ pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. On remarque que si on prend en considération l'imperfection thermique et calorifique la pression génératrice P_0 influe sur la grandeur de cette fonction. Cette variation montre les effets de taille moléculaire (b) de la force intermoléculaire (a) et la température caractéristique de vibration (θ) et on peut dire que notre modèle est thermiquement et calorifiquement imparfait.

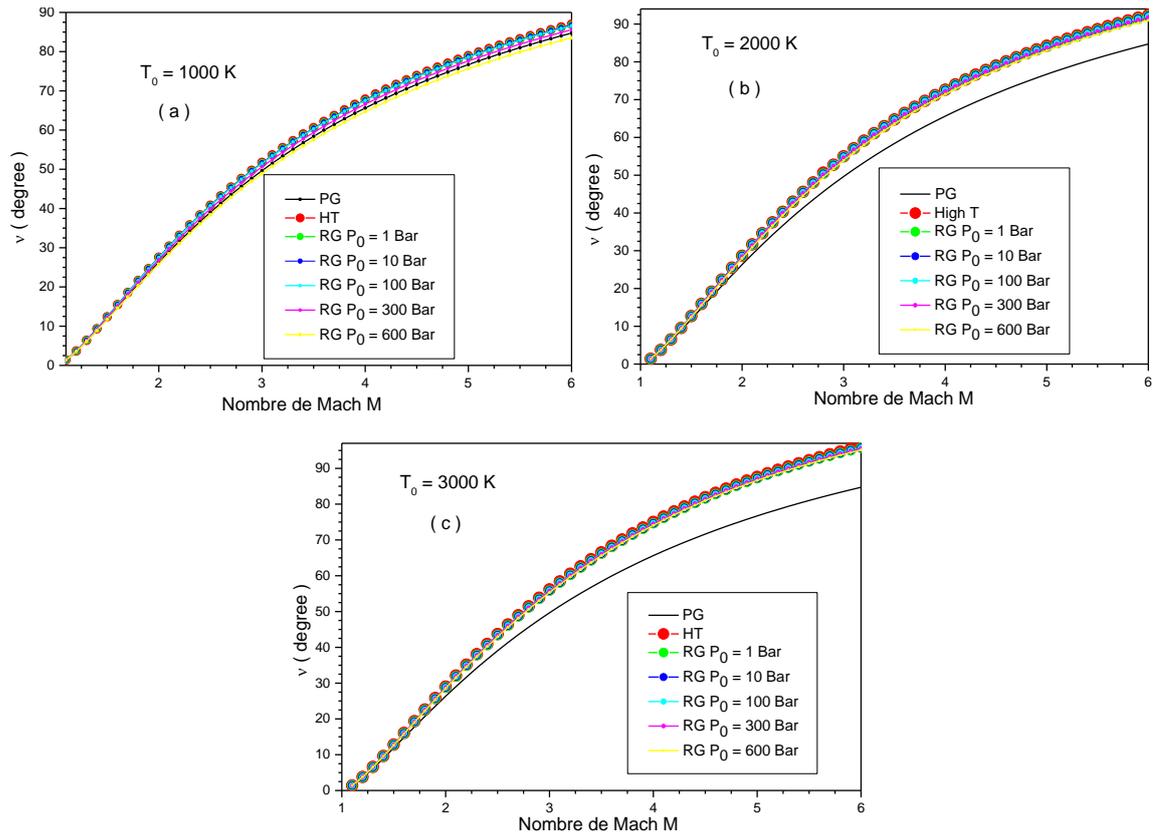


Figure 4.24 : Variation de la fonction de Prandtl Meyer en fonction de nombre de Mach pour quelques valeurs de la pression génératrice P_0

La figure 4.25 représente la variation de la fonction de Prandtl Meyer v pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. On remarque que l'augmentation de la température génératrice T_0 pour différents modèles entraîne une augmentation de la valeur de v , ce qui montre l'effet de la pression génératrice P_0 sur la fonction de Prandtl Meyer.

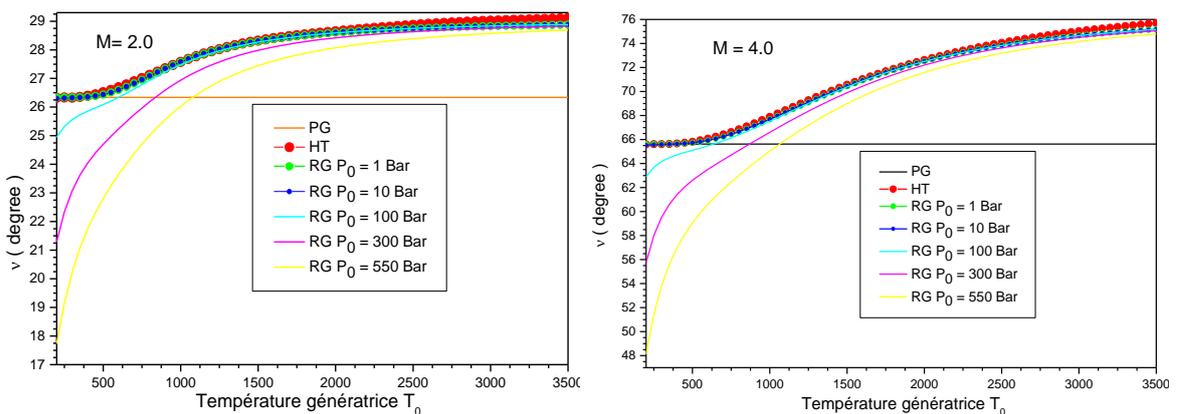


Figure 4.25 : Variation de la fonction de Prandtl Meyer v en fonction de la température génératrice pour quelques valeurs de pression génératrice P_0

4.6. Résultats sur l'erreur pour la fonction de Prandtl Meyer :

La figure 4.26 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage de la fonction de Prandtl Meyer v en fonction du nombre de Mach du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 et M , elle augmente si T_0 augmentent, et diminue si P_0 augmente.

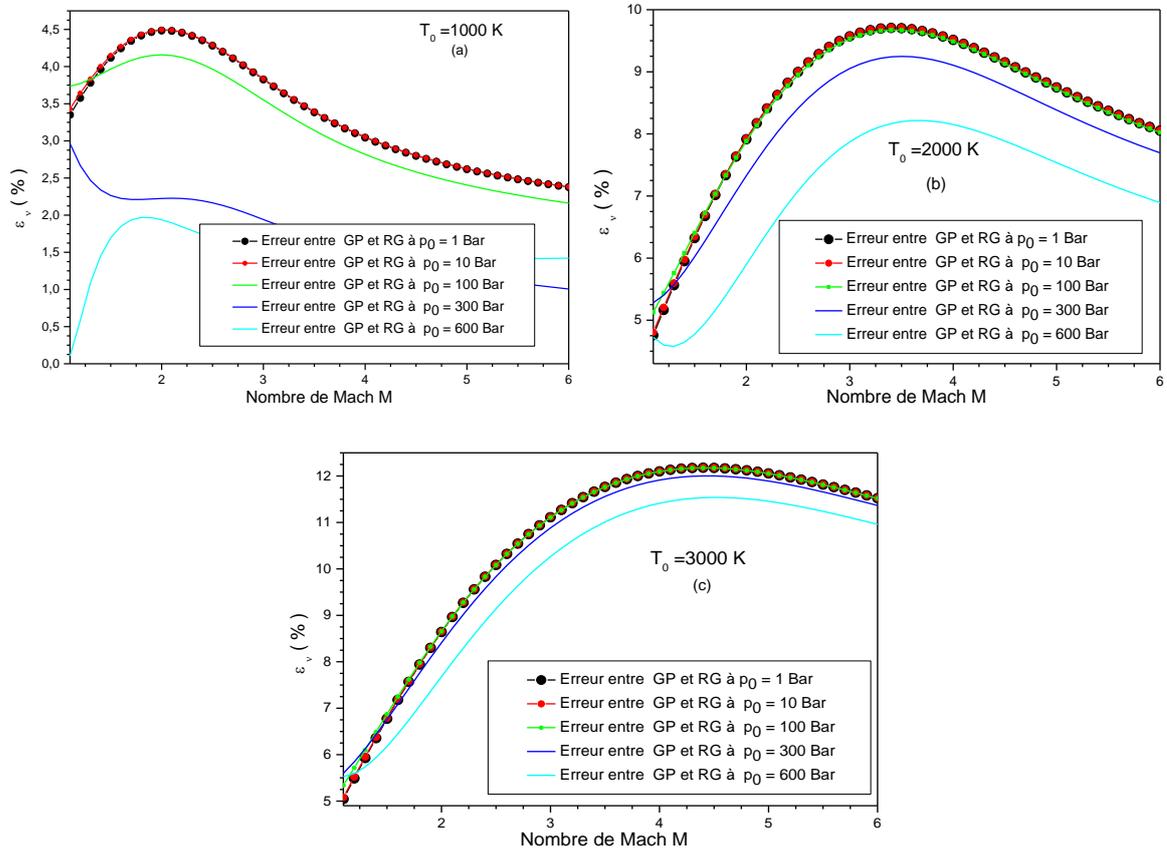


Figure 4.26 : Variation de l'erreur relative de la fonction de Prandtl Meyer v entre les modèles GP et GR en fonction du nombre de Mach

La figure 4.27 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage de la fonction de Prandtl Meyer v en fonction du nombre de Mach du modèle HT comparé au modèle RG. On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 et M , elle augmente si P_0 augmentent, et diminue si T_0 augmente.

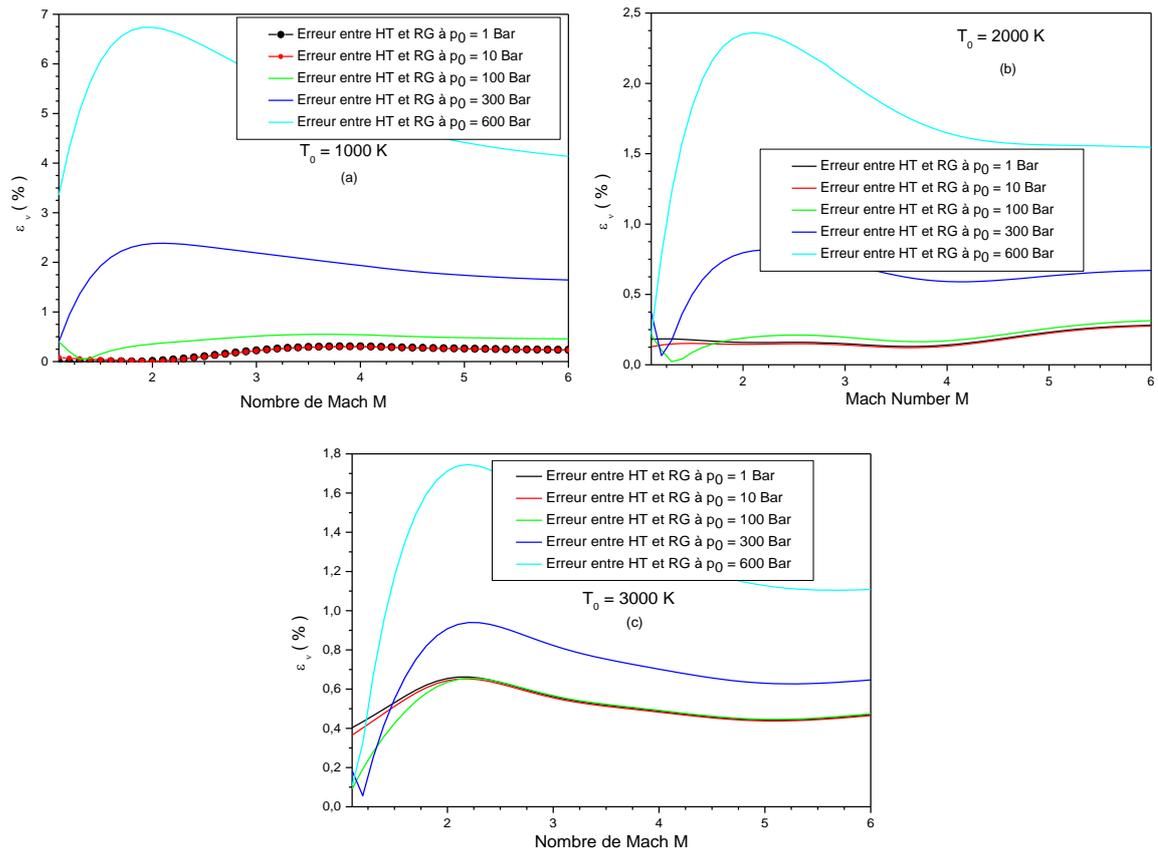


Figure 4.27 : Variation de l'erreur relative de la fonction de Prandtl Meyer v entre les modèles HT et RG en fonction du nombre de Mach

4.7. Résultats de la simulation numérique CFD :

Le maillage :

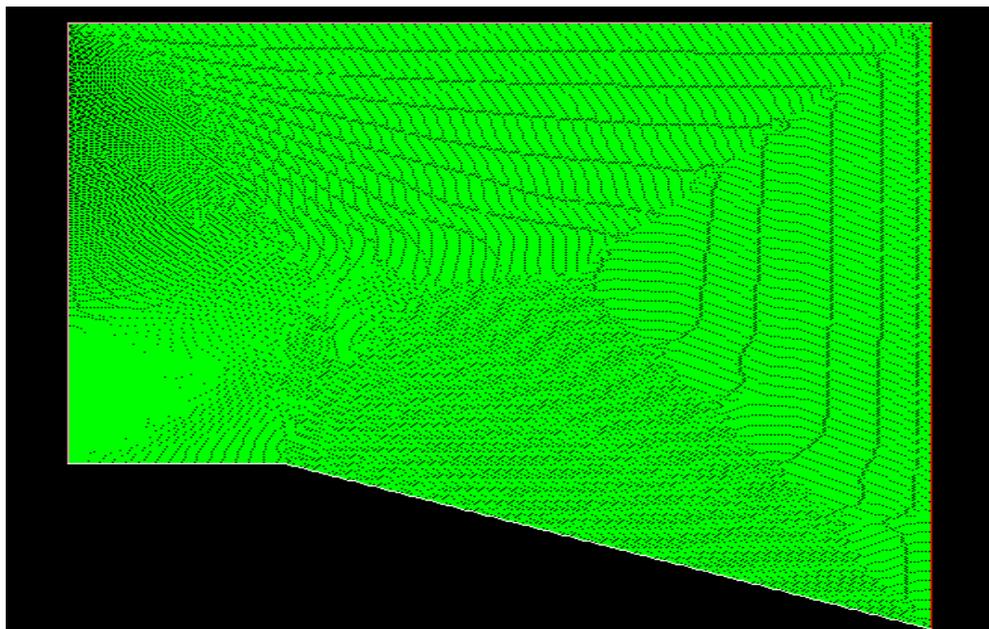


Figure 4.28 : La présentation du maillage raffiné du volume de contrôle.

La figure 4.29 représente l'histoire de convergence des résidus. Cette figure montre que tous les résidus sont baissés d'au moins deux ordres de grandeurs et restera stables quel que soit le nombre d'itération donc tous les résidus sont convergés.

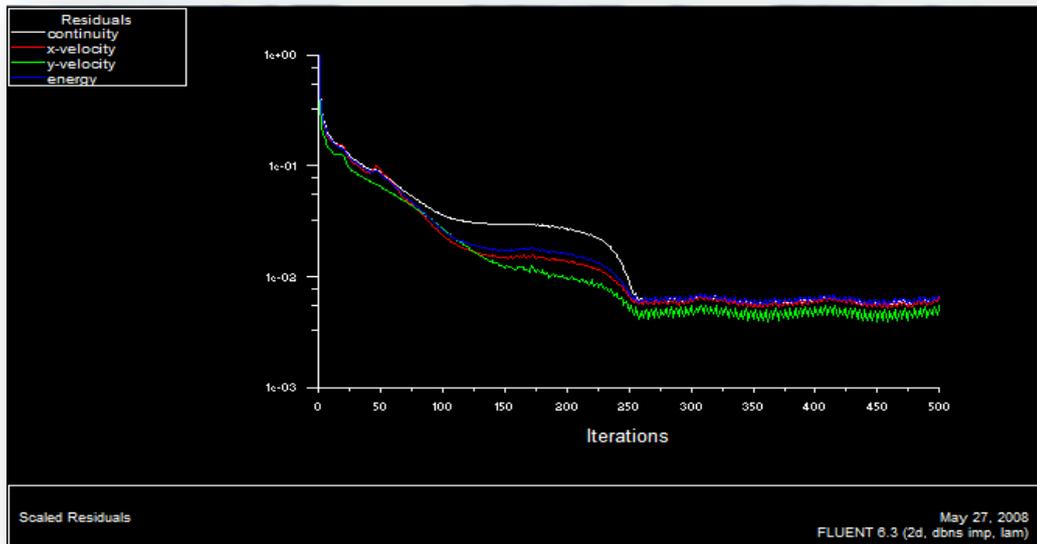


Figure 4.29 : La présentation de l'histoire de convergence.

La figure 4.30 représente le contour de la pression statique dans le volume de contour étudié. On peut remarquer que la pression statique diminue à partir du centre de détente (angle aiguë), de $2.95 \cdot 10^4$ pascal jusqu'à $1 \cdot 10^4$ pascal, cette variation due aux ondes de détente autour d'un centre de détente supersonique.

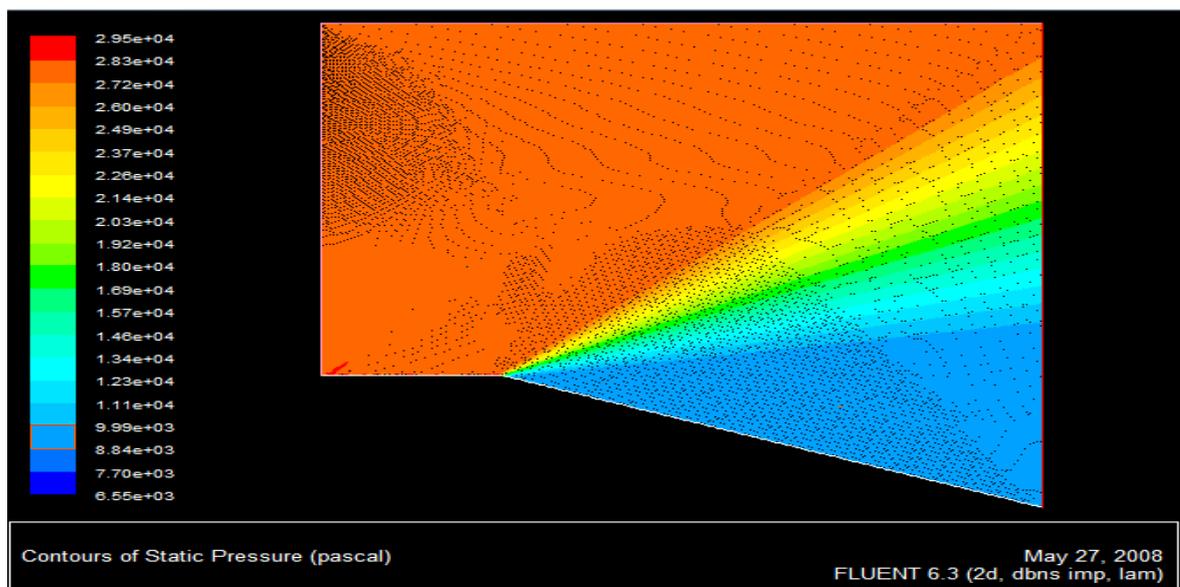


Figure 4.30 : La présentation du contour de la pression statique.

La figure 4.31 représente le contour de l'amplitude de la vitesse dans le volume de contour étudié. On peut remarquer que la vitesse augmente à partir du centre de détente (angle aigu) selon les lignes de mach de $4.31 \cdot 10^2$ (m/s) jusqu'à $6.63 \cdot 10^2$ (m/s), cette variation due aux ondes de détente autour d'un centre de détente supersonique.

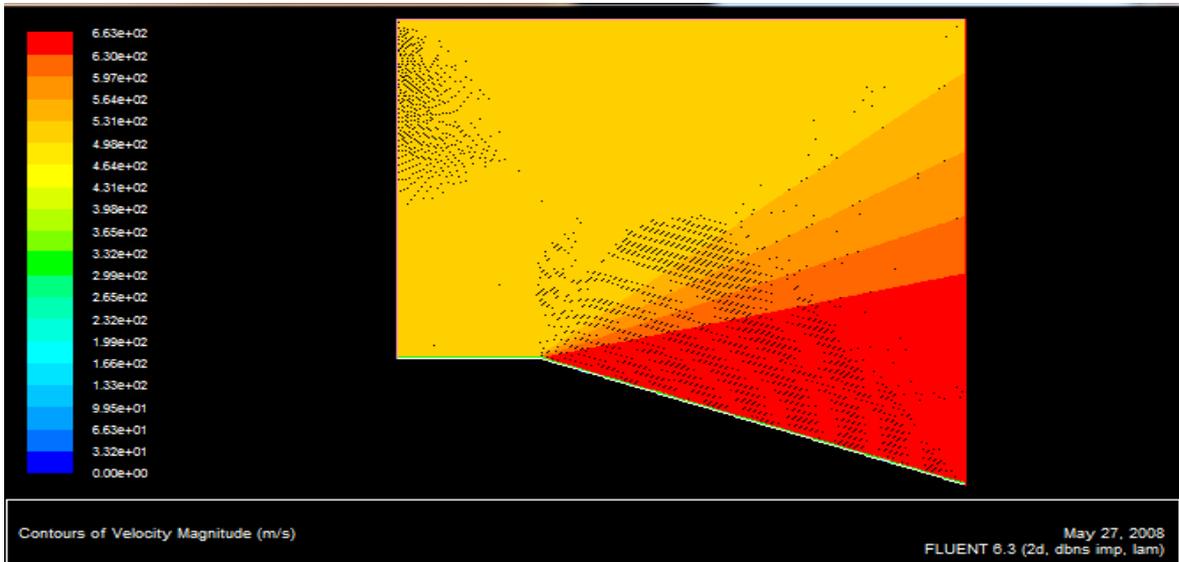


Figure 4.31 : La présentation du contour de l'amplitude de la vitesse.

La figure 4.32 représente le contour de nombre de mach dans le volume de contour étudié. On peut remarquer que le nombre de mach augmente à partir du centre de détente (angle aigu), de 1.51 jusqu'à 2.25, cette variation due aux ondes de détente autour d'un centre de détente supersonique.

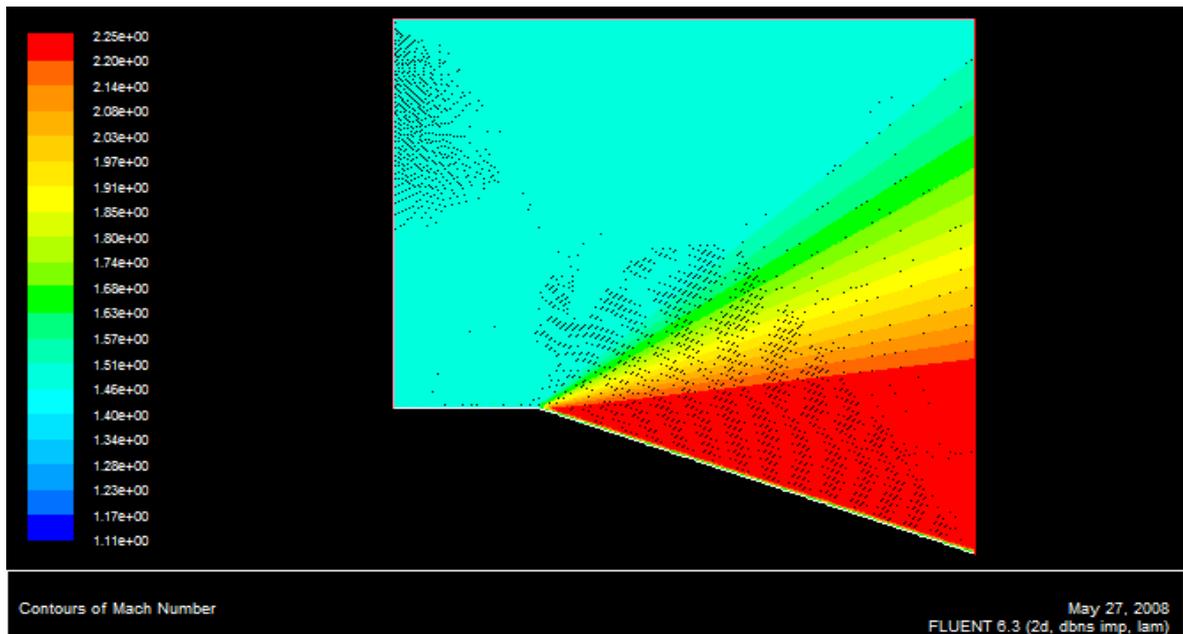


Figure 4.32 : La présentation du contour de nombre de mach.

La figure 4.33 représente le contour de la température statique dans le volume de contour étudié. On peut remarquer que la température statique diminue à partir du centre de détente (angle aigu), de $2.83 \cdot 10^2$ K jusqu'à $2.16 \cdot 10^2$ K, cette variation due aux ondes de détente autour d'un centre de détente supersonique.

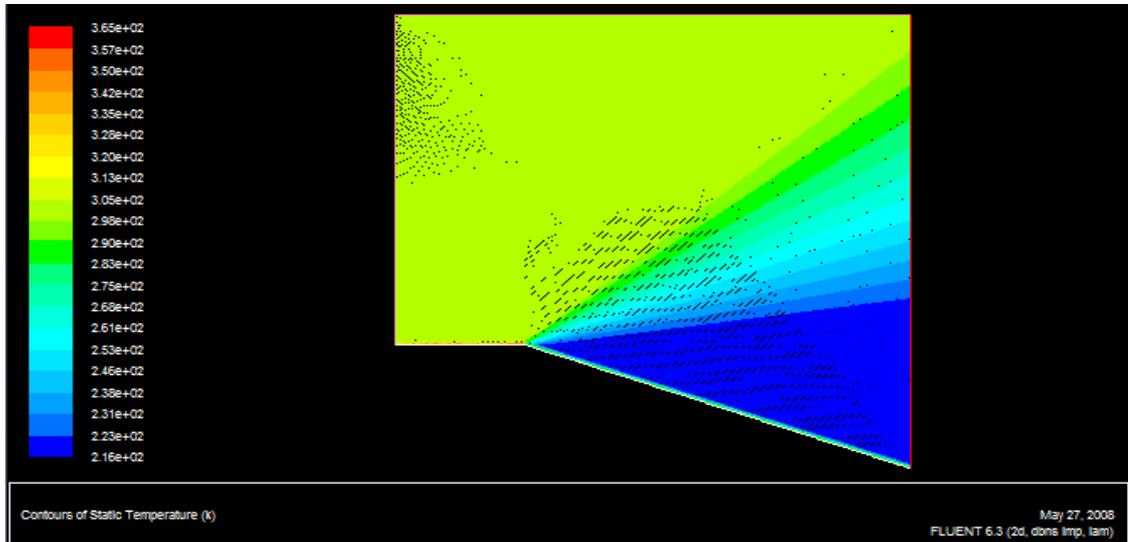


Figure 4.33 : La présentation du contour de la température statique.

La figure 4.34 représente le contour de la densité dans le volume étudié. On peut remarquer que la densité diminue à partir du centre de détente (angle aigu), de $2.95 \cdot 10^1$ (kg/m³) jusqu'à $1.05 \cdot 10^1$ (kg/m³), cette variation due aux ondes de détente autour d'un centre de détente supersonique.

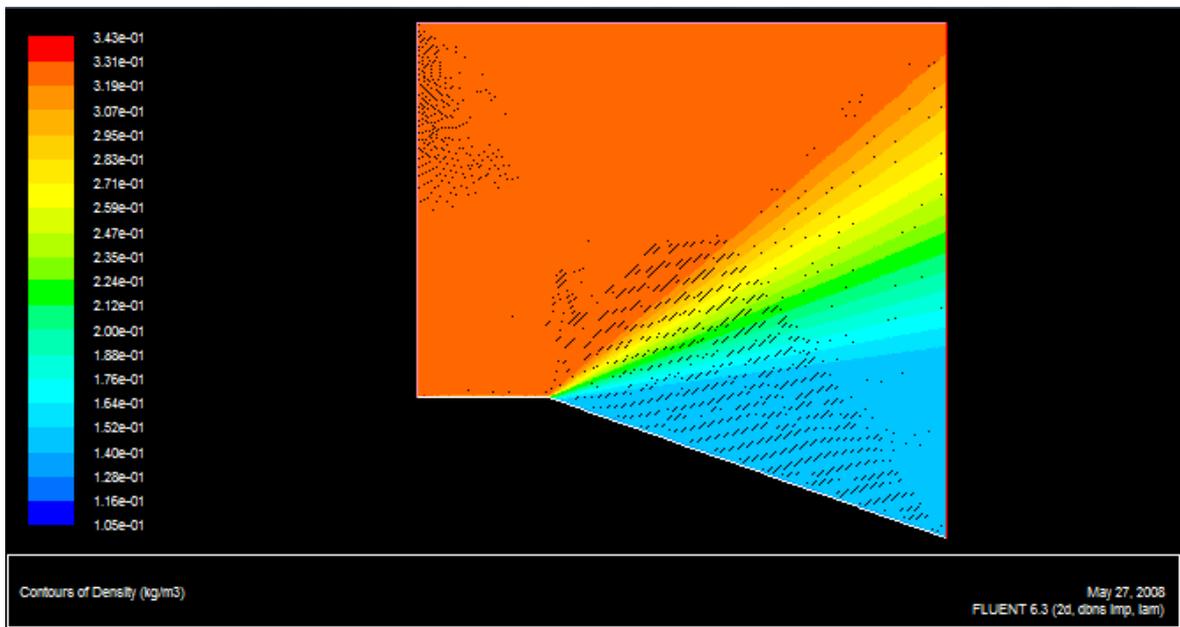


Figure 4.34 : La présentation du contour de la masse volumique.

La figure 3.35 représente le contour de la vitesse du son dans le volume de contour étudié. On peut remarquer que la vitesse du son diminue à partir du centre

de détente (angle aigué), de $3.3 \cdot 10^2$ (m/s) jusqu'à $2.92 \cdot 10^2$ (m/s), cette variation due aux ondes de détente autour d'un centre de détente supersonique.

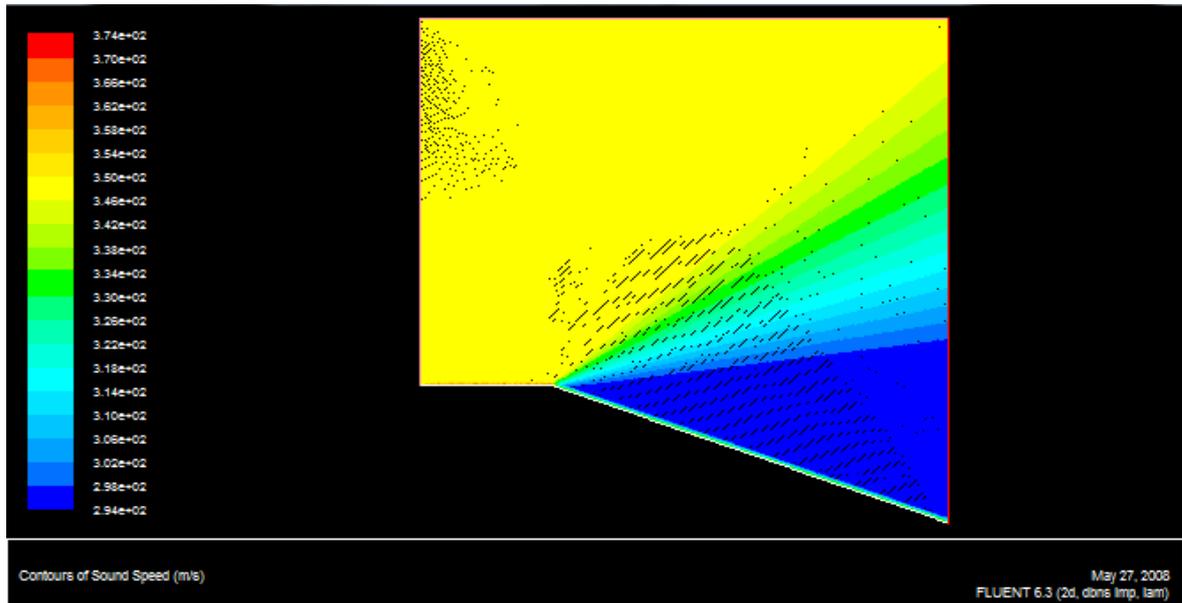


Figure 3.35 : La présentation du contour de la vitesse du son.

4.8. Comparaison entre M2 de GP et RG et les résultats du CFD :

M1=1.5 ; $\theta=20^\circ$

M2(GP)	M2(RG)									M2(CFD)
	1(bar)			10(bar)			100(bar)			
	1000(k)	2000(k)	3000(k)	1000(k)	2000(k)	3000(k)	1000(k)	2000(k)	3000(k)	
2.207	2.17	2.15	2.13	2.17	2.13	2.12	2.17	2.13	2.13	2.25

Tableaux 4.1 : Comparaison entre M2 de GP et de RG et les résultats du CFD

4.9. Conclusion :

On remarque que le nombre de mach pour le CFD est supérieur de ceux obtenu par les autres méthodes GP et RG car le modèle CFD basé sur les équations de Navier stocks (effet de la viscosité).

CONCLUSION

A partir de cette étude, on peut citer les points suivants :

Si on accepte une erreur inférieure à 5 %, ce qui est le cas généralement pour les applications aérodynamiques, on peut étudier un écoulement supersonique en utilisant les relations d'un gaz parfait, si la température génératrice T_0 est inférieure à 1000 K pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach, avec une pression génératrice bien déterminée, ou lorsque le nombre de Mach soit inférieure à 2.00 pour n'importe quelle température génératrice jusqu'à 3000 K environ.

Le modèle GP est représenté par des relations explicites et simples et ne demande pas un temps de calcul élevé, ce qui n'est pas le cas pour notre modèle RG, où il est présenté par la résolution d'une équation algébrique non linéaire, résolution d'un système d'équation algébrique non linéaire formé par trois équations, et dérivation et intégration des fonctions analytiques complexes nécessitent un temps de calcul élevé et programmation numérique.

Les variables principales pour notre modèle RG est la température et la masse volumique, la température pour le modèle HT, et pour le modèle GP est le nombre de Mach à cause d'une équation implicite non linéaire reliant T , ρ , et M .

On peut choisir d'autre substance au lieu de l'air. Les relations restent valables. Il faut déterminer les constantes des forces intermoléculaires et de taille moléculaire, ainsi que la température caractéristique de vibration.

On peut obtenir les relations d'un gaz parfait à partir des relations du modèle RG en annulant toutes les constantes des forces intermoléculaire (a) et de taille moléculaire (b), ainsi que la température caractéristique de vibration. Dans ce cas, le modèle GP devient un cas particulier de notre modèle RG.

On peut, aussi obtenir les relations d'un haute température HT à partir des relations du modèle RG en annulant toutes les constantes des forces intermoléculaire et de taille moléculaire .Dans ce cas, le modèle HT devient un cas particulier de notre modèle RG.

A faibles pression, température et nombre de Mach, l'écart en résultats entre les trois modèles est petit, ce qui donne la possibilité d'étudier un écoulement RG en utilisant les relations GP. Par contre, lorsque T_0 et P_0 augmentent, la théorie GP commence de donner des résultats qui s'éloignent de plus en plus et à mesure du cas réel, d'où la nécessité d'utiliser le modèle RG.

Notre modèle RG valable pour n'importe quel domaine, surtout dans le domaine haute pression et basse température ou bien pour une pression très élevée soit supérieure à 500 bar et pour n'importe quelle valeur de la température, dans ces cas on trouve l'écart en résultats entre notre modèle RG et les autres modèles HT et GP est grand (voir la figure 4.2), d'où la nécessité d'utiliser le modèle RG.

Sans connaître la thermodynamique des gaz on ne peut pas entamer le problème de calcul des paramètres thermodynamiques à haute pression ainsi que la fonction de Prandtl Meyer.

La fonction du Prandtl Meyer présentée par la relation (3.17) peut être utilisée comme une source de comparaison pour la validation des résultats numériques du dimensionnement des diverses tuyères supersoniques donnant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie par la méthode des caractéristiques.

On peut obtenir la fonction du Prandtl Meyer d'un gaz parfait à partir des relations du modèle RG en annulant toutes les constantes des forces intermoléculaires et de taille moléculaire, ainsi que la température caractéristique de vibration. Dans ce cas, le modèle GP devient un cas particulier de notre modèle RG.

On peut, aussi obtenir la fonction du Prandtl Meyer d'un gaz à haute température HT à partir des relations du modèle RG en annulant toutes les constantes des forces intermoléculaires et de taille moléculaire. Dans ce cas, le modèle HT devient un cas particulier de notre modèle RG.

A faibles températures, l'écart en résultats de la fonction du Prandtl Meyer entre les modèles GP et RG est petit, ce qui donne la possibilité d'étudier un écoulement RG en utilisant les relations GP. Surtout à haute pression. Par contre, lorsque T_0 augmentent, la théorie GP commence de donner des résultats qui s'éloignent de plus en plus et à mesure du cas réel, d'où la nécessité d'utiliser le modèle RG.

On peut considérer que la conception à haute température est un modèle à un paramètre, tandis que le modèle RG est considéré comme un modèle à deux paramètres.

A faibles pression, l'écart en résultats de la fonction du Prandtl Meyer entre les modèles HT et RG est petit, ce qui donne la possibilité d'étudier un écoulement RG en utilisant les relations HT. Surtout à haute température. Par contre, lorsque P_0 augmentent, la théorie HT commence de donner des résultats qui s'éloignent de la mesure du cas réel, d'où la nécessité d'utiliser le modèle RG.

Notre fonction du Prandtl Meyer valable pour n'importe quel domaine, surtout dans le domaine haute pression et basse température, dans ce cas on trouve l'écart en résultats entre notre modèle RG et les autres modèles HT et GP est grand, d'où la nécessité d'utiliser le modèle RG pour corriger les résultats.

A la fin de ce modeste travail, on suggère quelques axes de recherches qui seront considérés comme une continuité de notre travail.

On peut étudier l'effet du gaz de propulsion en choisissant l'une des gaz suivants: N_2 , O_2 , H_2 , CO , CO_2 , NH_3 , CH_4 et H_2O au lieu de l'air. Les relations restent valables, Il faut déterminer les constantes des forces intermoléculaire (a) et de taille moléculaire (b), ainsi que la température caractéristique de vibration Θ .

Développer un modèle RG qui prend en compte le phénomène d'onde de choc et déterminer les conditions après le choc dans une tuyère supersonique

Développer une nouvelle méthode de la caractéristique basée sur la fonction de Prandtl Meyer et faire la conception des tuyères supersoniques.

Faire l'analyse physique et la simulation numérique des écoulements compressibles internes comme les tuyères propulsives supersoniques et externes comme les profils d'aile supersoniques.

REFERENCES

1. A. Wohl., "Investigation of the condition equation," *Zeitschrift für Physikalische Chemie* (Leipzig) 87 pp. 1–39 (1914).
2. Adcock, L.H., "The Egg in the Bottle Revisited: Air Pressure and Amontons' Law (Charles' Law)," *Journal of Chemical Education*, 75 (12): 156, (1998).
3. Al-Ajlouni M., "An Automatic Method for Creating the Profile of Supersonic Convergent-Divergent Nozzle," *Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, vol 4 No. 3, (2010), pp. 404-411.
4. Argrow B. M. and Emanuel G., "Computational Analysis of the Transonic Flow field of Two-Dimensional Minimum Length Nozzles," AIAA-1989-1822, 20th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, Buffalo, NY, (June 12-14, 1989).
5. Argrow B.M. and Emanuel G., "Comparison of Minimum Length Nozzles," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 110, PP. 283-288, (September 1988).
6. Beckwith, I. E., and Moore, J. A., "An Accurate and Rapid Method for the Design of Supersonic Nozzles," (February 1955), NACA TN 3322.
7. Berger M., "Géométrie: Convexes et Poly topes, Polyèdres réguliers, aires et Volumes," Tome 3, Fernand Nathan, Paris, (1978).
8. Comolet R., "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux," Tome 1, 3^{ème} Edition, Masson, (1979).
9. Demidovitch B. et I. Maron I., "Eléments de calcul numérique," (1987), Edition MIR, Moscou, Russia.
10. Emanuel G., "Gas dynamic: Theory and Application", New York, AIAA Educational Serie, (1986).
11. Ferri, A. Elements of Aerodynamics of Supersonic Flow. Phoenix ed., Dover Publication, (2005).
12. Gordan J. Van Wylen and Richard E. Sonntag, *Fundamental of Classical Thermodynamics*, 3rd ed, New York, John Wiley & Sons, (1986).
13. J. D. van der Waals: On the Continuity of the Gaseous and Liquid States, ed. J. S. Rowlinson, North Holland, Amsterdam, (1988).
14. McLain D. H., "Drawing contours from arbitrary data points," *The Computer Journal*, Vol. 17, PP. 318-324, (1974).

15. Ortega J. and Rheinboldt W., "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables," , (1970), New York, Academic Press.
16. PARTINGTON, J. S., "An Advanced Treatise on Physical Chemistry," vol. 1, pp. 551 ff, Longmans, Green & Co., Ltd., London, (1949).
17. Peterson C. R. and Hill P. G. "Mechanics and Thermodynamics of Propulsion," Addition-Wesley Publishing Company Inc, (1965), New York.
18. Picard Ch., "Thermochimie," 2^{ème} Edition, Bruxelles, Belgium (1996).
19. Zebbiche T., "New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at High Temperature," AIAA-2006-3674, 25th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, (California, 5-8 Jun 2006).
20. Zebbiche T., "Stagnation Temperature Effect on the Prandtl Meyer Function," AIAA Journal Vol. 45, n° 4, (2007), 952-954.
21. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Flow Parameters at High Temperature application for Air in Nozzle," DGLR-2005-256, German Aerospace Congress, (26-29, September 2005), Friedrichshafen, Germany.
22. Zebbiche T. and Youbi Z., "Effect of Stagnation Temperature on the Supersonic Flow Parameters with Application for Air in Nozzles," "The Aeronautical Journal," Vol, 111, n° 1115, (Jan 2007), 31-40.
23. Zebbiche T. and Youbi Z., "Parameters of Supersonic Flow at High Temperature. Application for Air," 4th International Conferences on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics HEFAT, (19-22 Sep. 2005), Caire, Egypt.
24. Zebbiche T. et Youbi Z., "Fonction de Prandtl Meyer A Haute Température," Conférence Internationale de la Mécanique Avancée, CIMA'04, Boumerdès (Algérie), (30 Nov., 02 Déc. 2004).

