

Lionel Sainsaulieu

2^e CYCLE • ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Calcul scientifique

Cours et exercices corrigés



2^e édition

DUNOD

Table des matières

Avant-propos	IX
1. Modèles mathématiques	1
1.1. Introduction	1
1.2. Problèmes elliptiques linéaires	6
1.3. Problèmes paraboliques linéaires	10
1.4. L'équation des ondes et les problèmes hyperboliques	10
Annexe. Terminologie	14
Bibliographie du chapitre 1.	15
2. La méthode des différences finies	17
2.1. Introduction	17
2.2. Les différences finies pour les problèmes elliptiques	17
2.2.1. En une dimension d'espace	18
2.2.2. En deux dimensions d'espace	25
2.2.3. Influence du traitement des conditions aux limites sur la précision globale du schéma	28
2.3. Les différences finies pour les problèmes hyperboliques	35
2.4. Les différences finies pour les problèmes paraboliques	49
2.5. Une méthode de différences finies pour la mécanique des fluides	56
Bibliographie du chapitre 2.	69
3. La méthode des éléments finis	71
3.1. Introduction	71
3.2. Approximation des fonctions en une dimension	72
3.3. Formulation variationnelle en une dimension	78
3.4. Approximation des fonctions en deux dimensions	85
3.5. Formulation variationnelle en deux dimensions	91
3.6. Mise en œuvre pratique de la méthode des éléments finis en 2D	97
3.6.1. Mise sous forme matricielle du problème discret	97
3.6.2. Assemblage des matrices élémentaires	98
3.6.3. Assemblage de la matrice de rigidité	100
3.6.4. Illustrations	103
Bibliographie du chapitre 3.	106
4. Algorithmes de résolution des systèmes linéaires	107
4.1. Introduction	107
4.2. Méthodes directes	108
4.2.1. Procédé d'élimination de Gauss	108
4.2.2. Factorisation LU d'une matrice	112
4.2.3. Factorisation de Cholewsky	114
4.3. Méthodes itératives I. Jacobi et Gauss-Seidel	115
4.4. Méthodes itératives II. Gradient et gradient conjugué	120
4.4.1. Méthodes du gradient à pas fixe et à pas optimal	120
4.4.2. La méthode du gradient conjugué	124
4.4.3. Préconditionnement de la méthode du gradient conjugué	128
Bibliographie du chapitre 4.	134
5. Modélisation numérique d'un problème de thermique	135
5.1. Introduction	135
5.2. Une hiérarchie de modèles	136
5.2.1. Un modèle fluide	136

5.2.2. Simplification de la modélisation fluide : obtention d'une équation unidimensionnelle	140
5.2.3. Comportement des solutions du problème unidimensionnel	145
5.3. Simulation numérique du problème unidimensionnel	148
5.3.1. Une famille de solutions analytiques	148
5.3.2. Une méthode de pas fractionnaires	151
5.3.3. Test de la méthode de pas fractionnaires	153
5.3.4. Simulation numérique du système relaxé	158
5.4. Conclusion	159
Bibliographie du chapitre 5.	159
6. Problèmes de valeurs propres et méthodes spectrales	161
6.1. Introduction	161
6.2. Généralités mathématiques	163
6.2.1. Théorie spectrale des opérateurs elliptiques avec conditions aux limites homogènes de Dirichlet	163
6.2.2. Une méthode spectrale pour résoudre le problème de Dirichlet pour le Laplacien	166
6.2.3. Un phénomène de résonance	169
6.2.4. Illustrations numériques	170
6.2.5. Discussion	174
6.3. Calcul approché des modes propres d'un opérateur elliptique	174
6.3.1. Utilisation des différences finies	175
6.3.2. Formulation variationnelle des problèmes de valeurs propres	181
6.4. La méthode de la puissance inverse	184
6.4.1. Calcul de la valeur propre de plus petit module	185
6.4.2. Calcul des premières valeurs propres d'une matrice	189
6.4.3. Premiers modes propres du problème $Ae = \lambda Me$	191
6.5. Illustrations	192
6.6. Méthodes spectrales	196
6.6.1. Méthode des résidus pondérés	196
6.6.2. Utilisation des polynômes de Tchebycheff et de la transformation de Fourier rapide	198
6.6.3. Mise en œuvre de la méthode spectrale	202
6.6.4. Discussion	205
Bibliographie du chapitre 6.	206
7. Analyse d'erreur pour la méthode des éléments finis	207
7.1. Introduction	207
7.2. Analyse d'erreur <i>a priori</i> en une dimension d'espace	209
7.3. Analyse d'erreur <i>a posteriori</i> en une dimension d'espace	210
7.4. Analyse de l'erreur en deux dimensions d'espace	218
7.4.1. Introduction	218
7.4.2. Estimations fondamentales	219
7.4.3. Analyse d'erreur <i>a priori</i> en deux dimensions d'espace au sens de la norme H_0^1	220
7.4.4. Analyse d'erreur <i>a priori</i> en deux dimensions d'espace au sens de la norme L^2	221
7.4.5. Erreur <i>a posteriori</i> au sens de la norme H_0^1	222
7.4.6. Erreur <i>a posteriori</i> au sens de la norme L^2	230
7.5. Preuve des résultats techniques	231
Bibliographie du chapitre 7.	236
Corrigé des exercices	237
Index	255

Table of contents

Foreword	IX
1. Mathematical models	1
1.1. Introduction	1
1.2. Linear elliptic problems	6
1.3. Linear parabolic problems	10
1.4. The wave equation and hyperbolic problems	10
Appendix. Terminology	14
Bibliography of chapter 1.	15
2. The finite difference method	17
2.1. Introduction	17
2.2. Finite differences for elliptic problems	17
2.2.1. In one dimension	18
2.2.2. In two dimensions	25
2.2.3. Influence of boundary conditions on the global precision of the numerical scheme	28
2.3. Finite difference methods for hyperbolic problems	35
2.4. Finite difference methods for parabolic problems	49
2.5. A finite difference method for the computation of fluid flows	56
Bibliography of chapter 2.	69
3. The finite element method	71
3.1. Introduction	71
3.2. Approximation of functions in one dimension	72
3.3. Variational formulation in one dimension	78
3.4. Approximation of functions in two dimensions	85
3.5. Variational formulation in two dimensions	91
3.6. Effective implementation of the finite element method	97
3.6.1. Matrix form of the discrete problem	97
3.6.2. Computation of the elementary matrices	98
3.6.3. Computation of the rigidity matrix	100
3.6.4. Illustrations	103
Bibliography of chapter 3.	106
4. Numerical solution of linear systems	107
4.1. Introduction	107
4.2. Direct methods	108
4.2.1. Gauss elimination	108
4.2.2. LU factorization	112
4.2.3. Cholewsky's method	114
4.3. Iterative methods I. Jacobi and Gauss-Seidel	115
4.4. Iterative methods II. Gradient and conjugate gradient	120
4.4.1. Fixed step gradient and optimal gradient	120
4.4.2. The conjugate gradient method	124
4.4.3. Preconditionning the conjugate gradient method	128
Bibliography of chapter 4.	134
5. Numerical modeling of a thermal problem	135
5.1. Introduction	135
5.2. A hierarchy of models	136
5.2.1. A fluid model	136

5.2.2. Simplification of the fluid model : derivation of a one-dimensional equation	140
5.2.3. Behavior of the solutions of the one-dimensional problem	145
5.3. Numerical simulation of the one-dimensional problem	148
5.3.1. Some analytic solutions	148
5.3.2. A fractional step method	151
5.3.3. Numerical tests of the fractional step method	153
5.3.4. Numerical simulation of the relaxation system	158
5.4. Conclusion	159
Bibliography of chapter 5.	159
6. Eigenvalue problem and spectral methods	161
6.1. Introduction	161
6.2. Some mathematical results	163
6.2.1. Spectral theory of elliptic operators with homogeneous Dirichlet boundary conditions	163
6.2.2. A spectral method for the solution the Laplace equation with Dirichlet boundary conditions	166
6.2.3. A resonance phenomenon	169
6.2.4. Numerical illustrations	170
6.2.5. Discussion	174
6.3. Approximation of the eigenmodes of an elliptic operator	174
6.3.1. With the finite difference method	175
6.3.2. Variational formulation of eigenvalue problems	181
6.4. The inverse power method	184
6.4.1. Computation of the eigenvalue with smallest modulus	185
6.4.2. Computation of the first eigenvalues of a matrix	189
6.4.3. First eigenmodes of the problem $A\epsilon = \lambda M\epsilon$	191
6.5. Illustrations	192
6.6. Spectral methods	196
6.6.1. The weighted residues method	196
6.6.2. Use of Tchebycheff polynomials and of the fast Fourier transform	198
6.6.3. Implementation of the spectral method	202
6.6.4. Discussion	205
Bibliography of chapter 6	206
7. Error analysis for the finite element method	207
7.1. Introduction	207
7.2. A priori error analysis in one space dimension	209
7.3. A posteriori error analysis in one space dimension	210
7.4. Error analysis in two space dimension	218
7.4.1. Introduction	218
7.4.2. Basic estimates	219
7.4.3. A priori H_0^1 error analysis in two space dimension	220
7.4.4. A priori L^2 error estimate in two space dimension	221
7.4.5. A posteriori H_0^1 error estimate	222
7.4.6. A posteriori L^2 error estimate	230
7.5. Proof of technical results	231
Bibliography of chapter 7.	236
Answer to exercices	237
Index	255

SCIENCES SUP

Lionel Sainsaulieu

CALCUL SCIENTIFIQUE

Cours et exercices corrigés

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants en licence et maîtrise de mathématiques appliquées, ainsi qu'aux élèves des écoles d'ingénieurs. Il peut également servir de référence aux physiciens.

Il réunit les principales méthodes employées pour la résolution numérique des problèmes de l'ingénieur (méthode des différences finies, méthode des éléments finis, algorithmes de résolution des systèmes linéaires, problèmes de valeurs propres et méthodes spectrales, etc.).

Ces méthodes sont mises en œuvre à travers des exemples concrets et de nombreuses figures illustrent leurs qualités et défauts. Des exercices corrigés ponctuent l'exposé.

Cette nouvelle édition, entièrement revue et corrigée, présente un nouveau chapitre, consacré à l'analyse d'erreur pour la méthode des éléments finis.



2^e édition

LIONEL SAINSAULIEU,
ingénieur
à la direction de la
recherche de Renault
SA, a été responsable
de l'enseignement
du calcul scientifique
à l'École nationale
des Ponts et Chaussées.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA NATURE
ET DE LA VIE



ISBN 2 10 004551 2
Code 044551

