

Walter Rudin

2^e CYCLE • AGRÉGATION

Analyse réelle et complexe

Cours et exercices

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin nx + \cos nx \right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2}$$
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = e^{\frac{1}{2}}$$
$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$$

3^e édition

DUNOD

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE.....	XI
AVERTISSEMENT.....	XIII
PROLOGUE. — <i>La fonction exponentielle</i>	1
CHAPITRE PREMIER. — <i>Théorie abstraite de l'intégration</i>	5
Notations de la théorie des ensembles et terminologie.....	6
Notion de mesurabilité.....	7
Fonctions étagées.....	14
Propriétés élémentaires des mesures.....	15
Arithmétique dans $[0, \infty]$	17
Intégration de fonctions positives.....	18
Intégration de fonctions complexes.....	22
Rôle des ensembles de mesure nulle.....	25
Exercices.....	29
Notes historiques et textes choisis.....	31
CHAPITRE 2. — <i>Mesures positives de Borel</i>	43
Espaces vectoriels.....	43
Preliminaires topologiques.....	45
Théorème de représentation de Riesz.....	50
Propriétés de régularité des mesures de Borel.....	56
Mesure de Lebesgue.....	58
Propriétés de continuité des fonctions mesurables.....	63
Exercices.....	65
Notes historiques et textes choisis.....	69
CHAPITRE 3. — <i>Espaces L^p</i>	77
Fonctions convexes et inégalités.....	77
Espaces L^p	80
Approximation par des fonctions continues.....	84
Exercices.....	85
Notes historiques et textes choisis.....	90
CHAPITRE 4. — <i>Théorie élémentaire des espaces de Hilbert</i>	99
Produits scalaires et formes linéaires.....	99
Systèmes orthonormaux.....	104

Séries trigonométriques.....	109
Exercices.....	113
Notes historiques et textes choisis.....	116
CHAPITRE 5. — <i>Exemples des techniques d'utilisation des espaces de Banach</i>	125
Espaces de Banach.....	125
Conséquences du théorème de Baire.....	126
Séries de Fourier de fonctions continues.....	130
Coefficients de Fourier des fonctions de L^1	132
Le théorème de Hahn-Banach.....	133
Une approche abstraite de l'intégrale de Poisson.....	136
Exercices.....	139
Notes historiques et textes choisis.....	143
CHAPITRE 6. — <i>Mesures complexes</i>	149
Variation totale.....	149
Absolue continuité.....	152
Conséquences du théorème de Radon-Nikodym.....	156
Formes linéaires bornées sur L^p	158
Théorème de représentation de Riesz.....	160
Exercices.....	163
Notes historiques.....	165
CHAPITRE 7. — <i>Différentiation</i>	169
Dérivées des mesures.....	169
Théorème fondamental du calcul.....	177
Applications différentiables.....	182
Exercices.....	187
Notes historiques et textes choisis.....	191
CHAPITRE 8. — <i>Intégration sur les espaces produits</i>	199
Mesurabilité sur les produits cartésiens.....	199
Mesure produit.....	201
Théorème de Fubini.....	202
Complétion d'une mesure produit.....	205
Convolution.....	207
Fonctions de répartition.....	209
Exercices.....	211
Notes historiques et textes choisis.....	215
CHAPITRE 9. — <i>La transformation de Fourier</i>	219
Propriétés formelles.....	219
Le théorème d'inversion.....	221
Le théorème de Plancherel.....	225
L'algèbre de Banach L^1	229
Exercices.....	232
Notes historiques et textes choisis.....	235
CHAPITRE 10. — <i>Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes</i>	241
Différentiation complexe.....	241

Intégration sur des chemins	245
Le théorème local de Cauchy	248
La représentation en série entière	251
Le théorème de l'image ouverte	256
Le théorème global de Cauchy	259
Le calcul des résidus	265
Exercices	268
Notes historiques	272
CHAPITRE 11. — Fonctions harmoniques	275
Les équations de Cauchy-Riemann	275
L'intégrale de Poisson	276
La propriété de la moyenne	280
Le comportement à la frontière des intégrales de Poisson	281
Théorèmes de représentation	286
Exercices	290
Notes historiques et textes choisis	294
CHAPITRE 12. — Le principe du maximum	297
Introduction	297
Lemme de Schwarz	297
La méthode de Phragmen-Lindelöf	299
Un théorème d'interpolation	303
Une réciproque du théorème du maximum	305
Exercices	306
Notes historiques	308
CHAPITRE 13. — Approximation par des fonctions rationnelles	310
Préparation	310
Le théorème de Runge	313
Le théorème de Mittag-Leffler	315
Domaines simplement connexes	316
Exercices	318
Notes historiques et textes choisis	320
CHAPITRE 14. — Représentation conforme	326
Conservation des angles	326
Homographies	327
Familles normales	329
Le théorème de l'application conforme de Riemann	330
La classe S	332
Continuité à la frontière	335
Image conforme d'une couronne	337
Exercices	338
Notes historiques et textes choisis	344
CHAPITRE 15. — Zéros des fonctions holomorphes	348
Produits infinis	348
Le théorème de factorisation de Weierstrass	351
Un théorème d'interpolation	354

Formule de Jensen.....	356
Produits de Blaschke.....	358
Le théorème de Müntz-Szász.....	361
Exercices.....	363
Notes historiques.....	367
CHAPITRE 16. — <i>Le prolongement analytique</i>	369
Points réguliers et points singuliers.....	369
Prolongement le long d'une courbe.....	372
Le théorème de monodromie.....	375
Construction d'une fonction modulaire.....	376
Le théorème de Picard.....	379
Exercices.....	380
Notes historiques.....	383
CHAPITRE 17. — <i>Espaces H^p</i>	385
Fonctions sous-harmoniques.....	385
Les espaces H^p et N	387
Théorème de F. et M. Riesz.....	390
Théorèmes de factorisation.....	391
L'opérateur de déplacement.....	395
Fonctions conjuguées.....	398
Exercices.....	400
Notes historiques.....	403
CHAPITRE 18. — <i>Théorie élémentaire des algèbres de Banach</i>	404
Introduction.....	404
Les éléments inversibles.....	405
Idéaux et homomorphismes.....	409
Applications.....	411
Exercices.....	415
Notes historiques.....	417
CHAPITRE 19. — <i>Transformées de Fourier holomorphes</i>	418
Introduction.....	418
Deux théorèmes de Paley et Wiener.....	419
Classes quasi-analytiques.....	422
Le théorème de Denjoy-Carleman.....	425
Exercices.....	428
Notes historiques.....	430
CHAPITRE 20. — <i>Approximation uniforme par des polynômes</i>	431
Introduction.....	431
Quelques lemmes.....	431
Théorème de Mergelyan.....	434
Exercices.....	437
Notes historiques.....	438

TABLE DES MATIÈRES

IX

ANNEXE. — <i>Théorème de maximalité de Hausdorff</i>	439
BIBLIOGRAPHIE.....	441
LISTE DES SYMBOLES PARTICULIERS.....	446
INDEX.....	447

SCIENCES SUP

Walter Rudin

ANALYSE RÉELLE ET COMPLEXE

Cours et exercices

Devenu un classique, cet ouvrage présente les techniques de base et les théorèmes fondamentaux pour un cours de second cycle. L'accent est mis sur les profondes connexions reliant les domaines traditionnellement disjoints de l'analyse : sont ainsi réunies l'analyse réelle et l'analyse complexe. Le livre aborde également quelques-unes des idées qui fondent l'analyse fonctionnelle.

Cette troisième édition contient un nouveau chapitre consacré à la différentiation, et il permet au lecteur de se familiariser avec les fonctions maximales. Les notions d'équicontinuité et de convergence sont présentées avec plus de précision, ainsi que le comportement à la frontière des applications conformes étudiées par le moyen du théorème de Lindelöf sur les valeurs asymptotiques des fonctions holomorphes bornées dans un disque.

Cette traduction propose en fin de chaque chapitre, à la suite des exercices d'application, des notes historiques rédigées par le traducteur, souvent accompagnées de textes anciens. Ces ajouts permettent au lecteur de mieux appréhender le développement de l'analyse.



WALTER RUDIN

est professeur à l'université
du Wisconsin (Madison).



9 782100 040049

ISBN 2 10 004004 9
Code 044004

<http://www.dunod.com>

