

JEAN-PIERRE MARCO

Analyse pour la licence

Cours avec exercices corrigés

M
Enseignement
des
Mathématiques

MASSON



Table des matières

Avant-propos	IX
Conventions, notations et rappels	X
Topologie générale	1
Introduction	1
1. Espaces topologiques	4
1.1 Topologies, espaces topologiques	4
1.2 Notions ensemblistes associées à une topologie	10
2. Espaces métriques	16
2.1 Distances et espaces métriques	16
2.2 La topologie d'un espace métrique	23
2.3 Métrisabilité. Espaces métrisables	26
3. Limites et continuité	29
3.1 Continuité	30
3.2 Limites	36
3.3 Produits et quotients	41
3.4 Exemples et applications	45
3.5 Continuité et densité, prolongements	47
3.6 Suites de fonctions	51
4. Espaces complets	53
4.1 Espaces métriques complets	53
4.2 Applications aux problèmes de convergence	61
4.3 Approximations successives et point fixe	63
4.4 La propriété de Baire	66
4.5 Le complété d'un espace métrique	70
5. Espaces topologiques compacts	73
5.1 Espaces topologiques compacts	74
5.2 Espaces métriques compacts	78
5.3 Compacité et produit	83
5.4 Applications pratiques de la compacité	86
5.5 Espaces localement compacts	90
6. Espaces topologiques connexes	93
6.1 Espaces connexes	94
6.2 Connexité et continuité	97

6.3 Applications pratiques de la connexité	102
6.4 Connexité locale	104
Espaces vectoriels normés	107
Introduction	107
1. Définitions générales	109
1.1 Espaces vectoriels normés	109
1.2 Applications linéaires et multilinéaires continues	117
1.3 Espaces normés de dimension finie	124
2. Séries et familles sommables	126
2.1 Définitions et exemples	127
2.2 Séries et familles dans les espaces de Banach	134
2.3 Quelques exemples	141
3. Espaces de Hilbert	144
3.1 Formes hermitiennes et espaces de Hilbert	144
3.2 La projection orthogonale	148
3.3 Bases hilbertiennes	154
Mesure et intégration	159
Introduction	159
1. Rappels sur l'intégrale de Riemann	163
1.1 Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier	163
1.2 Intégrale de Riemann d'une fonction réglée	168
1.3 Intégrabilité au sens de Riemann	171
1.4 Les propriétés de l'intégrale de Riemann	176
2. Espaces mesurables et mesures	183
2.1 Espaces mesurables	183
2.2 Fonctions numériques mesurables	188
2.3 Mesures et espaces mesurés	195
3. L'intégrale sur un espace mesuré	200
3.1 Première présentation	201
3.2 Deuxième présentation	206
3.3 Les théorèmes de convergence	214
3.4 Mesures images et intégrale	218
4. Construction de mesures	219
4.1 L'espace mesuré associé à une mesure extérieure	220

4.2 Un théorème général d'unicité.....	226
4.3 Mesures boréliennes.....	229
4.4 Mesures de Radon et théorème de Riesz.....	233
5. Mesure et intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}$	240
5.1 La mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$	240
5.2 L'intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}$	249
6. Intégration sur les produits	253
6.1 Rappels et compléments sur les tribus produit.....	253
6.2 Mesures produit.....	256
7. La mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$	264
7.1 L'espace de Lebesgue par le théorème de Riesz.....	264
7.2 Les autres constructions de l'espace de Lebesgue.....	271
7.3 Le théorème du changement de variables.....	273
8. Applications pratiques de l'intégration	278
8.1 L'interversion de limites et d'intégrales.....	278
8.2 Interversion de $\sum$ et $\int$	283
9. Les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p	285
9.1 Définitions et propriétés pour $1 \leq p \leq +\infty$	285
9.2 Le théorème de Riesz-Fisher.....	291
9.3 Les espaces $\mathcal{L}^\infty$ et L^∞	294
9.4 Premiers résultats de dualité.....	297
Correction des exercices	300
Bibliographie	314
Index	315

JEAN-PIERRE MARCO

Analyse pour la licence

Cours avec exercices corrigés

Enseignement
des
Mathématiques

L'ouvrage

- Ce cours expose la partie « Analyse fonctionnelle » du programme d'analyse en licence, correspondant également au programme actuel de l'agrégation. Il est formé de trois parties.

Topologie générale : espaces topologiques et métriques, limites et continuité, espaces complets, espaces topologiques compacts et connexes.

Espaces vectoriels normés : espaces normés, séries et familles sommables, espaces de Hilbert.

Mesure et intégration : rappels sur l'intégrale de Riemann, espaces mesurables et mesures, intégrale sur un espace mesuré, construction de mesures, mesure et intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}$, intégration sur les produits, mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, applications pratiques de l'intégration, espaces $\mathcal{L}^p$ et $\mathbf{L}^p$.

- L'auteur s'est particulièrement attaché à l'explication des idées, de leurs relations mutuelles et de leurs applications à la résolution de problèmes précis.
- Pour faciliter la compréhension des concepts introduits et l'acquisition des connaissances, de nombreux exercices complètent le cours, dont les corrigés sont rassemblés en fin d'ouvrage.

Le public

- Étudiants en second cycle universitaire de mathématiques.
- Candidats à l'agrégation de mathématiques.

L'auteur

Jean-Pierre Marco est maître de conférences à l'université de Paris VI.

ISBN : 2-225-82998-5



9 782225 829987