

Roger Godement

Analyse mathématique I

Convergence,
fonctions élémentaires

2ème édition corrigée



Springer

Table des matières du volume I

Préface. L'analyse et ses adhérences	V
I – Ensembles et Fonctions	1
§1. <i>La théorie des ensembles</i>	8
1 – Appartenance, égalité, ensemble vide	8
2 – Ensemble défini par une relation. Intersections et réunions	11
3 – Entiers naturels. Ensembles infinis	16
4 – Couples, produits cartésiens, ensembles de parties	19
5 – Fonctions, applications, correspondances	22
6 – Injections, surjections, bijections	26
7 – Ensembles équipotents. Ensembles dénombrables	29
8 – Les différentes sortes d'infini	31
9 – Ordinaux et cardinaux	35
§2. <i>La logique des logiciens</i>	42
II – Convergence : Variables discrètes	47
§1. <i>Suites et séries convergentes</i>	47
0 – Introduction : qu'est-ce qu'un nombre réel ?	47
1 – Opérations algébriques et relation d'ordre : axiomes de \mathbb{R}	55
2 – Inégalités et intervalles	57
3 – Propriétés locales ou asymptotiques	60
4 – La notion de limite. Continuité et dérivabilité	65
5 – Suites convergentes : définition et exemples	69
6 – Le langage des séries	79
7 – Les merveilles de la série harmonique	85
8 – Opérations algébriques sur les limites	99
§2. <i>Séries absolument convergentes</i>	102
9 – Suites croissantes. Borne supérieure d'un ensemble de nombres réels	102
10 – La fonction $\log x$. Racines d'un nombre positif	107
11 – Qu'est-ce qu'une intégrale ?	115

XVIII Table des matières du volume I

12 – Séries à termes positifs	119
13 – Séries alternées	125
14 – Séries absolument convergentes classiques	129
15 – Convergence en vrac : cas général	133
16 – Relations de comparaison. Critères de Cauchy et d'Alembert	138
17 – Limites infinies	144
18 – Convergence en vrac : associativité	155
§3. <i>Premières notions sur les fonctions analytiques</i>	155
19 – La série de Taylor	165
20 – Le principe du prolongement analytique	170
21 – La fonction $\cot x$ et les séries $\sum 1/n^{2k}$	175
22 – Multiplication des séries. Composition des fonctions analytiques. Séries formelles	175
23 – Les fonctions elliptiques de Weierstrass	186
III – Convergence : Variables continues	197
§1. <i>Le théorème des valeurs intermédiaires</i>	197
1 – Valeurs limites d'une fonction. Ensembles ouverts et fermés	197
2 – Fonctions continues	202
3 – Limites à droite et à gauche d'une fonction monotone	208
4 – Le théorème des valeurs intermédiaires	211
§2. <i>Convergence uniforme</i>	216
5 – Limites de fonctions continues	216
6 – Un dérapage de Cauchy	222
7 – La distance de la convergence uniforme	227
8 – Séries de fonctions continues. Convergence normale	231
§3. <i>Bolzano-Weierstrass et critère de Cauchy</i>	237
9 – Intervalles emboîtés, Bolzano-Weierstrass, ensembles compacts ..	237
10 – Le critère général de convergence de Cauchy	240
11 – Le critère de Cauchy pour les séries : exemples	247
12 – Limites de limites	252
13 – Passage à la limite dans une série de fonctions	252
§4. <i>Fonctions dérivables</i>	257
14 – Dérivées d'une fonction	257
15 – Règles de calcul des dérivées	266
16 – Le théorème des accroissements finis	265
17 – Suites et séries de fonctions dérivables	279
18 – Extensions à la convergence en vrac	285

§5. <i>Fonctions dérivables de plusieurs variables</i>	286
19 – Dérivées partielles et différentielles	289
20 – Différentiabilité des fonctions de classe C^1	291
21 – Dérivation des fonctions composées	294
22 – Limites de fonctions dérivables	300
23 – Permutabilité des dérivations	303
24 – Fonctions implicites	306
<i>Appendice au Chapitre III. Généralisations</i>	321
1 – Espaces cartésiens et espaces métriques généraux	321
2 – Ensembles ouverts ou fermés	324
3 – Limites et critère de Cauchy dans un espace métrique; espaces complets	326
4 – Fonctions continues	329
5 – Séries absolument convergentes dans un espace de Banach	331
6 – Applications linéaires continues	336
7 – Espaces compacts	340
8 – Espaces topologiques	342
IV – Puissances, Exponentielles, Logarithmes, Fonctions Trigonométriques	345
§1. <i>Construction directe</i>	345
1 – Exposants rationnels	345
2 – Définition des exposants réels	347
3 – Calcul des exposants réels	350
4 – Logarithme de base a . Fonctions puissances	352
5 – Comportements asymptotiques	354
6 – Caractérisations des fonctions exponentielles, puissances et logarithmiques	357
7 – Dérivées des fonctions exponentielles : méthode directe	360
8 – Dérivées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmiques	363
§2. <i>Développements en séries</i>	366
9 – Le nombre e . Logarithme népérien	366
10 – Série exponentielle et logarithme : méthode directe	372
11 – La série du binôme de Newton	372
12 – La série entière du logarithme	381
13 – La fonction exponentielle comme limite	391
14 – Exponentielles imaginaires et fonctions trigonométriques	395
15 – La relation d'Euler chez Euler	406
16 – Fonctions hyperboliques	412

XX Table des matières du volume I

§3. <i>Produits infinis</i>	417
17 - Produits infinis absolument convergents	417
18 - Le produit infini de la fonction sinus	420
19 - Développement en série d'un produit infini	426
20 - Etranges identités	431
§4. <i>La topologie des fonctions $\text{Arg}(z)$ et $\text{Log } z$</i>	438
Index	449
Table des matières du volume II	455

Table des matières du volume II

V – Calcul Différentiel et Intégral	II/1
§1. <i>L'intégrale de Riemann</i>	II/1
1 – Intégrales supérieure et inférieure d'une fonction bornée	II/1
2 – Propriétés élémentaires des intégrales	II/5
3 – Sommes de Riemann. La notation intégrale	II/13
4 – Limites uniformes de fonctions intégrables	II/15
5 – Applications aux séries de Fourier et aux séries entières	II/19
§2. <i>Conditions d'intégrabilité</i>	II/25
6 – Le théorème de Borel-Lebesgue	II/25
7 – Intégrabilité des fonctions réglées ou continues	II/28
8 – La continuité uniforme et ses conséquences	II/31
9 – Dérivation et intégration sous le signe \int	II/35
10 – Fonctions semi-continues	II/40
11 – Intégration des fonctions semi-continues	II/48
§3. <i>Le "Théorème Fondamental" (TF)</i>	II/52
12 – Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral	II/52
13 – Extension du théorème fondamental aux fonctions réglées	II/60
14 – Fonctions convexes; inégalités de Hölder et Minkowski	II/66
§4. <i>Intégration par parties</i>	II/74
15 – Intégration par parties	II/74
16 – La série de Fourier des signaux carrés	II/77
17 – La formule de Wallis	II/80
§5. <i>La formule de Taylor</i>	II/83
18 – La formule de Taylor	II/83
§6. <i>La formule du changement de variable</i>	II/92
19 – Changement de variable dans une intégrale	II/92
20 – Intégration des fractions rationnelles	II/96

§7. <i>Intégrales de Riemann généralisées</i>	II/103
21 – Intégrales convergentes : exemples et définitions	II/103
22 – Intégrales absolument convergentes	II/105
23 – Passage à la limite sous le signe \int	II/110
24 – Séries et intégrales	II/116
25 – Dérivation sous le signe \int	II/119
26 – Intégration sous le signe \int	II/125
§8. <i>Théorèmes d'approximation</i>	II/130
27 – Comment rendre C^∞ une fonction qui ne l'est pas	II/130
28 – Approximation par des polynômes	II/136
29 – Fonctions ayant des dérivées données en un point	II/139
§9. <i>Mesures de Radon dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}</i>	II/143
30 – Mesures de Radon sur un compact	II/143
31 – Mesures sur un ensemble localement compact	II/153
32 – La construction de Stieltjes	II/160
33 – Application aux intégrales doubles	II/168
§10. <i>Les distributions de Schwartz</i>	II/171
34 – Définition et exemples	II/171
35 – Dérivées d'une distribution	II/176
VI – Calculs Asymptotiques	II/181
§1. <i>Développements limités</i>	II/181
1 – Relations de comparaison	II/181
2 – Règles de calcul	II/183
3 – Développements limités	II/184
4 – Développement limité d'un quotient	II/186
5 – Le critère de convergence de Gauss	II/188
6 – La série hypergéométrique	II/190
7 – Etude asymptotique de l'équation $xe^x = t$	II/192
8 – Asymptotique des racines de $\sin x \cdot \log x = 1$	II/194
9 – L'équation de Kepler	II/196
10 – Asymptotique des fonctions de Bessel	II/199
§2. <i>Formules sommatoires</i>	II/211
11 – Cavalieri et les sommes $1^k + 2^k + \dots + n^k$	II/211
12 – Jakob Bernoulli	II/213
13 – La série entière de $\cot z$	II/218
14 – Euler et la série entière de $\arctan x$	II/221
15 – Euler, Maclaurin et leur formule sommatoire	II/225
16 – La formule d'Euler-Maclaurin avec reste	II/226

.. II/103	17 – Calcul d'une intégrale par la méthode des trapèzes	II/228
.. II/103	18 – La somme $1 + 1/2 + \dots + 1/n$, le produit infini de la	
.. II/105	fonction Γ et la formule de Stirling	II/229
.. II/110	19 – Prolongement analytique de la fonction zêta	II/234
.. II/116	VII – Analyse Harmonique et Fonctions Holomorphes	II/237
.. II/119	1 – La formule intégrale de Cauchy pour un cercle	II/237
.. II/125	§1. <i>L'analyse sur le cercle unité</i>	II/241
.. II/130	2 – Fonctions et mesures sur le cercle unité	II/241
... II/130	3 – Coefficients de Fourier	II/248
.. II/136	4 – Produit de convolution dans \mathbb{T}	II/252
... II/139	5 – Suites de Dirac dans \mathbb{T}	II/257
.. II/143	§2. <i>Théorèmes élémentaires sur les séries de Fourier</i>	II/261
... II/143	6 – Séries de Fourier absolument convergentes	II/261
.. II/153	7 – Calculs hilbertiens	II/262
... II/160	8 – L'égalité de Parseval-Bessel	II/264
... II/168	9 – Séries de Fourier des fonctions dérivables	II/271
... II/171	10 – Distributions sur \mathbb{T}	II/274
... II/171	§3. <i>La méthode de Dirichlet</i>	II/282
... II/176	11 – Le théorème de Dirichlet	II/282
... II/181	12 – Le théorème de Fejér	II/288
... II/181	13 – Séries de Fourier uniformément convergentes	II/290
... II/181	§4. <i>Fonctions analytiques et holomorphes</i>	II/294
... II/183	14 – Analyticité des fonctions holomorphes	II/295
... II/184	15 – Le principe du maximum	II/297
... II/186	16 – Fonctions analytiques dans une couronne. Points singuliers	
... II/188	Fonctions méromorphes	II/300
... II/190	17 – Fonctions holomorphes périodiques	II/306
... II/192	18 – Les théorèmes de Liouville et de d'Alembert-Gauss	II/308
... II/194	19 – Limites de fonctions holomorphes	II/317
... II/196	20 – Produits infinis de fonctions holomorphes	II/320
... II/199	§5. <i>Fonctions harmoniques et séries de Fourier</i>	II/328
... II/211	21 – Fonctions analytiques définies par une intégrale de Cauchy ...	II/328
... II/211	22 – La fonction de Poisson	II/330
... II/213	23 – Applications aux séries de Fourier	II/332
... II/218	24 – Fonctions harmoniques	II/335
... II/221	25 – Limites de fonctions harmoniques	II/339
... II/225	26 – Le problème de Dirichlet pour un disque	II/342
... II/226		

§6. <i>Des séries aux intégrales de Fourier</i>	II/345
27 – La formule sommatoire de Poisson	II/345
28 – La fonction θ de Jacobi	II/350
29 – Formules fondamentales de la transformation de Fourier	II/354
30 – Extensions de la formule d'inversion	II/357
31 – Transformation de Fourier et dérivation	II/362
32 – Distributions tempérées	II/367
Postface. Science, technologie, armement	II/377
Index	II/467
Table des matières du volume I	II/471

Roger Godement Analyse mathématique

- vol. 1 Convergence, fonctions élémentaires
- vol. 2 Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes
- vol. 3 et 4 Fonctions analytiques, intégration, transformation de Fourier

Les deux premiers volumes sont consacrés aux fonctions dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , y compris la théorie élémentaire des séries et intégrales de Fourier et une partie de celle des fonctions holomorphes. L'exposé, non strictement linéaire, combine indications historiques et raisonnements rigoureux. Il montre la diversité des voies d'accès aux principaux résultats afin de familiariser le lecteur avec les méthodes de raisonnement et idées fondamentales plutôt qu'avec les techniques de calcul, point de vue utile aussi aux personnes travaillant seules.

Les volumes 3 et 4 traiteront principalement des fonctions analytiques (théorie de Cauchy, théorie analytique des nombres et fonctions modulaires), ainsi que du calcul différentiel sur les variétés, avec un court exposé de l'intégrale de Lebesgue, en suivant d'assez près le célèbre cours donné longtemps par l'auteur à l'Université Paris VII.

On reconnaîtra dans ce nouvel ouvrage le style inimitable de l'auteur, et pas seulement par son refus de l'écriture condensée en usage dans de nombreux manuels.

ISBN 3-540-42057-6



<http://www.springer.de>