

Analyse et algèbre

Cours de mathématiques de deuxième année avec
exercices corrigés et illustrations avec Maple



Stéphane Balac
Laurent Chupin

Analyse et algèbre

**Cours de mathématiques de deuxième année avec
exercices corrigés et illustrations avec Maple**

Cet ouvrage, réunissant en un tout cohérent analyse et algèbre, s'adresse de manière plus spécifique aux élèves de deuxième année des cycles préparatoires intégrés des écoles d'ingénieurs mais il peut être utilisé avec profit par tout étudiant se destinant à des études supérieures d'ingénieur. Il est la suite naturelle de l'ouvrage «Algèbre et analyse, Cours de mathématiques de première année» publié dans la même collection par S. Balac et F. Sturm. Il est issu de l'enseignement dispensé par les auteurs dans la filière de premier cycle international ASINSA de l'INSA de Lyon. À ce titre, il ne constitue pas seulement une somme de connaissances mathématiques de deuxième année de l'enseignement supérieur mais vise à présenter de manière précise les résultats essentiels à une formation d'ingénieur généraliste.

L'ouvrage est divisé en 13 chapitres regroupés en 4 grandes parties: suites et séries de fonctions, algèbre bilinéaire, calcul différentiel et calcul intégral pour les fonctions de plusieurs variables. Chaque chapitre contient de courts exercices visant à tester la bonne compréhension des notions introduites et se termine par quelques exercices de synthèse. Une correction détaillée et commentée de tous les exercices est fournie en fin de chapitre. Le logiciel de calcul formel Maple est largement utilisé dans tout l'ouvrage pour illustrer les notions introduites.

STÉPHANE BALAC est Maître de conférence en mathématiques à l'Ecole Nationale Supérieure des Sciences Appliquées et de Technologie (ENSSAT) de Lannion. Agrégé de mathématiques, il a enseigné pendant plusieurs années les mathématiques en premier cycle à l'INSA de Lyon dans la filière classique et dans la filière internationale ASINSA. Docteur de l'Université de Rennes 1, ses recherches portent sur la modélisation mathématique et l'étude de méthodes numériques en électromagnétisme dans le cadre d'applications en imagerie médicale et plus récemment en optronique et télécommunications optiques.

LAURENT CHUPIN, ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, est Maître de conférence en mathématiques à l'INSA de Lyon. Il enseigne les mathématiques en premier cycle, principalement dans la filière internationale ASINSA. Il est Docteur de l'Université de Bordeaux 1 et chercheur à l'Institut Camille Jordan (Lyon). Ses recherches portent sur l'étude théorique et numérique de certaines équations aux dérivées partielles issues du domaine de la mécanique des fluides.



Table des matières

Préface	v
Avant-propos	vii
Introduction	ix
Table des matières	xi
Table des notations	xxi
1 Séries numériques	1
1.1 Définitions et premières propriétés	1
1.1.1 Définitions	1
1.1.2 Critère de Cauchy	9
1.1.3 Premières propriétés	10
1.2 Séries réelles à termes positifs	13
1.2.1 Propriétés générales	13
1.2.2 Critères de comparaison	14
1.2.3 Séries de référence	23
1.3 Séries absolument convergentes	28
1.3.1 Généralités	28
1.3.2 Règles de Cauchy et de D'Alembert	30
1.3.3 Produit de Cauchy de deux séries	37
1.4 Séries semi-convergentes	40
1.4.1 Définition	40
1.4.2 Séries alternées	41
1.4.3 Règle d'Abel	46
1.4.4 Séries trigonométriques	47
1.4.5 Séries ne relevant pas de la règle d'Abel	48
1.5 Groupement de termes et changement de l'ordre des termes	49
1.6 Exercices de synthèse	53
1.7 Solutions des exercices	55

2 Suites de fonctions	67
2.1 L'espace vectoriel des applications bornées	67
2.2 Convergence simple et convergence uniforme	70
2.2.1 Généralités	70
2.2.2 Convergence simple	70
2.2.3 Convergence uniforme	73
2.2.4 Propriétés	78
2.2.5 Critère de Cauchy pour la convergence uniforme	82
2.3 Propriétés de la limite d'une suite d'applications réelles	84
2.3.1 Limite simple d'une suite d'applications	84
2.3.2 Limite d'une suite d'applications continues	86
2.3.3 Limite d'une suite d'applications intégrables	89
2.3.4 Limite d'une suite d'applications dérivables	92
2.4 Plan d'étude de la convergence d'une suite d'applications	94
2.5 Exercices de synthèse	95
2.6 Solutions des exercices	97
3 Séries de fonctions	113
3.1 Convergence d'une série de fonctions	113
3.1.1 Définitions	113
3.1.2 Propriétés	122
3.2 Critères de convergence uniforme	125
3.2.1 Convergence normale	125
3.2.2 Convergence uniforme des séries alternées	130
3.2.3 Règle d'Abel pour la convergence uniforme	133
3.3 Propriétés de la somme d'une série de fonctions	134
3.4 Exercices de synthèse	144
3.5 Solutions des exercices	147
4 Fonctions complexes de la variable complexe	159
4.1 Fonctions complexes d'une variable réelle	160
4.1.1 Limite et continuité	160
4.1.2 Dérivabilité	161
4.1.3 Intégrabilité	162
4.1.4 Applications bornées	162
4.1.5 Inégalité des accroissements finis	163

4.2	Topologie du plan complexe	164
4.2.1	Ouverts et fermés de $\mathbb{C}$	164
4.2.2	Intérieur et adhérence d'un ensemble	168
4.2.3	Arcs géométriques dans le plan complexe	170
4.3	Fonctions complexes d'une variable complexe	173
4.3.1	Généralités	173
4.3.2	Quelques exemples	175
4.3.3	Représentations graphiques	176
4.4	Limite d'une fonction de la variable complexe	178
4.4.1	Définition de la limite	178
4.4.2	Étude de la limite	181
4.4.3	Propriétés de la limite	184
4.5	Continuité d'une fonction de la variable complexe	189
4.5.1	Définitions et premières propriétés	189
4.5.2	Opérations algébriques sur les applications continues	191
4.6	Dérivabilité d'une fonction de la variable complexe	193
4.6.1	Fonctions holomorphes et fonctions différentiables	193
4.6.2	Propriétés des fonctions holomorphes	198
4.6.3	Dérivées successives	202
4.7	Fonctions usuelles de la variable complexe	204
4.7.1	La fonction exponentielle	204
4.7.2	Fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques	208
4.7.3	La fonction logarithme	213
4.8	Suites et séries de fonctions de la variable complexe	216
4.8.1	Suites de fonctions de la variable complexe	216
4.8.2	Séries de fonctions de la variable complexe	217
4.8.3	Continuité des fonctions usuelles	218
4.9	Exercices de synthèse	220
4.10	Solutions des exercices	222
5	Séries entières	231
5.1	Série entière de la variable complexe	231
5.1.1	Généralités sur les séries entières	231
5.1.2	Rayon de convergence d'une série entière	232
5.1.3	Détermination du rayon de convergence	237
5.1.4	Convergence uniforme d'une série entière	246

5.2	Fonctions définies par une série entière	248
5.2.1	Continuité de la fonction somme	248
5.2.2	Dérivabilité de la fonction somme	249
5.2.3	Fonction développable en série entière	253
5.3	Série entière de la variable réelle	260
5.3.1	Propriétés des séries entières réelles	260
5.3.2	Développement en série entière	264
5.3.3	Quelques utilisations des séries entières	267
5.3.4	Développement en série entière des fonctions usuelles . .	270
5.4	Séries entières et équations différentielles	271
5.4.1	Résolution d'une équation différentielle à l'aide de séries	271
5.4.2	La méthode de Frobenius	275
5.4.3	Équations différentielles et développement en série . . .	279
5.5	Exercices de synthèse	280
5.6	Solutions des exercices	284
6	Séries de Fourier	301
6.1	Séries trigonométriques	301
6.1.1	Convergence d'une série trigonométrique	301
6.1.2	Propriétés de la somme d'une série trigonométrique . .	302
6.2	Décomposition en série de Fourier	305
6.2.1	Coefficients de Fourier	305
6.2.2	Propriétés des coefficients de Fourier	314
6.2.3	Convergence d'une série de Fourier	320
6.2.4	Quelques exemples	325
6.3	Exercices de synthèse	329
6.4	Solutions des exercices	332
7	Espaces métriques et espaces vectoriels normés	345
7.1	Distance et espace métrique	345
7.2	Normes et espaces vectoriels normés	356
7.3	Topologie dans un espace métrique	369
7.3.1	Ensembles ouverts et ensembles fermés	369
7.3.2	Intérieur et adhérence d'un ensemble	377
7.3.3	Ensembles bornés	382
7.3.4	Espaces connexes	384

7.3.5	Distance à un ensemble	386
7.4	Suites dans un espace métrique	388
7.4.1	Définitions et propriétés	388
7.4.2	Suites extraites	395
7.4.3	Suites de Cauchy	398
7.4.4	Caractérisation des fermés dans un espace métrique . .	410
7.4.5	Ensembles compacts	412
7.5	Exercices de synthèse	416
7.6	Solutions des exercices	418
8	Algèbre bilinéaire	437
8.1	Formes bilinéaires et formes quadratiques	437
8.1.1	Formes bilinéaires	437
8.1.2	Cas d'un espace vectoriel en dimension finie	440
8.1.3	Changement de base	442
8.1.4	Formes bilinéaires symétriques	446
8.1.5	Formes quadratiques	448
8.1.6	Orthogonalité	454
8.1.7	Bases orthogonales	458
8.1.8	Décomposition en somme de carrés de formes linéaires .	463
8.1.9	Classification des formes quadratiques	471
8.2	Produit scalaire sur un espace vectoriel	476
8.2.1	Produit scalaire	476
8.2.2	Espace euclidien	484
8.2.3	Procédé d'orthogonalisation de Schmidt	486
8.3	Isométries et matrices orthogonales	490
8.3.1	Isométries	490
8.3.2	Matrices orthogonales	492
8.3.3	Description géométrique des isométries	498
8.4	Diagonalisation des matrices symétriques réelles	503
8.5	Réduction des coniques et quadriques	506
8.5.1	Étude des coniques	506
8.5.2	Classification des coniques	509
8.5.3	Description des différents genres de coniques	510
8.5.4	Étude des quadriques	514
8.5.5	Classification des quadriques	515
8.6	Exercices de synthèse	520
8.7	Solutions des exercices	523

9 Limite et continuité	535
9.1 Limite et continuité dans un espace métrique	535
9.1.1 Limite d'une fonction	535
9.1.2 Continuité d'une fonction	546
9.1.3 Continuité uniforme	556
9.1.4 Applications lipschitziennes	558
9.1.5 Applications continues et topologie	561
9.2 Limite et continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$	565
9.3 Continuité des applications linéaires	572
9.4 Le théorème du point fixe	584
9.5 Exercices de synthèse	592
9.6 Solutions des exercices	594
10 Calcul différentiel	609
10.1 Différentiabilité dans un espace vectoriel	609
10.1.1 Applications différentiables	609
10.1.2 Opérations sur les applications différentiables	618
10.1.3 Utilisation des différentielles en physique	624
10.2 Différentiabilité en dimension finie	627
10.2.1 Dérivation selon un vecteur	627
10.2.2 Dérivées partielles	630
10.2.3 Matrice jacobienne	635
10.2.4 Cas des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$	641
10.3 Applications de classe C^q	645
10.3.1 Notion de dérivées d'ordre supérieur	645
10.3.2 Dérivations partielles d'ordre supérieur	647
10.3.3 Propriétés des applications de classe C^q	651
10.3.4 Cas des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$	653
10.3.5 Opérateurs différentiels	654
10.3.6 Théorèmes d'inversion locale et globale	663
10.3.7 Changements de coordonnées	666
10.4 Inégalité des accroissements finis ; formules de Taylor	677
10.4.1 Inégalité des accroissements finis	677
10.4.2 Formule de Taylor	683
10.5 Extrema d'une fonction réelle de plusieurs variables	687
10.5.1 Conditions nécessaires d'existence d'un extremum	688

10.5.2	Conditions suffisantes d'existence d'un extremum	692
10.6	Exercices de synthèse	697
10.7	Solutions des exercices	699
11	Courbes et surfaces	713
11.1	Trois définitions de courbes et de surfaces	713
11.1.1	Le règne des paramètres	713
11.1.2	Ensembles implicites	719
11.1.3	Courbes et surfaces cartésiennes	721
11.1.4	Premiers liens entre les différentes représentations	722
11.1.5	Quelques courbes et surfaces de référence	724
11.2	Surfaces cartésiennes dans l'espace	727
11.2.1	Courbes de niveau et lignes coordonnées	728
11.2.2	Plan tangent à une surface cartésienne	730
11.2.3	Position d'une surface par rapport à son plan tangent	732
11.3	Étude des arcs paramétrés	735
11.3.1	Classification des arcs	735
11.3.2	Propriétés des arcs paramétrés	743
11.3.3	Étude des arcs paramétrés dans le plan	750
11.3.4	Étude des arcs paramétrés dans l'espace	772
11.4	Étude des nappes paramétrées	788
11.4.1	Classification des nappes paramétrées	789
11.4.2	Régularité des nappes paramétrées	791
11.4.3	Étude des surfaces paramétrées dans l'espace	797
11.4.4	Arcs tracés sur une nappe	801
11.5	Théorème d'inversion locale en géométrie	804
11.5.1	Application à l'étude des courbes paramétrées	804
11.5.2	Application à l'étude des surfaces paramétrées	807
11.6	Théorème des fonctions implicites	809
11.6.1	Cas des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$	809
11.6.2	Étude des courbes implicites du plan	814
11.6.3	Cas des fonctions de $\mathbb{R}^{n+q}$ dans $\mathbb{R}^q$	819
11.6.4	Étude des surfaces implicites dans l'espace	826
11.6.5	Étude des courbes implicites dans l'espace	829
11.7	Exercices de synthèse	832
11.8	Solutions des exercices	836

✓ 12	Intégrale multiple	855
12.1	Définition et premières propriétés	855
12.1.1	Fonctions en escalier sur un pavé de $\mathbb{R}^n$	855
12.1.2	Intégrale d'une fonction en escalier	858
12.1.3	Fonctions Riemann-intégrables sur un pavé	861
12.1.4	Fonctions Riemann-intégrables sur un ensemble borné	865
12.1.5	Conditions d'intégrabilité	868
12.1.6	Propriétés des fonctions Riemann-intégrables	873
12.2	Calcul des intégrales multiples	875
12.2.1	Le théorème de Fubini	875
12.2.2	Intégration par pile et par tranche	881
12.3	Changement de variables pour une intégrale multiple	893
12.3.1	Changement de variables dans $\mathbb{R}^n$	893
12.3.2	Changement de variables polaire	900
12.3.3	Changement de variables cylindrique	905
12.3.4	Changement de variables sphérique	908
12.3.5	Exploitation de symétries	911
12.4	Intégrale multiple généralisée	915
12.5	Exercices de synthèse	921
12.6	Solutions des exercices	923
13	Intégration sur des courbes et des surfaces	937
13.1	Intégrale curviligne	937
13.1.1	Intégrer le long d'une courbe	938
13.1.2	Longueur d'une courbe	945
13.2	Circulation et formes différentielles	956
13.2.1	Formes différentielles de degré 1	956
13.2.2	Utilisation du formalisme des 1-formes en physique	966
13.2.3	Circulation d'une 1-forme	968
13.3	Intégrale de surface	973
13.3.1	Intégrer sur une surface	973
13.3.2	Aire d'une surface	979
13.4	Formule de Stokes	985
13.4.1	Généralités sur les formes de degré p	985
13.4.2	Intégrale d'une 2-forme	992
13.4.3	Intégrale d'une p -forme	994

13.4.4 Différentielle extérieure	996
13.4.5 Théorème de Stokes	998
13.5 Exercices de synthèse	1009
13.6 Solutions des exercices	1013

Bibliographie	1027
---------------	------

Index	1029
-------	------