

花如菖蒲
名不虛傳

名不虛傳

EMMANUEL TRÉLAT

CONTRÔLE OPTIMAL

THÉORIE & APPLICATIONS

花如菖蒲

VUIBERT

DEUXIÈME
ÉDITION

MATHÉMATIQUES
CONCRÈTES

« MATHÉMATIQUES CONCRÈTES »
collection dirigée par François Guénard

EMMANUEL TRÉLAT

CONTRÔLE OPTIMAL

THÉORIE & APPLICATIONS

DEUXIÈME ÉDITION

Dans les industries d'aujourd'hui où la notion de rendement est prépondérante – aéronautique et aérospatiale, automobile et robotique, internet et télécommunications, médecine et chimie, génie civil, etc. – *l'automaticien* conçoit, réalise, mais améliore aussi les *méthodes*.

La *théorie du contrôle* concerne les propriétés des systèmes sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Il s'agit le plus souvent de stabiliser un système pour le rendre insensible à certaines perturbations, ou bien de déterminer son meilleur fonctionnement possible (optimisation).

Volontairement orienté vers les *applications*, ce manuel de référence – qui expose du point de vue mathématique les bases théoriques du contrôle optimal – contient de nombreux *exercices*. Les applications numériques portent sur des problèmes de régulation tels que la stabilisation d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique ou le transfert orbital d'un satellite, et sur différents problèmes d'aéronautique, de transfert de fichiers informatiques, d'économie, de dynamique des populations, de chimie, de contrôle d'épidémies, etc.

Ancien élève de l'ENS Cachan, agrégé de mathématiques, ancien maître de conférences à l'Université Paris-Sud, Emmanuel Trélat est actuellement professeur à l'Université d'Orléans, où il enseigne le contrôle optimal et l'automatique en Master. Il travaille notamment avec EADS et le CNES sur des sujets de contrôle optimal appliqué à l'aéronautique.

ISBN 978 2 7117 2219 8



WWW.VUIBERT.FR

Couverture : Vuibert / Arnaud Martin

Illustration : Hiroshige, *Iris à Horikiri (Cent vues d'Edo)*, 1857



Table des matières

Avant-propos4

I Qu'est-ce que la théorie du contrôle ? 4

II Résumé du livre 6

1 Introduction : contrôle optimal d'un ressort8

I Présentation du problème. 8

II Modélisation mathématique. 9

III Quelques remarques sur l'équation 10

PARTIE 1

Contrôle optimal de systèmes linéaires15

2 Contrôlabilité18

I Ensemble accessible 18

II Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes 25

III Contrôlabilité des systèmes linéaires instationnaires. 31

3 Temps-optimalité34

I Existence de trajectoires temps-optimales. 34

II Condition nécessaire d'optimalité :
principe du maximum dans le cas linéaire 36

III Exemples 40

4 Théorie linéaire-quadratique49

I Existence de trajectoires optimales. 50

II Condition nécessaire et suffisante d'optimalité :
principe du maximum dans le cas LQ 53

III Fonction valeur et équation de Riccati 57

IV Applications de la théorie LQ 64

PARTIE 2

Théorie du contrôle optimal non linéaire79

5 Définitions et préliminaires81

I Application entrée-sortie 81

II Contrôlabilité. 84

III Contrôles singuliers 90

6	Contrôle optimal	94
I	Présentation du problème	94
II	Existence de trajectoires optimales	94
7	Principe du maximum de Pontryagin	97
I	Cas sans contrainte sur le contrôle : principe du maximum faible	97
II	Principe du maximum de Pontryagin	103
III	Exemples et exercices	110
IV	Contrôle optimal et stabilisation d'une navette spatiale	136
8	Théorie d'Hamilton-Jacobi	163
I	Introduction	163
II	Solutions de viscosité	164
III	Equations d'Hamilton-Jacobi en contrôle optimal	172
9	Méthodes numériques en contrôle optimal	178
I	Méthodes indirectes	178
II	Méthodes directes	182
III	Quelle méthode choisir ?	186

PARTIE 3

Annexe	199
10 Rappels d'algèbre linéaire	200
I Exponentielle de matrice	200
II Réduction des endomorphismes	201
11 Théorème de Cauchy-Lipschitz	204
I Un énoncé général	204
II Systèmes différentiels linéaires	208
III Applications en théorie du contrôle	211
12 Modélisation d'un système de contrôle linéaire	213
I Représentation interne des systèmes de contrôle linéaires	213
II Représentation externe des systèmes de contrôle linéaires	214
13 Stabilisation des systèmes de contrôle	218
I Systèmes linéaires autonomes	218
II Interprétation en termes de matrice de transfert	223
III Stabilisation des systèmes non linéaires	224
14 Observabilité des systèmes de contrôle	234
I Définition et critères d'observabilité	234
II Stabilisation par retour d'état statique	238
III Observateur asymptotique de Luenberger	239
IV Stabilisation par retour dynamique de sortie	240