

Kada ALLAB

ÉLÉMENTS D'ANALYSE

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

1^{re} & 2^e ANNÉES D'UNIVERSITÉ

TOME 2

ÉCOLES SCIENTIFIQUES

Office des Publications Universitaires

Kada ALLAB est docteur ès-sciences mathématiques (Université Paris VI) et ingénieur de l'Ecole nationale supérieure du pétrole et des moteurs (ENSPM, Paris). Il exerça de multiples activités d'enseignement et de recherche, notamment aux Universités de Paris VI et de Paris XIII et à l'Electricité de France.

Depuis 1975, il est Recteur de l'Université de Annaba où il assure également des enseignements de mathématiques, jusqu'en 1981 où il est détaché comme conseiller scientifique à la Présidence de la République. Professeur et membre des différentes commissions de réforme, le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique lui décerne en 2003 la médaille de « personnalité universitaire ».

Cette édition, **Eléments d'analyse** de Kada Allab est présentée en deux tomes adaptés à la nouvelle configuration des programmes.

Cet ouvrage de base pour les étudiants des universités et des écoles scientifiques a été fait en coédition avec Vuibert. Il est également diffusé par Ellipses, Paris et par SMER, Rabat.

La revue de mathématiques spéciales, RMS, Paris, recommande cet ouvrage par une longue présentation qu'elle conclut par : «...Ce livre précis, de qualité, permet d'aller vite à ce que l'analyse traditionnelle contient d'essentiel au niveau d'une bonne classe de Spéciales ou d'une licence...» L'ouvrage est également recommandé par l'Institut de recherche en mathématiques avancées (IRMA), France, pour l'agrégation de Mathématiques.

Table des Matières

Tome 2

XI. — Calcul des primitives	11
11.1. Tableau des primitives usuelles	12
11.2. Changement de variables et intégration par parties dans les intégrales indéfinies	12
11.2.1. Changement de variable	12
11.2.2. Intégration par parties	15
11.3. Primitive d'une fonction rationnelle	15
11.4. Primitive d'une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$	19
11.5. Intégration des fractions rationnelles en e^x	20
11.6. Intégrales abéliennes	21
11.6.1. Recherche des primitives de $R\left[x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right]$	22
11.6.2. Recherche des primitives de $R[x, \sqrt{ax^2+bx+c}]$	22
11.7. Intégrales du type $\int x^a(Ax^b+B)^r dx$	26
Addendum : formes différentielles dans $\mathbb{R}$	27
Exercices (5) avec solutions	32
XII. — Intégrales impropres	38
12.1. Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, b[$	38
12.2. Propriétés élémentaires de l'intégrale sur $[a, b[$	40
12.3. Convergence des intégrales des fonctions positives	41
12.4. Critères de comparaison pour les fonctions positives	42
12.5. Critère de convergence de Cauchy	47
12.6. Intégrales absolument convergentes. Intégrales semi-convergentes	47
12.7. Intégrale sur d'autres types d'intervalles	54
12.7.1. Intégrale $\int_a^b f dt$ où $f \in \text{loc} (]a, b])$, $-\infty \leq a$	54
12.7.2. Intégrale $\int_a^b f dt$ où $f \in \text{loc} (]a, b[)$, $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$	55
12.7.3. Généralisation	61
12.8. Changement de variable dans une intégrale impropre	63
12.9. Intégration par parties	65
12.10. Valeur principale de Cauchy	66
Exercices (4) avec solutions	67
XIII. — Séries numériques	70
13.1. Suites de nombres complexes	70
13.2. Définitions. Propriétés élémentaires des séries	71
13.3. Suites et séries	76
13.4. Espace vectoriel des séries numériques	77
13.5. Séries absolument convergentes et semi-convergentes	79

13.6. Séries à termes positifs	80
13.6.1. Condition de convergence	81
13.6.2. Règles de comparaison	82
13.6.3. Comparaison d'une série à termes positifs avec une série géométrique	85
13.6.4. Comparaison avec une intégrale	91
13.6.5. Comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^s}$	92
13.6.6. Autres critères	95
13.7. Séries à termes de signes quelconques	98
13.7.1. Règle d'Abel	99
13.7.2. Séries alternées	100
13.8. Quelques propriétés des séries absolument convergentes et semi-convergentes	104
Exercices (2) avec solutions	110
XIV. — Suites de fonctions	112
14.1. Suites de fonctions	112
14.1.1. Convergence simple d'une suite de fonctions	112
14.1.2. Convergence uniforme	114
14.2. Suites de fonctions continues	119
14.3. Suites de fonctions intégrables	124
14.4. Approximations	126
14.5. Suites de fonctions dérivables	130
Exercices (2) avec solutions	131
XV. — Séries de fonctions	134
15.1. Définitions. Propriétés élémentaires	134
15.2. Convergence uniforme	137
15.3. Convergence normale	139
15.4. Convergence uniforme et propriétés des sommes des séries de fonctions	143
15.4.1. Continuité	143
15.4.2. Intégration	144
15.4.3. Dérivation	145
15.5. Séries entières	149
15.6. Séries de Taylor	159
Exercices (4) avec solutions	166
XVI. — Éléments sur les séries de Fourier	171
16.1. Séries trigonométriques. Système trigonométrique orthogonal. Séries de Fourier	171
16.2. Somme partielle de la série de Fourier. Noyau de Dirichlet	175
16.3. Lemme de Riemann	176
16.4. Convergence d'une série de Fourier en un point. Principe de localisation	177
16.5. Problème de la représentation d'une fonction par sa série de Fourier	178
16.6. Développement en série de Fourier des fonctions définies sur un intervalle	184
16.7. Séries de Fourier des fonctions paires ou impaires	189
16.8. Ordre infinitésimal des coefficients de Fourier	192
16.9. Sommation des séries de Fourier au sens de Cesaro. Théorème de Weierstrass	193
16.10. Séries de Fourier sous forme complexe	199
16.11. Convergence en moyenne des séries de Fourier. Égalité de Parseval	201
Exercices (6) avec solutions	206



Table des Matières

Tome 1

I. — Éléments de la théorie des ensembles	13
1.1. Ensembles, opérations élémentaires	13
1.1.1. Parties d'un ensemble	13
1.1.2. Rappel de logique	14
1.1.3. Réunion, intersection	15
1.1.4. Ensemble produit	15
1.1.5. Partition d'un ensemble	16
1.2. Applications	16
1.2.1. Définitions	16
1.2.2. Applications injective, surjective et bijective	17
1.2.3. Image directe et image réciproque d'une partie	18
1.3. Relations dans un ensemble	19
1.3.1. Relation d'équivalence, ensemble quotient	20
1.3.2. Relation d'ordre	21
1.4. Dénombrement	23
1.4.1. Ensembles finis	23
1.4.2. Arrangements	24
1.4.3. Permutations	24
1.4.4. Combinaisons	24
1.5. Puissance des ensembles. Ensembles infinis	27
1.5.1. Puissance	27
1.5.2. Ensembles infinis	27
1.5.3. Comparaison des cardinaux	28
Exercices (5) avec solutions	32
II. — Structures algébriques	38
2.1. Groupes	38
2.1.1. Définitions	38
2.1.2. Sous-groupe	39
2.1.3. Homomorphisme	40
2.2. Anneaux	40
2.2.1. Définitions	40
2.2.2. Calcul dans un anneau	41
2.2.3. Éléments particuliers	43
2.2.4. Sous-anneau	43
2.2.5. Idéal d'un anneau commutatif	43
2.3. Corps	44
2.3.1. Définitions	44
2.3.2. Propriétés	44
2.3.3. Valeur absolue	45
Exercices (4) avec solutions	45
III. — Nombres réels. Nombres complexes	49
Introduction	49
3.1. Nombres réels	50
3.1.1. Définition axiomatique des nombres réels	51
3.1.2. Construction de $\mathbb{R}$	52
3.1.3. Quelques propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$	63
3.1.4. Nombres algébriques. Nombres transcendants	70
3.1.5. Représentation décimale des nombres réels	71
3.2. Droite réelle achevée	75
3.3. Corps des nombres complexes	76
Exercices (3) avec solutions	81

IV. — Suites numériques	84
4.1. Définitions	84
4.2. Suites convergentes	85
4.3. Théorèmes sur les suites convergentes	89
4.4. Extension aux limites infinies	91
4.5. Suites adjacentes	92
4.6. Suites récurrentes	92
4.7. Suites de Cauchy	95
4.8. Théorème de Bolzano-Weierstrass	97
4.9. Généralisation de la notion de limite	99
Exercices (5) avec solutions	103
V. — Fonctions réelles d'une variable réelle	109
5.1. Généralités	109
5.1.1. Fonction numérique, fonction réelle d'une variable réelle	109
5.1.2. Graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle	109
5.1.3. Fonctions paire, impaire, périodique	110
5.1.4. Fonctions bornées, fonctions monotones	110
5.1.5. Opérations algébriques sur les fonctions	112
5.2. Limites d'une fonction	112
5.2.1. Définitions	112
5.2.2. Unicité de la limite	113
5.2.3. Limite à droite, limite à gauche	114
5.2.4. Cas où x devient infini	114
5.2.5. Limite infinie	115
5.3. Théorèmes sur les limites	115
5.3.1. Relation avec les limites de suites	115
5.3.2. Critère de Cauchy pour les fonctions	116
5.4. Opérations sur les limites	117
5.5. Limite supérieure, limite inférieure	120
5.6. Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Notations de Landau	126
5.6.1. Définitions; propriétés	126
5.6.2. Fonctions équivalentes	127
Exercices (2) avec solutions	133
VI. — Fonctions continues	134
6.1. Définitions	134
6.1.1. Fonctions continues en un point	134
6.1.2. Fonctions continues sur un intervalle	135
6.1.3. Continuité uniforme d'une fonction sur un intervalle	135
6.2. Opérations sur les fonctions continues	137
6.3. Théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle fermé	138
6.4. Prolongement par continuité	142
6.5. Propriétés des fonctions monotones sur un intervalle	143
6.6. Théorèmes du point fixe	146
6.7. Exemple : étude de l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$	150
Exercices (3) avec solutions	154
VII. — Fonctions dérivables	155
7.1. Définitions, propriétés	155
7.1.1. Dérivée d'une fonction en un point	155

7.1.2. Dérivée à droite, dérivée à gauche	156
7.1.3. Interprétation géométrique	157
7.1.4. Différentielle	159
7.1.5. Dérivabilité et continuité	160
7.1.6. Dérivée sur un intervalle. Fonction dérivée	160
7.1.7. Opérations sur les fonctions dérivables	162
7.1.8. Maximum, minimum	165
7.2. Théorème de Rolle	166
7.2.2. Théorème des accroissements finis	168
7.2.3. Applications	171
7.2.4. Théorème des accroissements finis généralisés	175
7.3. Formules de Taylor	177
7.3.1. Formules de Taylor	177
7.3.2. Application : recherche d'extrémum	185
7.4. Fonctions convexes	186
7.4.1. Définition	186
7.4.2. Dérivabilité des fonctions convexes	188
7.4.3. Continuité et convexité	191
Exercices (2) avec solutions	193
VIII. — Intégrale de Riemann	197
8.1. Définition de l'intégrale de Riemann	197
8.1.1. Subdivisions	197
8.1.2. Sommes de Darboux	198
8.1.3. Fonctions intégrables. Intégrale de Riemann	202
8.1.4. Théorème de Darboux	203
8.1.5. Sommes de Riemann	208
8.1.6. Intégrale d'une fonction à valeurs complexes	209
8.2. Propriétés de l'intégrale de Riemann	210
8.2.1. Propriétés relatives à l'intervalle de l'intégration	210
8.2.2. Exemples des fonctions intégrables	212
8.2.3. Structure de l'ensemble des fonctions intégrables	215
8.2.4. Propriétés de l'intégrale exprimée par des inégalités	219
8.3. Intégrales et primitives	227
8.3.1. Intégrale fonction de sa limite supérieure (inférieure). Primitives	227
8.3.2. Intégrale indéfinie	231
8.3.3. Formules de la moyenne	233
8.3.4. Procédés généraux d'intégration	238
Exercices (4) avec solutions	247
IX. — Fonctions élémentaires	252
9.1. Fonction logarithme	252
9.1.1. Définition et propriétés de la fonction logarithme népérien	252
9.1.2. Graphe de la fonction Log	254
9.1.3. Dérivée logarithmique	255
9.1.4. Logarithme de base a	256
9.2. Fonction exponentielle	258
9.2.1. Définition de la fonction exponentielle de base e	258
9.2.2. Propriétés	259
9.2.3. Fonction exponentielle de base a ($a > 0$)	261
9.3. Fonction puissance	261
9.4. Croissance comparée des fonctions logarithme, exponentielle et puissance	262
9.4.1. Fonctions logarithme et puissance	262
9.4.2. Fonctions exponentielle et puissance	263
9.5. Fonctions circulaires réciproques	265
9.5.1. Fonction Arc sinus	265
9.5.2. Fonction Arc cosinus	267
9.5.3. Fonction Arc tangente	268

9.6. Fonctions hyperboliques et leurs inverses	270
9.6.1. Fonctions hyperboliques	270
9.6.2. Fonctions hyperboliques réciproques	272
9.7. Polynômes, fonctions rationnelles	274
Exercices (6) avec solutions	282
X. – Développements limités	291
10.1. Développement limité d'ordre n au voisinage 0	291
10.1.1. Définition	291
10.1.2. Unicité	292
10.2. Développements limités usuels obtenus par la formule de Mac Laurin	295
10.3. Opérations sur les développements limités	297
10.3.1. Développements limités obtenus par restriction	297
10.3.2. Opérations algébriques sur les développements limités	297
10.3.3. Développement limité d'une fonction composée	300
10.3.4. Intégration d'un développement limité	301
10.4. Développement limité au voisinage d'un point x_0	304
10.5. Développement limité généralisé	306
10.6. Infinités petits, infinités grands	307
Exercices (2) avec solutions	303