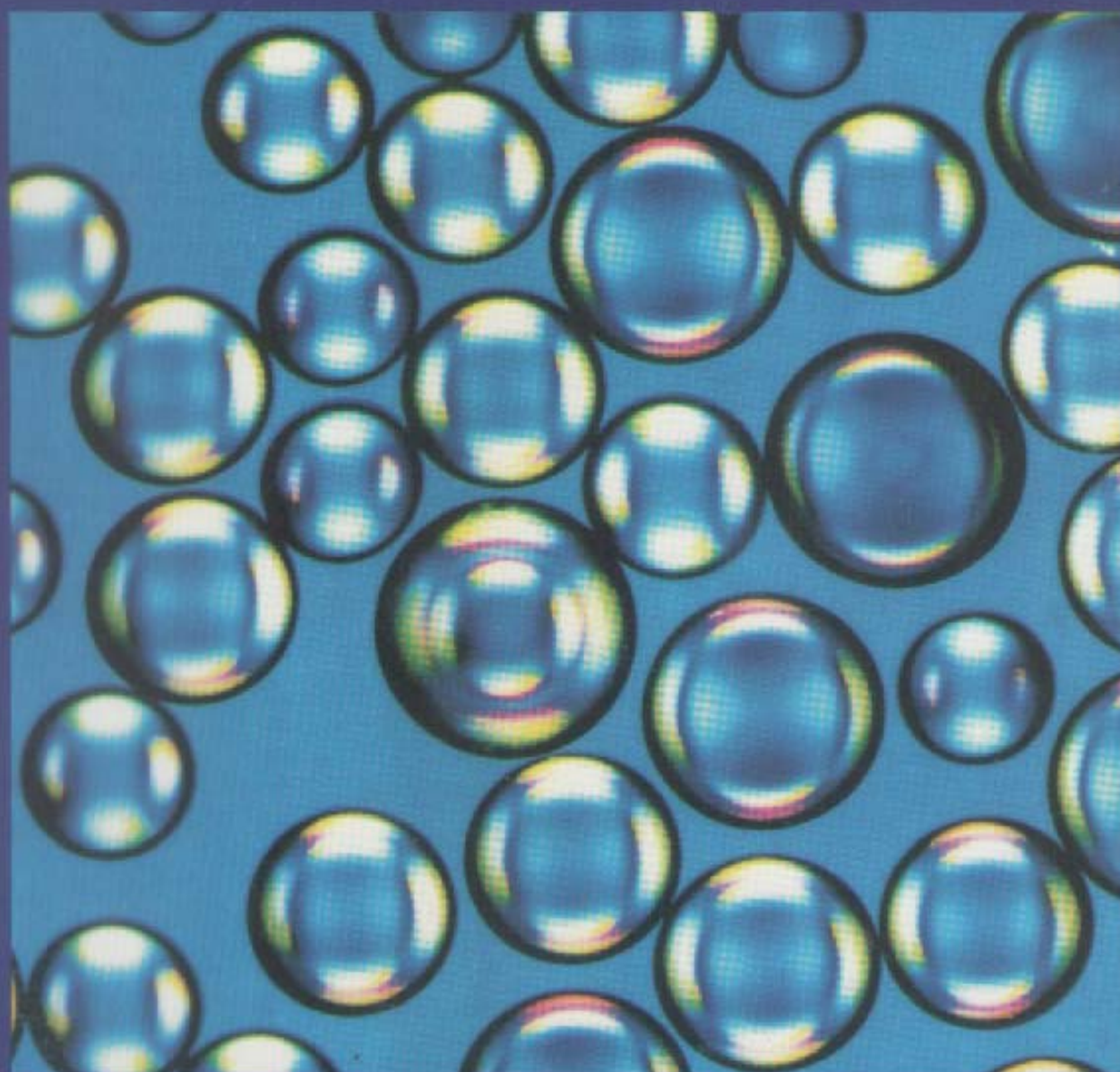


La leçon d'analyse au CAPES de mathématiques



Bernard BALAGUER



TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos.....	7
-------------------	---

I. Les suites numériques

1 – Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Comparaison de suites entre elles.	
A. Contenu.....	10
B. Remarques et compléments	20
2 – Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie : comparaison, opérations algébriques, composition par une application.	
A. Contenu.....	24
B. Remarques et compléments	29
3 – Suites monotones, suites adjacentes. Application à l'approximation d'un réel, au développement décimal.	
A. Contenu.....	31
B. Remarques et compléments	35
4 – Etude des suites de terme général a^n , n^b , $n!$ Croissance comparée. Exemples de comparaison de suites aux suites précédentes.	
A. Contenu.....	40
B. Remarques et compléments	44
5 – Etude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale.	
A. Contenu.....	46
B. Remarques et compléments	53
6 – Etude des suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$: terme général, discussion selon les valeurs de a et b , somme des premiers termes, comportement asymptotique... exemples.	
A. Contenu.....	58
B. Remarques et compléments	64

II. Fonctions d'une variable réelle

1 – Limites d'une fonction.....	68
2 – Fonctions à valeurs complexes continues en un point de $\mathbb{R}$. Cas des fonctions réelles. Opérations algébriques, composition. Prolongement par continuité d'une fonction en un point. Image d'une suite convergente par une fonction continue.	
A. Contenu.....	79
B. Remarques et compléments	85

3 – Image continue d'un intervalle, d'un segment. Continuité de la réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

A. Contenu.....	88
B. Remarques et compléments	93

4 – Dérivée en un point. Interprétation géométrique. Exemples.

A. Contenu.....	95
B. Remarques et compléments	101

5 – Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivée d'une fonction composée. Exemples.

A. Contenu.....	105
B. Remarques et compléments	111

6 – Fonctions réciproques. Exemples.

A. Contenu.....	115
B. Remarques et compléments	119

7 – Théorème de Rolle. Applications.

A. Contenu.....	122
B. Remarques et compléments	127

8 – Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions.

A. Contenu.....	132
B. Remarques et compléments	137

9 – Fonctions polynômes.

A. Contenu.....	141
B. Remarques et compléments	147

10 – Fonctions logarithmes.

A. Contenu.....	152
B. Remarques et compléments	159

11 – Fonctions exponentielles.

A. Contenu.....	163
B. Remarques et compléments	170

12 – Croissance comparée des fonctions $x \rightarrow e^x$, $x \rightarrow x^a$ et $x \rightarrow \ln x$ au voisinage de $+\infty$. Applications.

A. Contenu.....	172
B. Remarques et compléments	177

13 – Comparaison des fonctions : domination, prépondérance, équivalence. Exemples et applications.

A. Contenu.....	179
B. Remarques et compléments	185

14 – Formules de Taylor. Applications.

A. Contenu.....	188
B. Remarques et compléments	194

15 – Développements limités, opérations sur les développements limités.

A. Contenu.....	196
B. Remarques et compléments	204

16 – Applications du calcul différentiel à la recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples.

A. Contenu.....	210
B. Remarques et compléments	214

17 – Emploi du calcul différentiel pour l'étude locale de la position de la courbe représentative d'une fonction par rapport aux tangentes et aux sécantes.

A. Contenu.....	217
B. Remarques et compléments	222

18 – Fonctions convexes.

A. Contenu.....	226
B. Remarques et compléments	233

III. Equations fonctionnelles**1 – Caractérisation des fonctions exponentielles par l'équation fonctionnelle** $f(x+y) = f(x)f(y)$. Applications.

A. Contenu.....	240
B. Remarques et compléments	242

2 – Caractérisation des fonctions $x \rightarrow x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ par l'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x)f(y)$. Applications.

A. Contenu.....	245
B. Remarques et compléments	250

IV. Primitives et calcul intégral**1 – Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et**

propriétés de l'intégrale. Application.

A. Contenu.....	252
B. Remarques et compléments	258

2 – Intégration par parties. Exemples de changements de variable. Applications.

A. Contenu.....	263
B. Remarques et compléments	268

3 – Etude de l'application qui, à tout nombre réel x , associe $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

Application à une définition des fonctions trigonométriques.

A. Contenu.....	272
B. Remarques et compléments	279

V. Equations différentielles

1 – Caractérisation de la fonction exponentielle $x \rightarrow e^{ax}$, où a appartient à $\mathbb{R}$, par l'équation différentielle $y' = ay$ et une condition initiale. Applications.

A. Contenu.....	284
B. Remarques et compléments	290

2 – Caractérisation des fonctions circulaires par l'équation différentielle $y'' + a^2y = 0$ et des conditions initiales. Applications.

A. Contenu.....	294
B. Remarques et compléments	301

3 – Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre. Exemples.

A. Contenu.....	303
B. Remarques et compléments	309

VI. Analyse numérique

1 – Accélération de la convergence pour une suite réelle. Exemples.

Contenu.....	312
--------------	-----

2 – Méthodes d'approximation d'une solution d'une équation numérique réelle. Exemples.

A. Contenu.....	320
B. Remarques et compléments	328

3 – Diverses méthodes de calcul approché d'intégrales définies : trapèzes, Simpson...

A. Contenu.....	331
B. Remarques et compléments	340

Bibliographie	345
----------------------------	------------

Cet ouvrage traite des exposés d'analyse posés au concours externe du CAPES de mathématiques.

Chaque exposé est divisé en deux parties :

- * la partie "contenu" présente les résultats essentiels accompagnés d'exemples et d'exercices ;
- * la partie "remarques et compléments" dans laquelle la leçon est analysée et complétée, offre au lecteur une vision élargie du sujet. Son objectif est multiple : étendre le champ des connaissances, susciter une réflexion personnelle, et finalement mieux préparer le candidat à l'entretien qui suivra son exposé ainsi qu'au traitement d'éventuels sujets nouveaux.

Si ce livre s'adresse en priorité aux futurs certifiés, il pourra également être utile à tous ceux (étudiants de premier cycle, professeurs de lycée, agrégatifs...) qui désirent faire le point sur les rudiments de l'analyse réelle.

Bernard Balaguer est maître de conférences à l'université de Perpignan et directeur du département de mathématiques de cette même université.

Il participe depuis plusieurs années à la préparation au CAPES de mathématiques à l'IUFM de Montpellier (centre de Perpignan).



ISBN 2-7298-4811-8