

INITIATION PROGRESSIVE AU CALCUL TENSORIEL

Claude JEANPERRIN

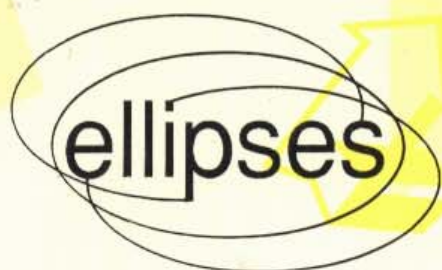


TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I PRELIMINAIRES

	page
I - VECTEURS GEOMETRIQUES ET ESPACE $\mathbb{R}^3$	5
A / Exemple simple.	5
B / Assimilation d'espaces isomorphes à l'un d'entre eux.	6
II - CONVENTION D'ECRITURE ; LA NOTATION D'EINSTEIN	6
A / Indices muets.	6
B / Convention d'Einstein.	7
III - CHANGEMENT DE BASE DANS $\mathbb{R}^3$	9
IV - FORMES LINEAIRES SUR $\mathbb{R}^3$, ESPACE DUAL	13
A / Définitions.	13
B / Coefficients d'une forme linéaire.	15
a) définition.	
b) influence d'un changement de base dans $\mathbb{R}^3$.	
C / Espace dual de $\mathbb{R}^3$.	16
D / Recherche de bases commodés dans l'espace dual.	16
E / Changement de base dans l'espace dual.	18

F / Composantes des vecteurs de $\mathbf{R}^{3*}$.	18
G / Suites de composantes sur $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^{3*}$.	19
a) isomorphisme des deux espaces.	
b) suites de composantes.	
c) exemple.	
H / Espace dual de $\mathbf{R}^{3*}$.	21
RESUME DU CHAPITRE I	22
EXERCICES	23

CHAPITRE II

INTRODUCTION DES TENSEURS

I - MULTIPLICATION TENSORIELLE	27
A / Exemple.	27
B / Espace " produit tensoriel " .	28
a) distributivité par rapport à l'addition.	
b) multiplication par un scalaire λ .	
c) indépendance linéaire .	
C / Représentation géométrique de la base (π_{ij}) .	30
D / Comparaison entre produit cartésien et produit tensoriel.	31
E / Interprétation physique des tenseurs.	32
F / La multiplication des tenseurs est-elle commutative ?	33
a) remarque.	
b) commutativité ?	
II - GENERALISATION DE LA MULTIPLICATION TENSORIELLE	34
A / Généralisation à $\mathbf{R}^n$.	34
B / Généralisation à d'autres espaces vectoriels.	34

C / Base standard du produit tensoriel.	36
a) définition.	
b) changement de base standard.	
D / Tensorialité d'une suite à deux indices.	37
a) exemple.	
b) généralisation.	
c) corollaire.	
E / Quelques exemples fondamentaux.	40
a) suite des éléments d'une matrice de changement de base.	
b) suite de Kronecker δ_j^i , mixte.	
c) suite de Kronecker δ_{ij} , à deux indices de même hauteur.	
d) le tenseur fondamental et la suite (g_{ij}) .	
e) la suite (g^{ij}) .	
F / Vocabulaire et écriture.	46
III - PRODUIT TENSORIEL DE n ESPACES	48
A / Produit de plus de deux espaces.	48
B / Associativité du produit tensoriel.	48
C / Ordre et type d'un tenseur.	49
D / Symétries et antisymétries dans un tenseur.	50
a) symétrie par rapport à deux indices de même hauteur.	
b) antisymétrie par rapport à deux indices de même hauteur.	
c) nombre de composantes indépendantes dans un tenseur symétrique ou antisymétrique.	
d) décomposition d'un tenseur quelconque en une partie symétrique et une partie antisymétrique.	
E / Tenseurs de même ordre et de même variance.	53
RESUME DU CHAPITRE II	54
EXERCICES	55

CHAPITRE III

OPERATIONS SUR LES TENSEURS

I - EGALITE DE DEUX TENSEURS	59
II - ADDITION DE DEUX TENSEURS	59
III - PRODUIT TENSORIEL DE DEUX TENSEURS	60
IV - CONTRACTION D'UN TENSEUR MIXTE	60
A / Définition.	60
B / Théorème.	60
C / Deux cas particuliers importants.	61
D / Contractions successives.	62
E / Multiplication contractée.	64
F / Application : critère de tensorialité.	64
G / Abaissement d'un indice.	66
H / Elévation d'un indice.	66
RESUME DU CHAPITRE III	68
EXERCICES	69

CHAPITRE IV

DERIVATION EN NOTATION TENSORIELLE

I - POSITION D'UN POINT DANS L'ESPACE	71
A / Repérage du point.	71
B / Changement de base.	72
C / Notion de champ.	72
II - DERIVEES PAR RAPPORT AUX VARIABLES D'ESPACE	73
A / Dérivabilité d'un champ scalaire.	73
B / Divergence d'un champ de vecteur.	73

C / Gradient d'un champ scalaire.	74
D / Rotationnel d'un champ vectoriel.	74
E / Laplacien d'un champ scalaire.	75
III - FONCTION UNIFORME DE n VARIABLES INDEPENDANTES	76
A / Utilisation d'un espace de configuration euclidien.	76
B / Variations d'une fonction le long d'une courbe.	77
C / Cas des fonctions uniformes.	78
a) paramétrage de la courbe.	
b) représentation unidimensionnelle de f sur la courbe.	
c) dérivabilité de f en un point de l'espace de configuration.	
d) différentielle totale de f .	
IV - CONDITION D'UNIFORMITE DE $f(u^i)$:	
THEOREME DE SCHWARZ	84
A / Condition nécessaire.	84
a) familles de courbes joignant deux points quelconques.	
b) étude de la variation $f(B) - f(A)$.	
B / Réciproque.	90
C / Cas des discontinuités.	91
RESUME DU CHAPITRE IV	94
EXERCICES	95

CHAPITRE V

COORDONNEES CURVILIGNES DERIVATION DES CHAMPS DE TENSEURS

I - COORDONNEES RECTILIGNES	97
A / Définition.	97
B / Tensorialité en un point M ; champ de tenseur.	99
C / Différentielle d'un champ de tenseur.	100

II - COORDONNEES CURVILIGNES ; REPERE NATUREL	101
A / Coordonnées curvilignes.	101
B / Lignes-coordonnées.	102
C / Repère naturel associé à un système de coordonnées curvilignes.	103
D / Expression des vecteurs de la base naturelle, en fonction de ceux du repère rectiligne.	106
E / Conditions pour qu'une suite de paramètres constitue un système de coordonnées curvilignes.	107
III - CHAMPS DE TENSEURS EXPRIMES EN COORDONNEES CURVILIGNES	111
A / Changement de base naturelle en un même point.	111
B / Expression de la tensorialité en coordonnées curvilignes.	112
C / Différentielle d'un tenseur, en coordonnées curvilignes.	113
a) les coefficients de Christoffel.	
b) expression des de^{*i} .	
c) écriture mnémotechnique de $d\vec{e}_i$ et de de^{*i} .	
d) expression de la différentielle d'un tenseur.	
e) écriture mnémotechnique des différentielles absolues.	
D / Dérivée covariante d'un tenseur.	126
IV - VITESSE ET ACCELERATION EN CINEMATIQUE	128
A / Vitesse d'un mobile.	128
B / Accélération du mobile.	129
RESUME DU CHAPITRE V	130
EXERCICES	131
SOLUTION DES EXERCICES	
Chapitre I	134
Chapitre II	141
Chapitre III	147
Chapitre IV	152
Chapitre V	157
BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE	170



رقم الجرد: 12813/12814
رقم القاتورة: 261847
تاريخ: 05-03-95
الأصل: ELLIPSES