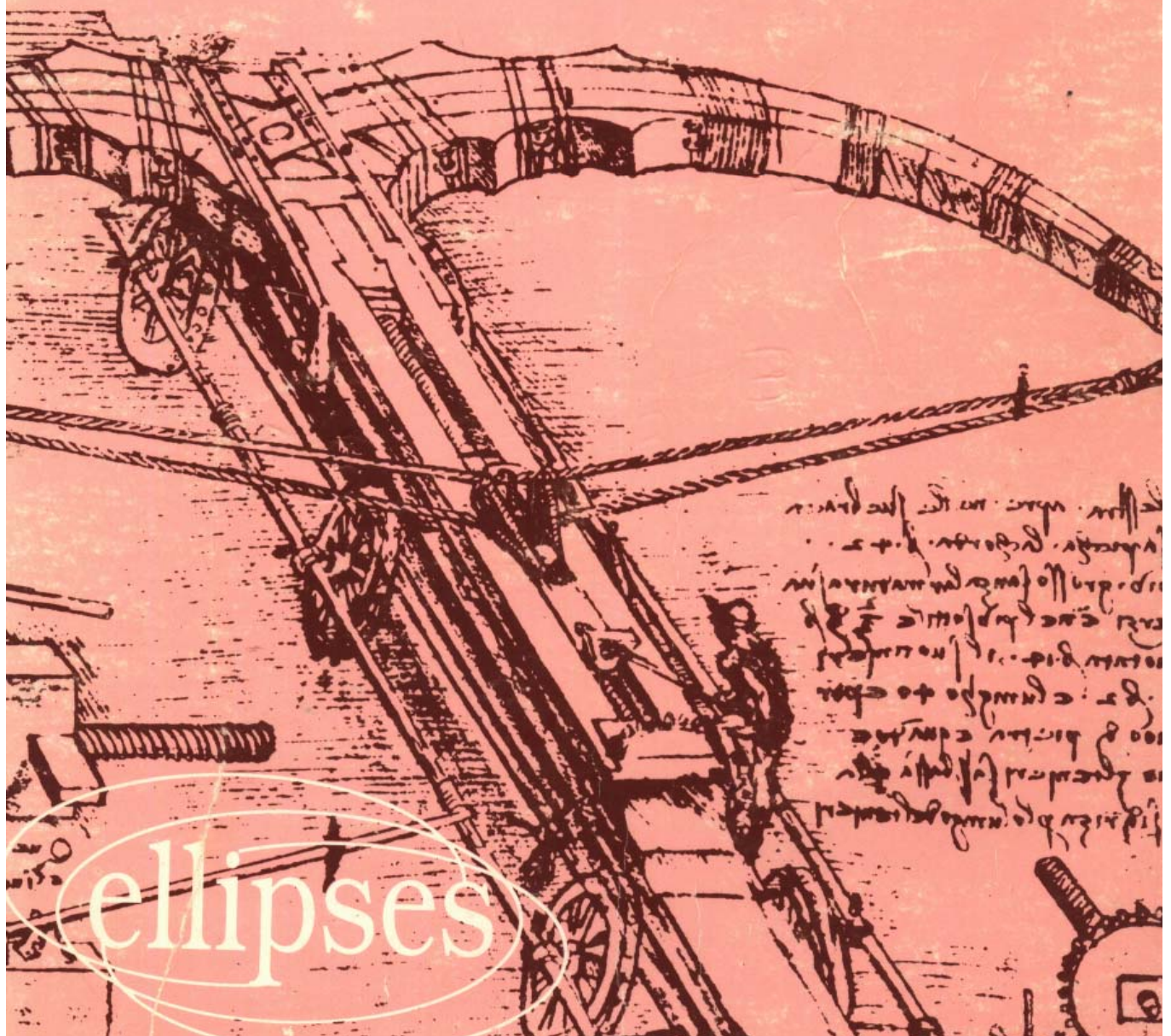


LES OUTILS MATHÉMATIQUES LE CALCUL VECTORIEL EN PHYSIQUE

Jean HLADIK



ellipses

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE : L'ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN À TROIS DIMENSIONS

CHAPITRE PREMIER — ALGÈBRE DES VECTEURS	3
I. <i>Définition des vecteurs</i>	3
1. Introduction	3
2. Triplets de nombres	3
3. Espace vectoriel	4
4. Propriétés des opérations sur les vecteurs	5
II. <i>Bases d'un espace vectoriel</i>	5
1. Exemples de vecteurs indépendants et dépendants	5
2. Vecteurs linéairement indépendants	6
3. Décomposition d'un vecteur	7
4. Définition d'une base	7
5. Changement de base	8
III. <i>Produit scalaire</i>	9
1. Définition du produit scalaire	9
2. Propriétés du produit scalaire	10
3. Vecteurs orthogonaux	10
4. Norme d'un vecteur	11
5. Expression du produit scalaire en fonction des composantes	12
IV. <i>Espace vectoriel euclidien</i>	13
1. Composantes contravariantes et covariantes	13
2. Produit scalaire et norme	15
3. Changement de base	15
4. Angle entre deux vecteurs	16
5. Bases réciproques	17
6. Décomposition d'un vecteur sur une base réciproque	18
7. Produits scalaires des vecteurs de bases réciproques	18
8. Produit vectoriel	19
V. <i>Problèmes résolus : espace vectoriel</i>	21
VI. <i>Problèmes résolus : produit scalaire</i>	28
VII. <i>Problèmes résolus : produit vectoriel</i>	37

CHAPITRE II — LES VECTEURS DANS L'ESPACE PONCTUEL	43
I. <i>Espace ponctuel euclidien</i>	43
1. Définition	43
2. Repères d'un espace ponctuel	44
3. Distance entre deux points	45
II. <i>Représentation des vecteurs dans un espace ponctuel</i>	46
1. Espace ponctuel	46
2. Vecteurs	46
3. Changement de base et de repère	47
4. Produit scalaire	47
5. Produit vectoriel	48
6. Systèmes réciproques de vecteurs	48
III. <i>Base orthonormée</i>	49
1. Vecteurs de base	49
2. Produit scalaire	50
3. Produit vectoriel	50
4. Produit mixte	51
5. Bases réciproques orthonormées	52
IV. <i>Problèmes résolus : base quelconque</i>	52
V. <i>Problèmes résolus : base orthonormée</i>	62
CHAPITRE III — CALCUL VECTORIEL DIFFÉRENTIEL	67
I. <i>Dérivée d'un vecteur</i>	67
1. Fonction vectorielle d'une variable	67
2. Propriétés de la dérivation	67
3. Expression intrinsèque de la dérivée d'un vecteur	68
4. Fonction vectorielle à plusieurs variables	69
II. <i>Courbes et surfaces</i>	70
1. Courbe dans l'espace	70
2. Vecteur tangent à une courbe	71
3. Longueur d'un arc de courbe	71
4. Surface dans l'espace	72
5. Élément différentiel de l'aire d'une surface	73
6. Flux d'un vecteur	74
III. <i>Opérateurs différentiels</i>	74
1. Gradient d'un champ de scalaires	74
2. Divergence d'une fonction vectorielle	76
3. Laplacien	78
4. Rotationnel d'une fonction vectorielle	79
IV. <i>Problèmes résolus : formules générales</i>	80
V. <i>Problèmes résolus : géométrie différentielle</i>	86
VI. <i>Problèmes résolus : gradient</i>	100
VII. <i>Problèmes résolus : divergence et laplacien</i>	106
VIII. <i>Problèmes résolus : rotationnel</i>	108
CHAPITRE IV — CALCUL VECTORIEL INTÉGRAL	111
I. <i>Intégrales vectorielles</i>	111
1. Intégrales de vecteurs dépendant d'un paramètre	111
2. Intégrales curvilignes	111
3. Autres intégrales le long d'une courbe	113
4. Intégrales de surface	113
5. Intégrales de volume	114

II.	<i>Théorème de la divergence</i>	115
1.	Formule d'Ostrogradski	115
2.	Formules de Green	116
III.	<i>Théorème de Stokes</i>	117
1.	Formule de Riemann	117
2.	Formule de Stokes	118
IV.	<i>Problèmes résolus : intégrales curvilignes</i>	120
V.	<i>Problèmes résolus : intégrales de surface</i>	132
VI.	<i>Problèmes résolus : théorème de la divergence</i>	137
VII.	<i>Problèmes résolus : théorème de Stokes</i>	144
 CHAPITRE V — COORDONNÉES CURVILIGNES ORTHOGONALES		151
I.	<i>Coordonnées curvilignes</i>	151
1.	Système de coordonnées	151
2.	Repère naturel	152
3.	Changement de coordonnées curvilignes	153
4.	Élément linéaire de E_3	154
II.	<i>Coordonnées curvilignes orthogonales</i>	155
1.	Définition	155
2.	Systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales	156
III.	<i>Opérateurs différentiels en coordonnées orthogonales</i>	158
1.	Gradient	158
2.	Divergence et laplacien	159
3.	Rotationnel	159
4.	Coordonnées orthogonales particulières	160
IV.	<i>Problèmes résolus : coordonnées curvilignes</i>	161
V.	<i>Problèmes résolus : opérateurs différentiels</i>	173
 DEUXIÈME PARTIE :		
LES ESPACES VECTORIELS À n DIMENSIONS		
 CHAPITRE VI — CONVENTIONS ET SYMBOLES		179
I.	<i>Définitions</i>	179
1.	Vecteurs à n dimensions	179
2.	Convention de sommation	180
3.	Convention de sommation sur plusieurs indices	181
4.	Symbole de Kronecker	182
5.	Symbole d'antisymétrie	182
6.	Notation indicielle des dérivées	183
II.	<i>Problèmes résolus</i>	184
 CHAPITRE VII — ALGÈBRE DES VECTEURS		189
I.	<i>Espaces vectoriels</i>	189
1.	Exemples de vecteurs	189
2.	Définition des vecteurs	191
II.	<i>Bases d'un espace vectoriel</i>	192
1.	Indépendance linéaire	192
2.	Bases d'un espace vectoriel	193
3.	Dimension d'un espace vectoriel	195
4.	Changement de base	196

III.	<i>Produits scalaires</i>	197
	1. Exemples de produits scalaires	197
	2. Définition du produit scalaire	198
	3. Produit scalaire défini positif	198
	4. Norme d'un vecteur.....	199
	5. Composante d'un vecteur sur un autre	199
IV.	<i>Espaces vectoriels pré-euclidiens</i>	200
	1. Bases orthogonales	200
	2. Expression du produit scalaire rapporté à une base	201
	3. Norme d'un vecteur rapporté à une base	202
V.	<i>Espaces vectoriels euclidiens</i>	202
	1. Définition	202
	2. Bases orthonormées	203
	3. Relations entre vecteurs	203
	4. Composantes contravariantes et covariantes	205
	5. Changement de base	206
	6. Bases réciproques	206
	7. Décomposition d'un vecteur sur des bases réciproques	208
VI.	<i>Problèmes résolus : bases d'un espace vectoriel</i>	208
VII.	<i>Problèmes résolus : produits scalaires</i>	217
 CHAPITRE VIII — ALGÈBRE DES TENSEURS		221
I.	<i>Définition des tenseurs</i>	221
	1. Intérêt des tenseurs	221
	2. Les tenseurs en physique	221
	3. Produit tensoriel de triplets de nombres.....	222
	4. Produit tensoriel des polynômes	223
	5. Propriétés du produit tensoriel	224
	6. Éléments d'un espace produit tensoriel	225
	7. Définition du produit tensoriel de deux espaces vectoriels	225
	8. Décomposition d'un produit tensoriel sur une base	226
	9. Tenseurs d'ordre deux	227
	10. Non-commutativité du produit tensoriel d'espaces identiques	228
	11. Produit tensoriel d'un nombre quelconque de vecteurs	228
	12. Tenseurs d'ordre quelconque	229
II.	<i>Espace produit tensoriel pré-euclidien</i>	230
	1. Produit scalaire.....	230
	2. Expressions du produit scalaire.....	231
	3. Bases réciproques.....	232
	4. Bases réciproques mixtes	233
	5. Composantes des tenseurs d'ordre deux	233
	6. Tenseurs d'ordre quelconque	234
	7. Opérations sur les tenseurs	235
III.	<i>Critères de tensorialité</i>	236
	1. Produits tensoriels et somme de produits tensoriels	236
	2. Changement de base	237
	3. Produit complètement contracté	238
	4. Critère général de tensorialité	239
IV.	<i>Produits extérieurs</i>	239
	1. Produit extérieur de deux vecteurs	239
	2. Composantes strictes	240
	3. Espace pré-euclidien	242
V.	<i>Problèmes résolus : exemples de tenseurs</i>	242
VI.	<i>Problèmes résolus : tenseurs pré-euclidiens</i>	253

CHAPITRE IX — ALGÈBRE DES FORMES	257
I. <i>Formes linéaires</i>	257
1. Exemples de formes linéaires	257
2. Définition	258
3. Représentation d'une forme linéaire	258
4. Espace dual	258
5. Base duale	259
6. Changement de base	259
7. Vecteurs covariants et contravariants	260
8. Espace produit tensoriel $E_n^*(\varphi)$	261
II. <i>Formes bilinéaires</i>	262
1. Exemples	262
2. Définitions	263
3. Décomposition d'une forme bilinéaire	264
4. Représentation d'une forme bilinéaire	264
5. Forme quadratique	264
III. <i>Formes hermitiennes</i>	265
1. Forme sesquilinéaire	265
2. Forme hermitienne	266
3. Forme quadratique hermitienne	267
4. Forme quadratique hermitienne définie	268
5. Inégalité de Schwarz	268
IV. <i>Produits hermitiens</i>	269
1. Définition	269
2. Exemples de produits hermitiens	270
3. Propriétés du produit hermitien défini positif	270
V. <i>Problèmes résolus : espace dual</i>	272
VI. <i>Problèmes résolus : formes bilinéaires et quadratiques</i>	275
VII. <i>Problèmes résolus : formes et produits hermitiens</i>	282
 CHAPITRE X — LES SPINEURS DE L'ESPACE À TROIS DIMENSIONS	 285
I. <i>Espace des spineurs</i>	285
1. Introduction	285
2. Définition d'un spineur	286
3. Vecteurs associés à un spineur	287
4. Base de l'espace des spineurs	288
II. <i>Les matrices de Pauli</i>	289
1. Base de l'espace euclidien liée à un spineur unitaire	289
2. Bases de l'espace des spineurs et de l'espace euclidien	290
3. Propriétés des matrices de Pauli	292
4. Nombres hypercomplexes et matrice de Pauli	293
5. Quaternions	294
III. <i>Propriétés géométriques des spineurs</i>	295
1. Symétries planes et rotations	295
2. Symétries planes	296
3. Rotations	298
4. Propriété fondamentale des spineurs	300
IV. <i>Problèmes résolus : spineurs de l'espace à trois dimensions</i>	302
 INDEX ALPHABÉTIQUE	 307

Parmi les outils mathématiques qu'utilise le physicien, le calcul vectoriel est un instrument fondamental. En effet, pratiquement dans tous les principaux domaines de la physique, les phénomènes étudiés sont représentés par des vecteurs. Tant pour le physicien que pour l'ingénieur, le calcul vectoriel constitue donc un outil fondamental.

La représentation de la réalité physique se fait classiquement dans un espace à trois dimensions et les vecteurs de cet espace sont eux-mêmes des éléments d'un espace vectoriel euclidien à trois dimensions. Dans une première partie de cet ouvrage, l'auteur a donc traité uniquement des vecteurs à trois dimensions.

Dans une seconde partie, l'auteur étudie les différents types d'espaces vectoriels à un nombre quelconque de dimensions qui sont autant utilisés en physique que les espaces à trois dimensions.

Formant un ensemble homogène autour du thème de l'utilisation des vecteurs en physique, ce livre recouvre à la fois les enseignements du premier et du second cycle universitaire sur le sujet traité.

L'auteur a privilégié les aspects techniques et pratiques du calcul vectoriel afin que chacun puisse le maîtriser pour ses besoins. L'étudiant et le professeur y trouveront le texte d'un cours axé sur les aspects utiles et techniques. Ensuite, chaque chapitre est suivi d'un grand nombre d'exercices choisis pour faciliter la compréhension et la maîtrise du cours. De plus, c'est un ouvrage à conserver et à consulter selon ses besoins car toutes les formules relatives au calcul vectoriel dont a besoin l'ingénieur ou le physicien ont été répertoriées.

Jean HLADIK est professeur de physique des Universités. Il enseigne à l'Université d'Angers et dirige le laboratoire d'Energétique et de Thermodynamique.



ISBN 2-7298-4317-5