



SCIENCES SUP

Cours

Agrégation • 2^e cycle / Master

GÉOMÉTRIE

2^e édition

Patrice Tauvel

DUNOD

Table des matières

AVANT-PROPOS

CHAPITRE 1 • ANGLES

- 1.1 Notations
- 1.2 Généralités
- 1.3 Angles non orientés
- 1.4 Angles orientés de demi-droites
- 1.5 Angles orientés de droites
- 1.6 Généralisations
- 1.7 Rotations en dimension 3

CHAPITRE 2 • ESPACES AFFINES

- 2.1 Structure d'espace affine
- 2.2 Barycentres
- 2.3 Sous-espaces affines
- 2.4 Position relative de deux sous-espaces
- 2.5 Homomorphismes d'espaces affines
- 2.6 Exemples d'applications affines
- 2.7 Le groupe affine
- 2.8 Bases affines
- 2.9 Paramétrages
- 2.10 Repères et coordonnées
- 2.11 La dimension 2
- 2.12 La dimension 3
- 2.13 Une structure affine
- 2.14 Théorème fondamental
- 2.15 Quelques résultats classiques

CHAPITRE 3 • ESPACES CONVEXES

- 3.1 Définitions
- 3.2 Convexité
- 3.3 Ensembles convexes
- 3.4 Applications linéaires
- 3.5 Théorème de Helly
- 3.6 Théorème de Carathéodory
- 3.7 Théorème de Minkowski
- 3.8 Théorème de Krein-Milman
- 3.9 Théorème de Farkas
- 3.10 Théorème de Gordan
- 3.11 Théorème de Motzkin
- 3.12 Théorème de Shapley-Folkman
- 3.13 Théorème de Rado
- 3.14 Théorème de Carathéodory
- 3.15 Théorème de Helly
- 3.16 Théorème de Carathéodory
- 3.17 Théorème de Helly
- 3.18 Théorème de Carathéodory
- 3.19 Théorème de Helly
- 3.20 Théorème de Carathéodory
- 3.21 Théorème de Helly
- 3.22 Théorème de Carathéodory
- 3.23 Théorème de Helly
- 3.24 Théorème de Carathéodory
- 3.25 Théorème de Helly
- 3.26 Théorème de Carathéodory
- 3.27 Théorème de Helly
- 3.28 Théorème de Carathéodory
- 3.29 Théorème de Helly
- 3.30 Théorème de Carathéodory
- 3.31 Théorème de Helly
- 3.32 Théorème de Carathéodory
- 3.33 Théorème de Helly
- 3.34 Théorème de Carathéodory
- 3.35 Théorème de Helly
- 3.36 Théorème de Carathéodory
- 3.37 Théorème de Helly
- 3.38 Théorème de Carathéodory
- 3.39 Théorème de Helly
- 3.40 Théorème de Carathéodory
- 3.41 Théorème de Helly

CHAPITRE 3 • ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

3.1	Topologie et orientation	47
3.2	Espaces affines normés	49
3.3	Espaces affines euclidiens	50
3.4	Distance de deux sous-espaces	52
3.5	Autres problèmes de distance	56
3.6	Quelques résultats élémentaires	59
3.7	Angles de droites	61
3.8	Angles de demi-droites ou de vecteurs	63
3.9	Limites de droites vectorielles	64
3.10	Limites de droites affines	67

CHAPITRE 4 • ENSEMBLES CONVEXES

4.1	Notations	69
4.2	Convexité	69
4.3	Enveloppe convexe	70
4.4	Topologie des convexes	72
4.5	Théorème de Motzkin	76
4.6	Résultats de séparation	79
4.7	Hyperplans d'appui	80
4.8	Points extrémaux	82
4.9	Théorème de Helly et applications	83

CHAPITRE 5 • RÉSEAUX

5.1	Rappels de topologie	87
5.2	Généralités	89
5.3	Sous-groupes discrets et réseaux	92
5.4	Domaine fondamental	93
5.5	Applications des réseaux	95

CHAPITRE 6 • ISOMÉTRIES

6.1	Généralités	98
6.2	Factorisations	100
6.3	Produits de symétries	102
6.4	Générateurs	104
6.5	Points fixes et isométries	106
6.6	Isométries en dimension 2	108
6.7	Isométries en dimension 3	109

CHAPITRE 7 • SIMILITUDES

7.1	Similitudes affines	112
7.2	Similitudes et nombres complexes	116
7.3	Cercles et similitudes planes	117

CHAPITRE 8 • PARAMÉTRAGES ET ÉQUATIONS

8.1 Généralités	122
8.2 Coordonnées polaires	123
8.3 Coordonnées cylindriques	124
8.4 Droites	126
8.5 Sphères	128
8.6 Cercles	129

CHAPITRE 9 • DIVISIONS HARMONIQUES

9.1 Faisceaux de droites	131
9.2 Birapport	132
9.3 Divisions harmoniques	135
9.4 Polaires	139

CHAPITRE 10 • CERCLES

10.1 Notations et rappels	144
10.2 Propriétés angulaires	145
10.3 Tangentes	149
10.4 Axe radical	151
10.5 Pôles et polaires	153

CHAPITRE 11 • TRIANGLES

11.1 Vocabulaire et notations	156
11.2 Premiers résultats	158
11.3 Cas d'égalité et de similitude	159
11.4 Hauteurs	161
11.5 Bissectrices	163
11.6 Formulaire	165
11.7 Isométries des triangles	168
11.8 Résultats divers	170

CHAPITRE 12 • ESPACES PROJECTIFS

12.1 Structure d'espace projectif	175
12.2 Repères projectifs	177
12.3 Applications projectives	179
12.4 Projections	183
12.5 Homologies	186
12.6 Topologie	188

CHAPITRE 13 • AFFINE ET PROJECTIF

13.1 Compléments sur les espaces affines	191
13.2 Complétion projective	194
13.3 Structures affines et projectives	197
13.4 Théorème fondamental	201
13.5 Quelques résultats géométriques	202
13.6 Topologie	207

CHAPITRE 14 • DROITE PROJECTIVE

14.1 Birapport	210
14.2 Calcul du birapport	212
14.3 Divisions harmoniques	215
14.4 Birapport et hyperplans	217
14.5 Homographies	219
14.6 Involutions	221

CHAPITRE 15 • DUALITÉ DANS LES ESPACES PROJECTIFS

15.1 Notations	225
15.2 Dualité	226
15.3 Polarité	227
15.4 Collinéations et corrélations	228

CHAPITRE 16 • NOTIONS SUR LES CONIQUES PROJECTIVES

16.1 Notations et vocabulaire	232
16.2 Coniques et images de coniques	234
16.3 Classification des coniques	237
16.4 Polarité et tangentes	239
16.5 Coniques et homographies	242
16.6 Groupe d'une conique	249
16.7 Topologie	250

CHAPITRE 17 • POLYÈDRES CONVEXES

17.1 Compléments sur les convexes	252
17.2 Groupes diédraux	254
17.3 Polyèdres convexes, polytopes	257
17.4 Structure des faces	261
17.5 Polyèdres réguliers	266
17.6 Polygones réguliers	270
17.7 Polyèdres réguliers en dimension 3	271
17.8 Application au groupe orthogonal	278

CHAPITRE 18 • FRISES

18.1 Frises et groupes de frises	285
18.2 Classification des groupes de frises	286

CHAPITRE 19 • PAVAGES

19.1 Notations	292
19.2 Compléments sur les réseaux	293
19.3 Pavages et groupes de pavage	294
19.4 Propriétés des groupes de pavage	295
19.5 Groupes de pavage formés de déplacements	299
19.6 Cas général	302

CHAPITRE 20 • PROPRIÉTÉS AFFINES DES ARCS

20.1	Rappels	311
20.2	Dérivation dans un espace affine	313
20.3	Arcs paramétrés	314
20.4	Sous-espaces fondamentaux	319
20.5	Tangentes	321
20.6	Étude locale en dimension 2	323
20.7	Étude locale en dimension 3	326
20.8	Branches infinies	327
20.9	La dimension 2	329
20.10	Coordonnées polaires	332
20.11	Enveloppes de droites	334
20.12	Arcs géométriques	337
20.13	Orientation	341

CHAPITRE 21 • PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES ARCS

21.1	Applications à variation bornée	343
21.2	Rectification d'un arc	346
21.3	Abscisse curviligne	349
21.4	Arc normal	351
21.5	Courbure et torsion	353
21.6	Courbure d'un arc plan	358
21.7	Développées	361
21.8	Parallèles et développantes	362
21.9	Quelques exemples	364

CHAPITRE 22 • PARABOLES

22.1	Définition des paraboles	367
22.2	Tangentes et normales	370
22.3	Résultats divers	373

CHAPITRE 23 • ELLIPSES

23.1	Définition des ellipses	376
23.2	Définition focale des ellipses	380
23.3	Tangentes et normales	382
23.4	Résultats divers	386

CHAPITRE 24 • HYPERBOLES

24.1	Définition des hyperboles	389
24.2	Définition focale des hyperboles	393
24.3	Tangentes et normales	396
24.4	Résultats divers	400

CHAPITRE 25 • CONIQUES

25.1 Fonctions polynomiales	404
25.2 Fonctions polynomiales de degré 2	407
25.3 Zéros	410
25.4 Coniques euclidiennes	411

CHAPITRE 26 • CALCUL DIFFÉRENTIEL

26.1 Introduction	417
26.2 Dérivées partielles	418
26.3 Applications différentiables	420
26.4 Différentiabilité et dérivabilité	422
26.5 Notation différentielle	425
26.6 Dérivées d'ordre supérieur	426
26.7 Formules de Taylor	430
26.8 Extremums relatifs	432
26.9 Difféomorphismes	434
26.10 Inversion locale	436
26.11 Fonctions implicites	439
26.12 Immersions et submersions	442
26.13 Extremums liés	445
26.14 Courbes définies implicitement	446

CHAPITRE 27 • PROPRIÉTÉS AFFINES DES NAPPES

27.1 Nappes paramétrées	449
27.2 Nappes géométriques	450
27.3 Espace tangent	453
27.4 Étude des plans tangents	456
27.5 Nappes réglées	461
27.6 Orientation	464

CHAPITRE 28 • PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES NAPPES

28.1 Notations	466
28.2 Première forme fondamentale	467
28.3 Seconde forme fondamentale	467
28.4 Courbure et torsion	471
28.5 Géodésiques	474
28.6 Asymptotiques	475
28.7 Lignes de courbure	476

CHAPITRE 29 • NOTIONS SUR LES SOUS-VARIÉTÉS

29.1 Définition des sous-variétés	477
29.2 Espace tangent	481
29.3 Exemples	483

CHAPITRE 30 • ÉTUDE D'EXEMPLES

30.1	Cylindres	485
30.2	Cônes	487
30.3	Ensembles de révolution	490

CHAPITRE 31 • DESCRIPTION DES QUADRIQUES

31.1	Fonctions polynomiales de degré 2	495
31.2	Zéros	498
31.3	Quadriques euclidiennes	499

CHAPITRE 32 • INVERSION ET GROUPE CIRCULAIRE

32.1	Premières propriétés	508
32.2	Images de sphères et d'hyperplans	511
32.3	Inversion plane	513
32.4	Groupe circulaire	518

BIBLIOGRAPHIE	523
----------------------	-----

INDEX	525
--------------	-----

SCIENCES SUP



2^e édition

Patrice Tauvel

GÉOMÉTRIE

Cet ouvrage traite l'ensemble du programme de géométrie au concours de l'Agrégation de mathématiques. Il reprend certains sujets enseignés en Licence et Master et ne suppose aucune connaissance préalable en géométrie. Il peut donc être également utilisé avec profit par les étudiants de ces cursus.

Dans les 32 chapitres de ce livre sont traités : les réseaux, les angles, les espaces affines, la géométrie euclidienne, les coniques, les polyèdres, les espaces projectifs, les courbes et les surfaces. Afin d'être autonome, ce cours intègre également un chapitre traitant de calcul différentiel.

Les résultats sont tous accompagnés de leur démonstration, faisant de cet ouvrage un outil de travail vraiment efficace pour la préparation au concours de l'agrégation.

Cette 2^e édition est entièrement conforme aux programmes actuels (mai 2001) du concours d'agrégation.

PATRICE TAUVEL
est professeur de
mathématiques à
l'université de Poitiers

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE



9 782100 494132

1^{er} cycle 2^e cycle 3^e cycle

1 2 3 4 5 6 7 8
LICENCE MASTER DOCTORAT

ISBN 2 10 049413 9

www.dunod.com

