

MATHÉMATIQUES

5. GEOMETRIE

ELIE AZOULAY & JEAN AVIGNANT

ENSEIGNEMENT SUPERIEUR TECHNIQUE



COURS ET
EXERCICES

McGRAW-HILL

TABLE DES MATIÈRES

1. Calcul et opérateurs vectoriels	1
A. Définitions	1
B. Somme vectorielle	5
C. Composantes d'un vecteur dans un trièdre orthonormé	6
D. Produit scalaire de deux vecteurs	8
E. Produit vectoriel de deux vecteurs	10
F. Moment d'un vecteur en un point	12
G. Applications	13
H. Double produit vectoriel	16
I. Produit mixte de trois vecteurs	17
J. Dérivée d'un vecteur	19
K. Dérivée du produit scalaire de deux vecteurs	19
L. Dérivée du produit vectoriel de deux vecteurs	20
M. Champ de scalaires	20
N. Gradient d'une fonction de plusieurs variables	20
O. Champ de vecteurs	21
P. Divergence d'un vecteurs	21
Q. Rotationnel d'un vecteur $\vec{V}$	21
R. Opérateur $\vec{\nabla}$	22
S. Relations liant les opérateurs vectoriels	23
<i>Résumé du chapitre 1</i>	24
<i>Exercices</i>	26
 2. Éléments de géométrie analytique	 31
A. Géométrie plane	31
1. Repère cartésien. Changement de repère	31
2. Représentation d'une droite	34
3. Droites parallèles. Droites orthogonales. Angle de deux droites	36
4. Intersection de deux droites. Faisceau de droites. Notion sur les éléments imaginaires	37
5. Problèmes de distance (repère orthonormé)	39
6. Représentation d'un cercle	41
7. Puissance d'un point par rapport à un cercle	42
8. Représentation analytique d'un courbe plane	44
9. Les coniques	45

B. Géométrie dans l'espace	51
1. Repère cartésien. Changement de repère	51
2. Représentation d'un plan	52
3. Représentation d'une droite	53
4. Orthogonalité. Problèmes d'angles	54
5. Problèmes de distances	55
6. La sphère. Coordonnées sphériques	56
7. Généralités sur les surfaces et les courbes	58
8. Surface réglée. Cylindres, cônes, conoïdes	59
9. Surfaces de révolution	62
10. Surfaces algébriques. Classification des quadriques	64
11. Etude descriptive sommaire des quadriques	66
Résumé du chapitre	71
Exercices	75
 3. Fonctions vectorielles d'une variable réelle. Courbes planes paramétrées	89
A. Fonctions vectorielles	89
1. Définitions	89
2. Continuité. Dérivation	89
3. Calcul des dérivées	90
4. Formule de Taylor-Young	91
B. Courbes planes paramétrées	91
1. Etude locale théorique	91
2. Etude des branches infinies	95
3. Points doubles. Points multiples	97
4. Plan d'étude pratique d'une courbe plane paramétrée	97
5. Exemples d'études de courbes planes paramétrées	99
Résumé du chapitre 3	104
Exercices	106
 4. Courbes planes en coordonnées polaires	133
A. Définitions et généralités	133
B. Changement de coordonnées. Repère cartésien associé	134
C. Equations de quelques courbes simples	135
D. Tangente en un point à une courbe définie par $\rho = f(\theta)$	138
E. Points d'inflexion	140
F. Branches infinies	141
G. Points doubles. Points multiples	143
H. Plan d'étude d'une courbe définie par $\rho = f(\theta)$	143
I. Exemple : courbe d'équation $\rho = \frac{\cos \theta \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{3\theta}{2}}$	144
Résumé du chapitre 4	149
Exercices	150

5. Courbure et torsion	179
A. Courbes planes	179
1. Définitions	179
2. Rayon et centre de courbure. Formules de Frenet	180
3. Calcul pratique du rayon de courbure	181
4. Interprétation cinématique de la courbure	183
5. Cercle de courbure ou cercle osculateur	183
6. Développée d'une courbe plane	185
7. Développantes d'une courbe plane Γ	188
B. Courbes gauches	189
1. Généralités	189
2. Trièdre de Frenet. Courbure et torsion	190
3. Etude du plan osculateur	191
4. Interprétation et calcul de R et τ	192
<i>Résumé du chapitre 5</i>	193
<i>Exercices</i>	194

6. Enveloppes	219
A. Géométrie plane	219
1. Définitions	219
2. Enveloppe d'une famille de courbes d'équation $f(x, y, \lambda) = 0$	219
3. Interprétation géométrique des points caractéristiques	221
4. Exemples	221
5. Enveloppe d'une famille de courbes paramétrées, dépendant d'un paramètre	225
6. Enveloppe d'une famille de courbes d'équation polaire $f(\theta, \rho, \lambda) = 0$	226
7. Equation d'Euler d'une courbe plane	226
B. Géométrie dans l'espace	227
1. Enveloppe d'une famille de surfaces dépendant d'un paramètre	227
2. Enveloppe d'une famille de surfaces dépendant de deux paramètres	228
3. Enveloppe d'une famille de courbes dépendant d'un paramètre	229
4. Surface développable	229
<i>Résumé du chapitre 6</i>	231
<i>Exercices</i>	232

L'enseignement des Mathématiques a beaucoup évolué durant les deux dernières décennies. Un formalisme plus rigoureux, des concepts plus généraux et de ce fait souvent plus abstraits se sont imposés. Il demeure cependant un domaine où une attention toute particulière doit être apportée à la pédagogie des mathématiques, c'est celui des enseignements à finalité technique. Dans de tels cas, l'axiomatique rigoureuse, le concept général et abstrait cèdent nécessairement le pas au souci de doter l'élève des moyens utiles à faire rapidement usage d'un certain nombre « d'outils mathématiques » lui permettant d'appréhender, par le biais de modèles appropriés, les notions techniques qui constituent l'essentiel de sa formation. Aussi les auteurs ont-ils opté pour un formalisme restreint, sans pour autant prendre des libertés quant à la rigueur.

Ce tome 5 est celui de la géométrie tant analytique qu'infinitésimale : calculs et opérateurs vectoriels, droites et cercles, coniques et quadriques, fonctions vectorielles d'une variable réelle, courbes planes paramétrées, courbes en polaires et, enfin, courbure et torsion, et enveloppes des courbes planes et gauches.

Il s'adresse aux étudiants des écoles supérieures techniques, des I.U.T. et aux élèves de certaines écoles d'ingénieurs — celles en particulier pour lesquelles le passage traditionnel par les classes de mathématiques spéciales n'est pas requis — ainsi qu'aux étudiants du premier cycle universitaire.