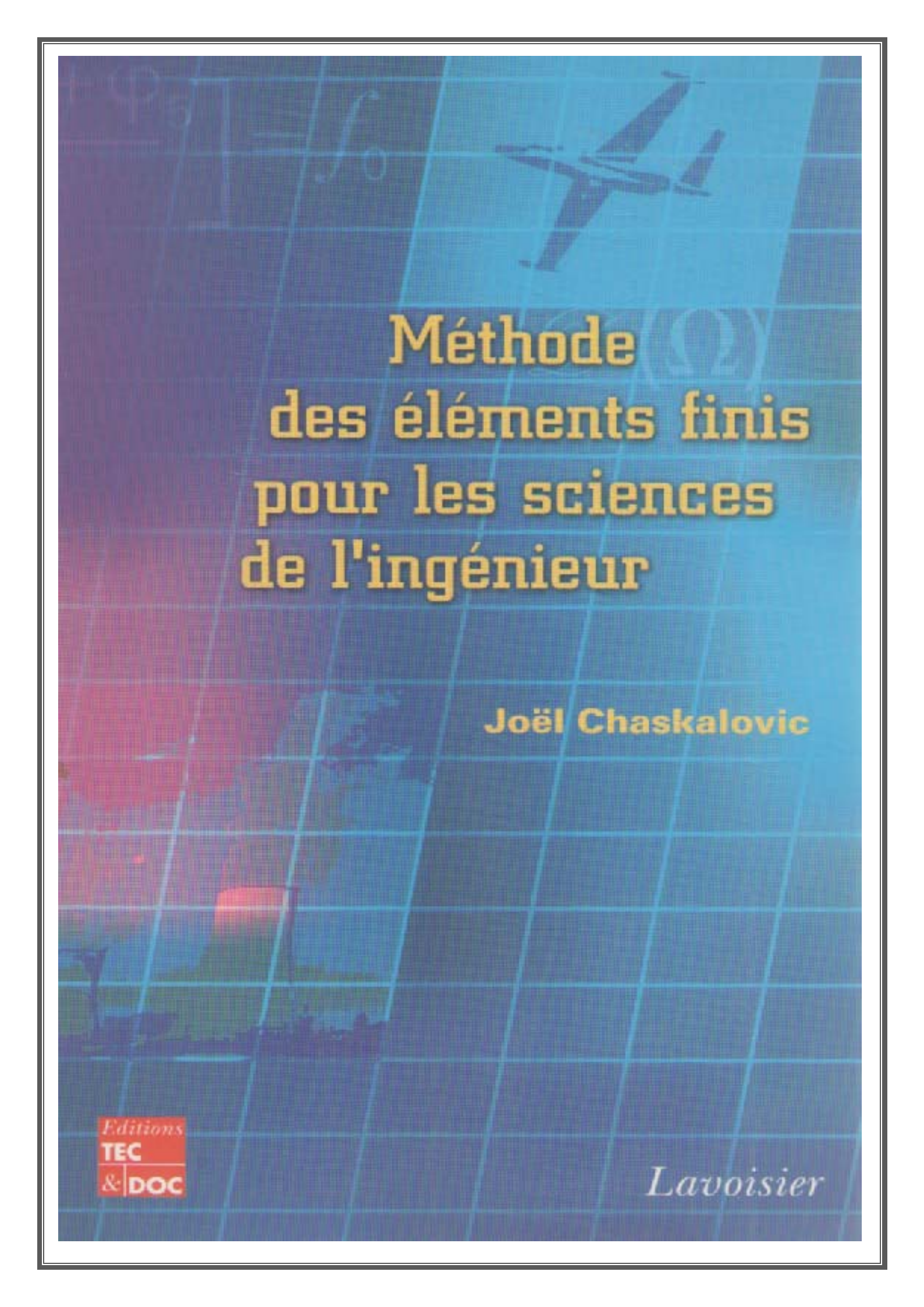




$\Phi_5$   $\int_0$   $\Omega$

# Méthode des éléments finis pour les sciences de l'ingénieur

Joël Chaskalovic

Editions  
**TEC**  
& **DOC**

*Lavoisier*

519-130-1

2-519-130-1



# Méthode des éléments finis pour les sciences de l'ingénieur

– Abrégé de cours et recueil de problèmes corrigés –

**Joël Chaskalovic**

- ancien élève de l'École nationale des Ponts et Chaussées
- docteur en mécanique de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)
- maître de conférences à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Editions  
**TEC**  
& **DOC**

11, rue Lavoisier  
75008 Paris

LONDRES - PARIS - NEW YORK

# Table des matières

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Avant-propos .....                                                                    | III |
| ■ Chapitre 1                                                                          |     |
| Abrégé de cours sur les éléments finis .....                                          | 1   |
| 1.1. Quelques outils mathématiques indispensables .....                               | 1   |
| 1.1.1. Des espaces fonctionnels adaptés et leurs propriétés .....                     | 1   |
| 1.1.2. Les premiers résultats indispensables qu'on ne saurait oublier ! .....         | 3   |
| 1.1.2.1. Formule de Green .....                                                       | 3   |
| 1.1.2.2. Variante de la formule de Green .....                                        | 4   |
| 1.1.3. Un jeu d'inégalités fondamentales .....                                        | 5   |
| 1.1.3.1. Inégalité de Cauchy-Schwartz .....                                           | 5   |
| 1.1.3.2. Inégalité de Hölder .....                                                    | 5   |
| 1.1.3.3. Inégalité de Poincaré .....                                                  | 5   |
| 1.1.3.4. Inégalité de Korn .....                                                      | 5   |
| 1.1.4. Existence, unicité et régularité d'une solution faible .....                   | 6   |
| 1.2. Essence de la méthode des éléments finis .....                                   | 8   |
| 1.2.1. Sur la modélisation mathématique .....                                         | 8   |
| 1.2.2. Formalisme et cadre fonctionnel des équations aux dérivées<br>partielles ..... | 9   |
| 1.2.3. Construction d'une formulation variationnelle .....                            | 11  |
| 1.2.4. Méthodologie et cascades d'approximations .....                                | 15  |
| 1.2.5. Équivalence entre formulation forte et formulation faible .....                | 18  |
| ■ Chapitre 2                                                                          |     |
| Quelques classes fondamentales d'éléments finis .....                                 | 25  |
| 2.1. Formulation variationnelle et approximations .....                               | 25  |
| 2.2. Description d'éléments finis usuels .....                                        | 30  |

|                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------|-----|
| 2.2.1. Éléments finis à une variable d'espace.....           | 31  |
| ▶ Éléments finis $P_0$ .....                                 | 31  |
| ▶ Éléments finis $P_1$ .....                                 | 32  |
| ▶ Éléments finis $P_2$ .....                                 | 32  |
| ▶ Éléments finis d'Hermite .....                             | 33  |
| 2.2.2. Éléments finis à deux variables d'espace .....        | 34  |
| 2.2.2.1. Éléments finis triangulaires .....                  | 34  |
| ▶ Éléments finis $P_0$ .....                                 | 34  |
| ▶ Éléments finis $P_1$ .....                                 | 35  |
| ▶ Éléments finis $P_2$ .....                                 | 35  |
| ▶ Éléments finis $P_3$ .....                                 | 37  |
| 2.2.2.2. Éléments finis quadrangulaires .....                | 41  |
| ▶ Éléments finis $Q_1$ .....                                 | 41  |
| ▶ Éléments finis $Q_2$ .....                                 | 42  |
| 2.2.3. Éléments finis à trois variables d'espace .....       | 43  |
| ▶ Éléments finis cubique .....                               | 43  |
| <br>■ Chapitre 3                                             |     |
| Formulations variationnelles.....                            | 47  |
| 3.1. Problème de Dirichlet .....                             | 48  |
| 3.1.1. Énoncé.....                                           | 48  |
| 3.1.2. Corrigé.....                                          | 52  |
| 3.2. Problème de Neumann .....                               | 63  |
| 3.2.1. Énoncé.....                                           | 63  |
| 3.2.2. Corrigé.....                                          | 67  |
| 3.3. Problème de Fourier-Dirichlet .....                     | 79  |
| 3.3.1. Énoncé.....                                           | 79  |
| 3.3.2. Corrigé.....                                          | 82  |
| 3.4. Problème périodique .....                               | 94  |
| 3.4.1. Énoncé.....                                           | 94  |
| 3.4.2. Corrigé.....                                          | 98  |
| <br>■ Chapitre 4                                             |     |
| Éléments finis en mécanique des solides déformables .....    | 107 |
| 4.1. Problèmes mixte en contraintes-déplacements.....        | 107 |
| 4.1.1. Énoncé.....                                           | 107 |
| 4.1.2. Corrigé.....                                          | 115 |
| 4.2. Plaque encastree .....                                  | 131 |
| 4.2.1. Énoncé.....                                           | 131 |
| 4.2.2. Corrigé.....                                          | 137 |
| <br>■ Chapitre 5                                             |     |
| Éléments finis appliqués à la résistance des matériaux ..... | 147 |
| Préambule.....                                               | 147 |
| 5.1. Poutre en traction simple .....                         | 148 |
| 5.1.1. Cas d'un encastrement .....                           | 148 |
| Énoncé.....                                                  | 148 |

|                                                                   |            |
|-------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.1.2. Cas d'un appui élastique .....                             | 153        |
| Corrigé .....                                                     | 154        |
| 5.2. Poutre en flexion simple .....                               | 171        |
| 5.2.1. Poutre avec encastrement et appui mobile .....             | 171        |
| Énoncé .....                                                      | 171        |
| Corrigé .....                                                     | 177        |
| 5.2.2. Poutre bi-encastree – Théorie d'Euler-Bernoulli .....      | 197        |
| Énoncé .....                                                      | 197        |
| Corrigé .....                                                     | 204        |
| <b>■ Chapitre 6</b>                                               |            |
| <b>Éléments finis appliqués aux problèmes non linéaires .....</b> | <b>223</b> |
| 6.1. Équation de Burgers avec viscosité .....                     | 223        |
| Énoncé .....                                                      | 224        |
| Corrigé .....                                                     | 227        |
| 6.2. Équation intégral-différentielle non linéaire .....          | 242        |
| Énoncé .....                                                      | 242        |
| Corrigé .....                                                     | 246        |
| 6.3. Équation différentielle de Riccati .....                     | 257        |
| Énoncé .....                                                      | 257        |
| Corrigé .....                                                     | 260        |
| <b>Bibliographie .....</b>                                        | <b>269</b> |
| <b>Index .....</b>                                                | <b>271</b> |

Qu'il s'agisse d'applications en physique, en mécanique, en économie, en marketing ou dans le domaine de la finance, la traduction phénoménologique du système étudié conduit très souvent à la résolution d'équations aux dérivées partielles. Or, les éléments finis ont incontestablement bouleversé le monde de l'approximation numérique des équations aux dérivées partielles.

Toutefois, l'apprentissage de cette méthode suppose des prérequis mathématiques, notamment en analyse fonctionnelle, qui peuvent représenter un obstacle à sa compréhension et à sa mise en œuvre pour les ingénieurs et les étudiants des cursus non spécialisés en mathématiques.

Le présent ouvrage propose un nouvel équilibre entre les aspects mathématiques et numériques, en mettant en œuvre la méthode des éléments finis à l'aide d'outils génériques de l'analyse fonctionnelle, identifiés et présentés sans démonstration dans la première partie de l'ouvrage afin d'être exploités dans le cadre d'applications variées.

Ainsi, l'acquisition de la méthode est tout d'abord déployée dans différents problèmes élémentaires didactiques, puis dans le cadre de la résistance des matériaux et de la mécanique des milieux déformables, avant d'être proposée pour certains problèmes non linéaires.

Le livre se compose de deux parties : **un abrégé de cours sur les éléments finis** ; **des problèmes corrigés** mettant en œuvre ces techniques d'analyse fonctionnelle, tout en abordant par ailleurs la construction des équations nodales ainsi que la technique d'assemblage caractéristiques de l'implémentation numérique de la méthode des éléments finis.

*Méthode des éléments finis pour les sciences de l'ingénieur* s'adresse aux étudiants en sciences et techniques de l'ingénieur des universités et des grandes écoles.

**Joël Chaskalovic**, ancien élève de l'École nationale des Ponts et Chaussées, est maître de conférences à l'Université Pierre et Marie Curie.

2-7430-0708-7



9 782743 007089