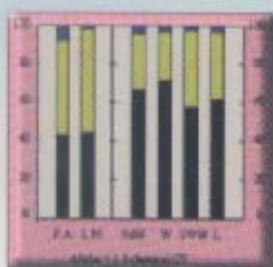
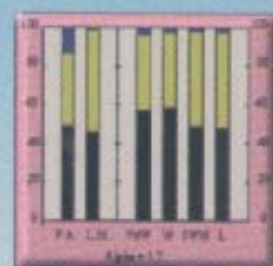
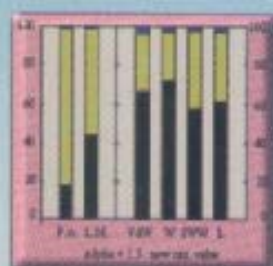
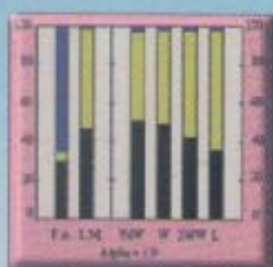


MODÉLISATION PROBABILISTE ET STATISTIQUE

Résumé de cours et annales corrigées



■ Bonne identification
■ Sous-identification
■ Sur-identification



CÉPADUÈS-ÉDITIONS

B. GAREL

2-519-133-1

2-519-133-1

MODÉLISATION PROBABILISTE ET STATISTIQUE

Résumé de cours et annales corrigées



Bernard GAREL

ENSEEIH

Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique,
d'Electronique, d'Informatique
et d'Hydraulique de Toulouse

Collection POLYTECH
de l'IN.P. de Toulouse

(co-direction de MM. Raymond Crampagne et Philippe Morard)

Toulouse 30 **CÉPADUÈS-ÉDITIONS**, 02.

111, rue Nicolas-Vauquelin
F31100 TOULOUSE - FRANCE
Tél. : +(33) 5 61 40 57 36
Fax : +(33) 5 61 41 79 89
www.cephadues.com
E-mail : cephadues@cephadues.com



Table des matières

I	Résumé de cours	1
1	Les espaces probabilisés	3
1.1	L'espace fondamental	3
1.1.1	Tribu	4
1.1.2	Quelques rappels sur les ensembles	4
1.2	Probabilité	5
1.3	Probabilité conditionnelle	6
1.4	Indépendance	7
1.5	Analyse combinatoire	8
1.5.1	Analyse combinatoire sans répétition	8
1.5.2	Analyse combinatoire avec répétition	9
1.6	Modèles d'urnes	10
1.6.1	Modèle du tirage avec remise $n \geq 1$	10
1.6.2	Modèle du tirage sans remise $1 \leq n \leq N$	11
2	Variables Aléatoires Réelles	13
2.1	Généralités	13
2.2	Variable aléatoire réelle discrète	15
2.2.1	Loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$	16
2.2.2	Loi de Bernoulli	16
2.2.3	Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	17
2.2.4	Loi de Pascal	17
2.2.5	Loi de Poisson	17
2.3	Variable aléatoire réelle continue	18
2.3.1	Les paramètres principaux	18
2.3.2	Loi uniforme sur $[a, b]$	19
2.3.3	Loi exponentielle	19
2.3.4	Loi de Laplace ou double exponentielle	19
2.3.5	Loi logistique	19
2.3.6	Loi de Cauchy	20
2.3.7	Loi normale	20
2.3.8	Loi log-normale	20
2.3.9	Loi Gamma	20

2.3.10	Loi de Weibull	21
2.4	Loi d'une fonction d'une V.A.R.	21
2.5	Diverses inégalités	22
3	Vecteurs aléatoires réels	25
3.1	Généralités	25
3.1.1	Loi du vecteur X	25
3.1.2	Fonction de répartition	26
3.1.3	Exemple de loi discrète : la loi multinomiale	26
3.1.4	Densité	27
3.1.5	Loi normale multidimensionnelle (première définition)	27
3.2	Lois marginales	27
3.2.1	Cas discret	27
3.2.2	Cas à densité	28
3.3	Indépendance	28
3.4	Espérance, matrice de covariance et de corrélation	29
3.4.1	Matrice de covariance	30
3.4.2	Matrice de corrélation	30
3.5	Calcul sur les vecteurs aléatoires	31
3.5.1	Cas à densité	31
3.5.2	Applications	32
3.5.3	Théorème du transfert	32
3.6	Lois et espérances conditionnelles	32
3.6.1	Cas discret	32
3.6.2	Cas à densité	33
3.6.3	Espérance conditionnelle	33
3.6.4	Interprétation géométrique dans L^2	34
4	Fonction caractéristique et convergences	37
4.1	Un outil : la fonction caractéristique	37
4.2	Diverses notions de convergence	39
4.2.1	Convergence presque sûre	39
4.2.2	Convergence en probabilité	40
4.2.3	Convergence dans L^p , $p \geq 1$	40
4.2.4	Convergence en loi	41
4.2.5	Relations entre les divers modes de convergence	42
4.3	Les grands théorèmes	42
4.3.1	Loi faible des grands nombres	42
4.3.2	Loi forte des grands nombres	42
4.3.3	Théorème limite centrale	43
4.3.4	Cas multivarié	43
4.3.5	Quelques commentaires	43

5	Vecteurs gaussiens	45
5.1	Rappels	45
5.2	Premières définitions et théorèmes	46
5.3	Indépendance des vecteurs gaussiens	47
5.4	Loi conditionnelle	47
5.5	Principales lois issues de la loi normale	48
5.5.1	Loi du χ^2 (Chi-deux)	48
5.5.2	Loi de Student	48
5.5.3	Loi de Fisher-Snedecor	49
6	L'estimation	53
6.1	Généralités	54
6.2	Théorie de l'information	56
6.2.1	Fonction de vraisemblance	56
6.2.2	Exhaustivité	56
6.2.3	Information de Fisher	57
6.3	Estimation sans biais de variance minimum	58
6.4	La méthode du maximum de vraisemblance	59
6.4.1	Calcul	59
6.4.2	Convergence	60
6.4.3	Normalité asymptotique	60
6.5	La méthode des moindres carrés	60
6.6	La méthode des moments	61
6.7	Intervalle de confiance	61
7	Test statistique	63
7.1	Quelques définitions	63
7.1.1	Hypothèse	63
7.1.2	Test	63
7.2	Test paramétrique entre deux hypothèses simples	65
7.3	Test paramétrique entre hypothèses composites	65
7.3.1	Hypothèse simple contre hypothèse composite	65
7.3.2	Hypothèse composite contre hypothèse composite	65
7.3.3	Test sans biais	66
7.3.4	Test du rapport des maximums de vraisemblance	66
7.4	Quelques tests classiques	67
7.4.1	Test d'égalité des variances	67
7.4.2	Test d'égalité des moyennes	68

II Annales corrigées 69

- Partiel de décembre 1990

Variables aléatoires discrètes, simulation de variables aléatoires discrètes, simulation de variables aléatoires normales (Méthode de Box-Müller) 71

- Examen de mars 1991

Estimation (loi uniforme), tests d'hypothèses sur la moyenne d'une loi normale, analyse de la variance (1) 77

- Partiel de décembre 1991

Coefficient de corrélation de Spearman, variables aléatoires discrètes (loi binomiale), variables aléatoires à densité (loi Gamma) 85

- Examen de mars 1992

Estimation (loi de Weibull), test d'hypothèses (loi de Weibull), analyse de la variance (2) 91

- Partiel de décembre 1992

Fonction de répartition et espérance, régression orthogonale 97

- Examen de mars 1993

Estimation, analyse de la variance (3), fiabilité (loi Gamma) 103

- Partiel de décembre 1993

Lois géométriques, autocorrélation des rangs de Spearman, loi exponentielle 111

- Examen de mars 1994

Analyse de la variance (4), estimation, tests d'hypothèses (loi à rapport de vraisemblance monotone) 117

- Partiel de décembre 1994

Changement de variables, loi multinomiale, le jeu de Pierre et Marie, vecteurs gaussiens 123

- Examen de mars 1995

Estimation de θ , test sur θ (loi Gamma), test de Kolmogorov-Smirnov 133

- Partiel de décembre 1995

Couples à densité (loi du produit, loi du quotient), tirages aléatoires, l'entropie en probabilités 141

- Examen de mars 1996

Fonction caractéristique et convergence en loi, test d'hypothèses sur la variance, estimateur sans biais de l'écart type 149

- Examen de mai 1997

Changement de variables (loi de Cauchy comme quotient de deux lois normales), statistique de test d'un mélange gaussien, estimation (loi log-normale), test localement optimal (modèle additif en traitement du signal) 157

- Examen de mai 1998

Changement de variables (loi d'une différence, loi d'un quotient), fiabilité, approximations de la loi binomiale, estimation-test, série chronologique 165

- Examen d'avril 1999

Changement de variables (lois de Cauchy), convergence en probabilité (loi des grands nombres), contrôle de qualité, estimation (loi uniforme), marche aléatoire (chaîne de Markov) 175

- Examen d'avril 2000

Loi de Cauchy, loi binomiale et loi de Poisson, indépendance après changement de variables, estimation (loi exponentielle translatée), test localement optimal (modèle multiplicatif en traitement du signal) 185

- Examen de mai 2001

Gestion optimale de stock, loi stable, capture - recapture (estimation et test) 195

Bibliographie 201

Index 203

LA STATISTIQUE est l'une des branches des mathématiques appliquées qui voit son utilisation sans cesse s'élargir aux domaines les plus variés : physique, chimie, biologie, génétique, médecine, démographie, sociologie, psychologie, marketing et finances arrivent en tête des utilisateurs de la statistique. Il apparaît donc indispensable lors d'une formation professionnelle, de s'initier à la modélisation statistique.

C'est ce que propose cet ouvrage. Il s'articule en deux parties :

- La première précise le jargon et les résultats de base en probabilités et statistique en vue de la modélisation des observations,
- La seconde permet au lecteur, à l'aide d'une série d'annales corrigées, d'évaluer son acquis et d'élargir ses connaissances.

Cet ouvrage s'adresse donc à un large public d'étudiants, de chercheurs ou d'ingénieurs.

L'AUTEUR,

Bernard Garel est professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse, en poste à l'Ecole Nationale Supérieure d'Électrotechnique, d'Électronique, d'Informatique, d'Hydraulique et de Télécommunications.

Il enseigne l'Intégration et l'analyse de Fourier, les Probabilités et la Statistique aux étudiants de première année. Il est également examinateur en mathématiques à l'épreuve de travaux d'initiative personnelle encadrée (TIPE), depuis 1997, année à partir de laquelle cette épreuve figure aux concours des grandes écoles.

Il anime, au sein du laboratoire d'Électronique, un groupe de recherche en statistique. Cet ouvrage bénéficie de son expérience d'enseignement et de recherche en école d'ingénieurs (ENSEEIH, ENSAE) depuis une douzaine d'années mais aussi de nombreuses années d'enseignement à l'Université de Savoie.



Institut National Polytechnique de Toulouse

RT : 590

I.S.B.N. : 2.85428.590.5



9 782854 285901