

ENSTA

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCE

L. LEON

**TRAITEMENT
d'ALGORITHMES
par
ORDINATEUR**

Tome 1

CEPADUES EDITIONS

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCEES



E.N.S.T.A.

INTRODUCTION

TRAITEMENT D'ALGORITHMES PAR ORDINATEUR

TOME I

Louis LEON

CEPADUES-EDITIONS

111, rue Nicolas-Vauquelin
31100 TOULOUSE

TOME I

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

METHODOLOGIE DU TRAITEMENT DES PROBLEMES PAR ORDINATEUR

I. Méthodologie générale	15
a) Le problème posé	16
b) La méthode de résolution	16
c) L'algorithme	16
d) La programmation informatique	16
e) Le traitement des résultats	17
f) L'interprétation des résultats	17
II. Exemples	18
a) Etude et mise en œuvre d'un algorithme non numérique	18
b) Etude et mise en œuvre d'un modèle de simulation simple	26
Programme P.I.1 – Exemple d'application de la méthode de Monte-Carlo de tirage par	
« noir ou blanc »	30
c) Etude d'un algorithme non numérique	31
Programme P.I.2 – Exemple d'algorithme de gestion	34

CHAPITRE II

TECHNIQUES DE L'ALGORITHME

I. Introduction	37
a) Le temps d'exécution des programmes	38
1) Vitesse des instructions d'un type de modèle UNIVAC 1100	40
2) Vitesse des instructions d'un type de modèle IBM	43
3) Quelques spécifications du modèle SEL 32/27 de la Société GOULD	47
4) Quelques spécifications du modèle VAX 11/780 de la Société DIGITAL	48
5) Quelques évaluations globales de puissances d'ordinateurs scientifiques	49
b) L'encombrement mémoire des programmes	50
c) La précision des résultats	55
II. Etude de cas particuliers	57
a) Calcul de « grands nombres »	57
1) Premier exemple	57
Programme P.II.1 – Calcul en virgule flottante	58
Programme P.II.2 – Calcul en entier	62
2) Second exemple	63
Programme P.II.3 – Calcul en flottant	63
Programme P.II.4 – Calcul en entier	65
b) Calcul des coefficients d'une fonction analytique développée en série de MAC-LAURIN	66
1) Le problème posé	66
2) Les résultats	67
α. Calcul exact des coefficients du développement des fonctions en série de MAC-LAURIN	67
Programme P.II.5 – $f(x) = \sin x$	68
Programme PP.II.1 – $f(x) = x \cdot \sin x$	70
Programme P.II.6 – $f(x) = \sin x \cdot e^x$	72
Programme PP.II.2 – $f(x) = x \cdot \sqrt{x} + 2$	75
Programme PP.II.3 – $f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$	77
β. Calcul approché des coefficients du développement des fonctions en série de	
MAC-LAURIN	78
Programme P.II.7 – Mise en œuvre des relations approchées, exemple $f(x) = \sin x$	88
Programmes P.II.8 et P.II.9 – $f(x) = x \cdot \sin x$ avec deux pas distincts	91-94
Programmes P.II.10 à P.II.16 – $f(x) = \sin x \cdot e^x$	
Mise en évidence de l'effet conjugué de l'erreur d'approximation analytique	
et de l'erreur machine	98 à 106
c) Calcul des coefficients des monômes des polynômes de LEGENDRE	107
d) Calcul des permutations	107

Programme P.II.17 – Construction de l'ensemble des permutations de N éléments distincts	109
e) Calcul d'une loi de probabilité hypergéométrique	110
Programme P.II.18 – Programme optimisé de portée générale	113
Programme P.II.19 – Utilisation directe du triangle de PASCAL	117
Programme P.II.20 – Utilisation du triangle de Pascal sans mémorisation complète	118
f) Problèmes de jeu	
1) Jeu de pièces de monnaie	119
Programme P.II.21	120
2) Jeu d'échecs	121
Programme P.II.22	122
3) Le jeu de la vie	126
Programme P.II.23	131
g) Le traitement de caractères	137
Programme P.II.24 – Conjugaison de verbes	138
h) Exercices d'arithmétique	139
1) Décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs premiers	139
Programme P.II.25	141
2) Résolution numérique de l'équation à termes entiers $x^n + y^n = 2^n$	142
Programme P.II.26	144
i) Extraction d'une sous suite croissante, de cardinal maximum, d'une suite quelconque	146
1) Premier algorithme	149
Programme P.II.27	151
2) Second algorithme	154
Programme P.II.28	156

CHAPITRE III

CALCUL DES SUITES ET DES SERIES INFINIES

LES ERREURS MACHINE

I. Introduction	159
II. Méthodes de calcul des suites et des séries infinies	161
a) Séries infinies particulières	161
Programme PP.III.1 – Calcul de la constante d'EULER γ	168
b) La série de TAYLOR	177
c) Rappel de quelques critères de convergence des séries infinies	179
1) Séries à termes positifs	179
2) Séries alternées	180
d) Calcul pratique des séries infinies	180
e) Notion de tolérance	181
f) Accélération de la convergence	182
g) Etude d'un cas simple	182
Programme P.III.2 – Calcul de la première méthode	186
Programme PP.III.3 – Calcul de e – Seconde méthode	188
III. Les erreurs machine	189
a) Introduction	189
b) Représentation des nombres en machine	189
c) Les calculs	195
d) Les erreurs machine	200
1) Les erreurs de dépassement de capacité du mot machine	200
2) Les erreurs de division par zéro	201
3) Les erreurs d'arrondi	203
4) Les erreurs par différences	204
e) Formulation générale de l'erreur machine	204
f) Exemples d'illustration	212
1) Mise en évidence de l'effet du décalage des nombres dans les registres	212
Programme PP.III.4 – Premier exemple	214

Programme PP.III.5 – Second exemple	215
2) Mise en évidence de l'erreur d'arrondi. Exemple 1	216
Programme PP.III.6	217
3) Mise en évidence de l'erreur d'arrondi. Exemple 2	219
Programme PP.III.7	220
4) Mise en évidence de l'erreur d'arrondi. Exemple 3 : le produit de WALLIS	222
Programmes PPP.III.1 et PPP.III.2 – Calculs en simple précision	222
Programmes PPP.III.3 et PPP.III.4 – Calculs en double précision	223
5) Mise en évidence de l'erreur par différence	224
Programme PP.III.8 – Calcul en simple précision	226
Programme PP.III.9 – Calcul en double précision	228
Programme PP.III.10 – Algorithme général pour résoudre une équation du second degré	231
6) Calcul d'une dérivée première par différence	232
IV. Exemples de calculs de séries infinies en tenant compte des erreurs analytiques et des erreurs machine	239
a) Calcul de la fonction de répartition normale, centrée et réduite, de LAPLACE-GAUSS	239
1) Première méthode	239
Programme PP.III.11 – Calcul de la fonction de répartition de LAPLACE-GAUSS au voisinage de l'origine	247
2) Seconde méthode	250
Programme PP.III.12 – Calcul de la fonction de répartition de LAPLACE-GAUSS pour des valeurs de la variable éloignées de l'origine	253
b) Calcul des termes de la suite	
$u_n = \int_0^1 e^{-ax} \cdot x^{n-1} \cdot dx$ pour $n > 0$	255
1) Méthode par itérations successives	255
Programme P.III.1 – Calcul en simple précision	257
Programme P.III.2 – Calcul en double précision	258
2) Méthode pour développement en série de MAC-LAURIN	264
α. Cas $a < 0$	265
Programme P.III.3	268
β. Cas $a > 0$	272
Programme P.III.4	274
γ. Cas où $a \gg 1$. Comparaison des deux méthodes	278
Programmes P.III.5 et P.III.6	279-282
V. Problèmes de l'utilisation des fonctions courantes en ordinateur	283
Programme P.III.7 – Contrôle de la fonction approchante par utilisation d'une suite de valeurs aléatoires de la variable	287
Programme P.III.8 – Contrôle de la fonction approchante par utilisation d'une suite de valeurs aléatoires de la variable	289

CHAPITRE IV

RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

I. Le problème de la résolution des systèmes d'équations linéaires	291
II. Aspect théorique : la méthode des déterminants de CRAMER	292
a) Etude d'un système d'ordre 3	293
Programme P.IV.1 – La règle de SARRUS	295
b) Etude d'un système d'ordre quelconque	297
1) Calcul direct des déterminants	297
Programme P.IV.2	298
2) Calcul des déterminants par la méthode des cofacteurs	300
Programme P.IV.3	301
III. Les méthodes par élimination	304
a) La méthode de GAUSS	306
Programme P.IV.4 – Application de la méthode de GAUSS avec recherche du pivot maximal colonne	313
Programme P.IV.5 – Application de la méthode de GAUSS avec recherche du pivot maximal ligne et colonne	317

b) Justification de la méthode de recherche d'un pivot maximal couplé à la méthode de résolution de GAUSS	320
Programmes PC.IV.1 à PC.IV.7	321 à 342
c) La méthode de JORDAN	345
Programme P.IV.6 – Application de la méthode de JORDAN avec recherche du pivot maximal ligne et colonne	346
d) Comparaison des méthodes de GAUSS et de JORDAN	350
IV. Les méthodes par itérations	354
a) La méthode de JACOBI	354
b) La méthode de GAUSS-SEIDEL	366
c) Remarque concernant le processus itératif de la résolution des systèmes d'équations linéaires par itérations	367
d) Mise en œuvre des méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires par itérations ..	370
1) La méthode de JACOBI	370
Programme PP.IV.1	373
2) La méthode de GAUSS-SEIDEL	376
Programme PP.IV.2	377
e) Comparaison des méthodes de JACOBI et GAUSS-SEIDEL	380
V. Les imprécisions concernant la solution d'un système d'équations linéaires	381
a) L'erreur due à l'imprécision des coefficients constants du système	381
b) Les erreurs machine	381
VI. Résolution des systèmes d'équations linéaires à coefficients complexes	383
Programme P.IV.7	384

CHAPITRE V

LE CALCUL MATRICIEL

I. Calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n	387
Programme P.V.1 – Calcul du déterminant d'une matrice à partir de la méthode de GAUSS avec recherche du pivot maximal ligne et colonne	393
II. L'inversion de matrice	394
a) Aspect historique	394
Programme P.V.2 – Application de la méthode historique avec calcul des déterminants par l'algorithme des cofacteurs	396
Programme P.V.3 – Application de la méthode historique avec calcul des déterminants par l'algorithme de GAUSS	400
b) Méthode plus élaborée	402
c) La méthode d'échange de GAUSS/JORDAN	403
Programme P.V.4 – Application directe de la méthode d'échange de GAUSS/JORDAN	409
Programme PP.V.1 – Algorithme optimisé déduit de la méthode d'échange de GAUSS/JORDAN ..	418
III. Calcul des éléments propres d'une matrice	420
a) Méthode par décompositions successives de la matrice	421
1) Décomposition d'une matrice en un produit de deux matrices	421
2) Calcul des valeurs propres	423
Programme P.V.5 – Calcul des valeurs propres d'une matrice à partir de l'algorithme de décompositions	426
b) Calcul des vecteurs propres d'une matrice	431
Programme PP.V.2	432
c) Application de la méthode « L.V. » à la résolution d'un système d'équations linéaires	437
Programme P.V.6	438
d) La méthode de LE VERRIER	440
Programme P.V.7 – Détermination du polynôme caractéristique d'une matrice à partir de la méthode de LE VERRIER	447

CHAPITRE VI

RESOLUTION DE SYSTEMES D'EQUATIONS GENERAUX ET PARTICULIERS

I. Les systèmes d'équations non linéaires	447
a) Résolution d'une équation non linéaire	448
1) La méthode de recherche d'une racine par dichotomie	448
Programme P.VI.1	451
2) La méthode de résolution par interpolations successives	452
Programme P.VI.2	455
3) La méthode de résolution par itérations simples	457
Programme P.VI.3 – Exemple de processus convergent	458
Programme P.VI.4 – Exemple de processus non convergent	460
α. Condition de convergence	461
β. Majoration de l'erreur de troncature	462
Programme P.VI.5 – Justification de la non convergence d'un processus itératif	466
4) La méthode de NEWTON	467
α. Introduction graphique de la méthode de NEWTON	467
β. Introduction de la méthode de NEWTON à partir d'un développement de TAYLOR au second ordre près	468
Programme P.VI.6 – Exemple d'application de la méthode de NEWTON	469
5) Procédé d'accélération de la méthode itérative simple	470
α. Etablissement de la formule de NEWTON relative au calcul de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre	471
β. Mise en évidence de la méthode de NEWTON relative à la résolution d'une équation transcendante avec établissement d'une condition de convergence et introduction d'une borne supérieure de l'erreur de troncature de la suite itérative	472
6) Résolution des équations algébriques	474
α. Le principe de la méthode de BAIRSTOW	474
β. Démonstration de la méthode de BAIRSTOW	475
γ. Mise en œuvre de la méthode de BAIRSTOW	481
Programme PP.VI.1	484
δ. Critiques concernant la méthode de BAIRSTOW	487
b) Résolution des systèmes d'équations non linéaires	493
1) La méthode par itérations simples	493
Programme P.VI.7	498
2) La méthode de NEWTON	500
Programme PP.VI.2	507
II. Résolution des systèmes d'équations avec contraintes – Le problème de la programmation linéaire	511
Programme P.VI.8	518

TOME II

CHAPITRE VII

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS

- I. Introduction
- II. L'approximation locale
- III. L'approximation par interpolation
- IV. L'approximation au sens de TCHEBYCHEV
- V. L'approximation en moyenne quadratique
- VI. L'approximation inverse
- VII. L'approximation d'une fonction de plusieurs variables

CHAPITRE VIII

LA DERIVATION, L'INTEGRATION NUMERIQUE

- I. Le problème de la dérivation numérique

II. L'intégration des fonctions

III. Résolution des équations différentielles du premier ordre

CHAPITRE IX

LA SIMULATION

I. Introduction

II. La simulation directe

III. La simulation par modèle déterministe – Introduction d'un graphe

IV. La simulation par modèle probabiliste

CHAPITRE X

CALCULS STATISTIQUES

I. L'approximation au sens des moindres carrés

**II. Application de la méthode d'approximation par le critère des moindres carrés :
la résolution des systèmes d'équations surdéterminés**

III. Construction d'un tableau de contingence. Les coefficients de liaison

IV. Analyse simple de la variance

ANNEXES

A1. Compléments de FORTRAN 77

A2. Approximation des fonctions par l'utilisation d'un filtre de KALMAN par B. MAUDRY

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCEES

E.N.S.T.A.



TRAITEMENT D'ALGORITHMES PAR ORDINATEUR

TOME I

Louis LEON

CEPADUES-EDITIONS

**111, rue Nicolas-Vauquelin
31100 TOULOUSE**

TOME I

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

METHODOLOGIE DU TRAITEMENT DES PROBLEMES PAR ORDINATEUR

I. Méthodologie générale	15
a) Le problème posé	16
b) La méthode de résolution	16
c) L'algorithme	16
d) La programmation informatique	16
e) Le traitement des résultats	17
f) L'interprétation des résultats	17
II. Exemples	18
a) Etude et mise en œuvre d'un algorithme non numérique	18
b) Etude et mise en œuvre d'un modèle de simulation simple	26
Programme P.I.1 – Exemple d'application de la méthode de Monte-Carlo de tirage par « noir ou blanc »	30
c) Etude d'un algorithme non numérique	31
Programme P.I.2 – Exemple d'algorithme de gestion	34

CHAPITRE II

TECHNIQUES DE L'ALGORITHME

I. Introduction	37
a) Le temps d'exécution des programmes	38
1) Vitesse des instructions d'un type de modèle UNIVAC 1100	40
2) Vitesse des instructions d'un type de modèle IBM	43
3) Quelques spécifications du modèle SEL 32/27 de la Société GOULD	47
4) Quelques spécifications du modèle VAX 11/780 de la Société DIGITAL	48
5) Quelques évaluations globales de puissances d'ordinateurs scientifiques	49
b) L'encombrement mémoire des programmes	50
c) La précision des résultats	55
II. Etude de cas particuliers	57
a) Calcul de « grands nombres »	57
1) Premier exemple	57
Programme P.II.1 – Calcul en virgule flottante	58
Programme P.II.2 – Calcul en entier	62
2) Second exemple	63
Programme P.II.3 – Calcul en flottant	63
Programme P.II.4 – Calcul en entier	65
b) Calcul des coefficients d'une fonction analytique développée en série de MAC-LAURIN	66
1) Le problème posé	66
2) Les résultats	67
α. Calcul exact des coefficients du développement des fonctions en série de MAC-LAURIN	67
Programme P.II.5 – $f(x) = \sin x$	68
Programme PP.II.1 – $f(x) = x \cdot \sin x$	70
Programme P.II.6 – $f(x) = \sin x \cdot e^x$	72
Programme PP.II.2 – $f(x) = x \cdot \sqrt{x+2}$	75
Programme PP.II.3 – $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$	77
β. Calcul approché des coefficients du développement des fonctions en série de MAC-LAURIN	78
Programme P.II.7 – Mise en œuvre des relations approchées, exemple $f(x) = \sin x$	88
Programmes P.II.8 et P.II.9 – $f(x) = x \cdot \sin x$ avec deux pas distincts	91-94
Programmes P.II.10 à P.II.16 – $f(x) = \sin x \cdot e^x$ Mise en évidence de l'effet conjugué de l'erreur d'approximation analytique et de l'erreur machine	98 à 106
c) Calcul des coefficients des monômes des polynômes de LEGENDRE	107
d) Calcul des permutations	107

TOME I

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

METHODOLOGIE DU TRAITEMENT DES PROBLEMES PAR ORDINATEUR

I. Méthodologie générale	15
a) Le problème posé	16
b) La méthode de résolution	16
c) L'algorithme	16
d) La programmation informatique	16
e) Le traitement des résultats	17
f) L'interprétation des résultats	17
II. Exemples	18
a) Etude et mise en œuvre d'un algorithme non numérique	18
b) Etude et mise en œuvre d'un modèle de simulation simple	26
Programme P.I.1 – Exemple d'application de la méthode de Monte-Carlo de tirage par « noir ou blanc »	30
c) Etude d'un algorithme non numérique	31
Programme P.I.2 – Exemple d'algorithme de gestion	34

CHAPITRE II

TECHNIQUES DE L'ALGORITHME

I. Introduction	37
a) Le temps d'exécution des programmes	38
1) Vitesse des instructions d'un type de modèle UNIVAC 1100	40
2) Vitesse des instructions d'un type de modèle IBM	43
3) Quelques spécifications du modèle SEL 32/27 de la Société GOULD	47
4) Quelques spécifications du modèle VAX 11/780 de la Société DIGITAL	48
5) Quelques évaluations globales de puissances d'ordinateurs scientifiques	49
b) L'encombrement mémoire des programmes	50
c) La précision des résultats	55
II. Etude de cas particuliers	57
a) Calcul de « grands nombres »	57
1) Premier exemple	57
Programme P.II.1 – Calcul en virgule flottante	58
Programme P.II.2 – Calcul en entier	62
2) Second exemple	63
Programme P.II.3 – Calcul en flottant	63
Programme P.II.4 – Calcul en entier	65
b) Calcul des coefficients d'une fonction analytique développée en série de MAC-LAURIN	66
1) Le problème posé	66
2) Les résultats	67
α. Calcul exact des coefficients du développement des fonctions en série de MAC-LAURIN ...	67
Programme P.II.5 – $f(x) = \sin x$	68
Programme PP.II.1 – $f(x) = x \cdot \sin x$	70
Programme P.II.6 – $f(x) = \sin x \cdot e^x$	72
Programme PP.II.2 – $f(x) = x \cdot \sqrt{x + 2}$	75
Programme PP.II.3 – $f(x) = 1 = e^{-x^2} \sqrt{2\pi}$	77
β. Calcul approché des coefficients du développement des fonctions en série de MAC-LAURIN	78
Programme P.II.7 – Mise en œuvre des relations approchées, exemple $f(x) = \sin x$	88
Programmes P.II.8 et P.II.9 – $f(x) = x \cdot \sin x$ avec deux pas distincts	91-94
Programmes P.II.10 à P.II.16 – $f(x) = \sin x \cdot e^x$ Mise en évidence de l'effet conjugué de l'erreur d'approximation analytique et de l'erreur machine	98 à 106
c) Calcul des coefficients des monômes des polynômes de LEGENDRE	107
d) Calcul des permutations	107

Programme P.II.17 – Construction de l'ensemble des permutations de N éléments distincts	109
e) Calcul d'une loi de probabilité hypergéométrique	110
Programme P.II.18 – Programme optimisé de portée générale	113
Programme P.II.19 – Utilisation directe du triangle de PASCAL	117
Programme P.II.20 – Utilisation du triangle de Pascal sans mémorisation complète	118
f) Problèmes de jeu	
1) Jeu de pièces de monnaie	119
Programme P.II.21	120
2) Jeu d'échecs	121
Programme P.II.22	122
3) Le jeu de la vie	126
Programme P.II.23	131
g) Le traitement de caractères	137
Programme P.II.24 – Conjugaison de verbes	138
h) Exercices d'arithmétique	139
1) Décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs premiers	139
Programme P.II.25	141
2) Résolution numérique de l'équation à termes entiers	
$x^n + y^n = 2^n$	142
Programme P.II.26	144
i) Extraction d'une sous suite croissante, de cardinal maximum, d'une suite quelconque	146
1) Premier algorithme	149
Programme P.II.27	151
2) Second algorithme	154
Programme P.II.28	156

CHAPITRE III

CALCUL DES SUITES ET DES SERIES INFINIES

LES ERREURS MACHINE

I. Introduction	159
II. Méthodes de calcul des suites et des séries infinies	161
a) Séries infinies particulières	161
Programme PP.III.1 – Calcul de la constante d'EULER γ	168
b) La série de TAYLOR	177
c) Rappel de quelques critères de convergence des séries infinies	179
1) Séries à termes positifs	179
2) Séries alternées	180
d) Calcul pratique des séries infinies	180
e) Notion de tolérance	181
f) Accélération de la convergence	182
g) Etude d'un cas simple	182
Programme P.III.2 – Calcul de la première méthode	186
Programme PP.III.3 – Calcul de e – Seconde méthode	188
III. Les erreurs machine	189
a) Introduction	189
b) Représentation des nombres en machine	189
c) Les calculs	195
d) Les erreurs machine	200
1) Les erreurs de dépassement de capacité du mot machine	200
2) Les erreurs de division par zéro	201
3) Les erreurs d'arrondi	203
4) Les erreurs par différences	204
e) Formulation générale de l'erreur machine	204
f) Exemples d'illustration	212
1) Mise en évidence de l'effet du décalage des nombres dans les registres	212
Programme PP.III.4 – Premier exemple	214

Programme PP.III.5 – Second exemple	215
2) Mise en évidence de l'erreur d'arrondi. Exemple 1	216
Programme PP.III.6	217
3) Mise en évidence de l'erreur d'arrondi. Exemple 2	219
Programme PP.III.7	220
4) Mise en évidence de l'erreur d'arrondi. Exemple 3 : le produit de WALLIS	222
Programmes PPP.III.1 et PPP.III.2 – Calculs en simple précision	222
Programmes PPP.III.3 et PPP.III.4 – Calculs en double précision	223
5) Mise en évidence de l'erreur par différence	224
Programme PP.III.8 – Calcul en simple précision	226
Programme PP.III.9 – Calcul en double précision	228
Programme PP.III.10 – Algorithme général pour résoudre une équation du second degré	231
6) Calcul d'une dérivée première par différence	232
IV. Exemples de calculs de séries infinies en tenant compte des erreurs analytiques et des erreurs machine	239
a) Calcul de la fonction de répartition normale, centrée et réduite, de LAPLACE-GAUSS	239
1) Première méthode	239
Programme PP.III.11 – Calcul de la fonction de répartition de LAPLACE-GAUSS au voisinage de l'origine	247
2) Seconde méthode	250
Programme PP.III.12 – Calcul de la fonction de répartition de LAPLACE-GAUSS pour des valeurs de la variable éloignées de l'origine	253
b) Calcul des termes de la suite $u_n = \int e^{-ax} \cdot x^{n-1} \cdot dx \quad 1 \quad 0$ pour $n > 0$	255
1) Méthode par itérations successives	255
Programme P.III.1 – Calcul en simple précision	257
Programme P.III.2 – Calcul en double précision	258
2) Méthode pour développement en série de MAC-LAURIN	264
α . Cas $a < 0$	265
Programme P.III.3	268
β . Cas $a > 0$	272
Programme P.III.4	274
γ . Cas où $a \gg 1$. Comparaison des deux méthodes	278
Programmes P.III.5 et P.III.6	279-282
V. Problèmes de l'utilisation des fonctions courantes en ordinateur	283
Programme P.III.7 – Contrôle de la fonction approchante par utilisation d'une suite de valeurs aléatoires de la variable	287
Programme P.III.8 – Contrôle de la fonction approchante par utilisation d'une suite de valeurs aléatoires de la variable	289

CHAPITRE IV

RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

I. Le problème de la résolution des systèmes d'équations linéaires	291
II. Aspect théorique : la méthode des déterminants de CRAMER	292
a) Etude d'un système d'ordre 3	293
Programme P.IV.1 – La règle de SARRUS	295
b) Etude d'un système d'ordre quelconque	297
1) Calcul direct des déterminants	297
Programme P.IV.2	298
2) Calcul des déterminants par la méthode des cofacteurs	300
Programme P.IV.3	301
III. Les méthodes par élimination	304
a) La méthode de GAUSS	306
Programme P.IV.4 – Application de la méthode de GAUSS avec recherche du pivot maximal colonne	313
Programme P.IV.5 – Application de la méthode de GAUSS avec recherche du pivot maximal ligne et colonne	317

b) Justification de la méthode de recherche d'un pivot maximal couplé à la méthode de résolution de GAUSS	320
Programmes PC.IV.1 à PC.IV.7	321 à 342
c) La méthode de JORDAN	345
Programme P.IV.6 – Application de la méthode de JORDAN avec recherche du pivot maximal ligne et colonne	346
d) Comparaison des méthodes de GAUSS et de JORDAN	350
IV. Les méthodes par itérations	354
a) La méthode de JACOBI	354
b) La méthode de GAUSS-SEIDEL	366
c) Remarque concernant le processus itératif de la résolution des systèmes d'équations linéaires par itérations	367
d) Mise en œuvre des méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires par itérations ..	370
1) La méthode de JACOBI	370
Programme PP.IV.1	373
2) La méthode de GAUSS-SEIDEL	376
Programme PP.IV.2	377
e) Comparaison des méthodes de JACOBI et GAUSS-SEIDEL	380
V. Les imprécisions concernant la solution d'un système d'équations linéaires	381
a) L'erreur due à l'imprécision des coefficients constants du système	381
b) Les erreurs machine	381
VI. Résolution des systèmes d'équations linéaires à coefficients complexes	383
Programme P.IV.7	384

CHAPITRE V

LE CALCUL MATRICIEL

I. Calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n	387
Programme P.V.1 – Calcul du déterminant d'une matrice à partir de la méthode de GAUSS avec recherche du pivot maximal ligne et colonne	393
II. L'inversion de matrice	394
a) Aspect historique	394
Programme P.V.2 – Application de la méthode historique avec calcul des déterminants par l'algorithme des cofacteurs	396
Programme P.V.3 – Application de la méthode historique avec calcul des déterminants par l'algorithme de GAUSS	400
b) Méthode plus élaborée	402
c) La méthode d'échange de GAUSS/JORDAN	403
Programme P.V.4 – Application directe de la méthode d'échange de GAUSS/JORDAN	409
Programme PP.V.1 – Algorithme optimisé déduit de la méthode d'échange de GAUSS/JORDAN ..	418
III. Calcul des éléments propres d'une matrice	420
a) Méthode par décompositions successives de la matrice	421
1) Décomposition d'une matrice en un produit de deux matrices	421
2) Calcul des valeurs propres	423
Programme P.V.5 – Calcul des valeurs propres d'une matrice à partir de l'algorithme de décompositions	426
b) Calcul des vecteurs propres d'une matrice	431
Programme PP.V.2	432
c) Application de la méthode « L.V. » à la résolution d'un système d'équations linéaires	437
Programme P.V.6	438
d) La méthode de LE VERRIER	440
Programme P.V.7 – Détermination du polynôme caractéristique d'une matrice à partir de la méthode de LE VERRIER	447

CHAPITRE VI

RESOLUTION DE SYSTEMES D'EQUATIONS GENERAUX ET PARTICULIERS

I. Les systèmes d'équations non linéaires	447
a) Résolution d'une équation non linéaire	448
1) La méthode de recherche d'une racine par dichotomie	448
Programme P.VI.1	451
2) La méthode de résolution par interpolations successives	452
Programme P.VI.2	455
3) La méthode de résolution par itérations simples	457
Programme P.VI.3 – Exemple de processus convergent	458
Programme P.VI.4 – Exemple de processus non convergent	460
α. Condition de convergence	461
β. Majoration de l'erreur de troncature	462
Programme P.VI.5 – Justification de la non convergence d'un processus itératif	466
4) La méthode de NEWTON	467
α. Introduction graphique de la méthode de NEWTON	467
β. Introduction de la méthode de NEWTON à partir d'un développement de TAYLOR au second ordre près	468
Programme P.VI.6 – Exemple d'application de la méthode de NEWTON	469
5) Procédé d'accélération de la méthode itérative simple	470
α. Etablissement de la formule de NEWTON relative au calcul de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre	471
β. Mise en évidence de la méthode de NEWTON relative à la résolution d'une équation transcendante avec établissement d'une condition de convergence et introduction d'une borne supérieure de l'erreur de troncature de la suite itérative	472
6) Résolution des équations algébriques	474
α. Le principe de la méthode de BAIRSTOW	474
β. Démonstration de la méthode de BAIRSTOW	475
γ. Mise en œuvre de la méthode de BAIRSTOW	481
Programme PP.VI.1	484
δ. Critiques concernant la méthode de BAIRSTOW	487
b) Résolution des systèmes d'équations non linéaires	493
1) La méthode par itérations simples	493
Programme P.VI.7	498
2) La méthode de NEWTON	500
Programme PP.VI.2	507
II. Résolution des systèmes d'équations avec contraintes – Le problème de la programmation linéaire	511
Programme P.VI.8	518

TOME II

CHAPITRE VII

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS

- I. Introduction
- II. L'approximation locale
- III. L'approximation par interpolation
- IV. L'approximation au sens de TCHEBYCHEV
- V. L'approximation en moyenne quadratique
- VI. L'approximation inverse
- VII. L'approximation d'une fonction de plusieurs variables

CHAPITRE VIII

LA DERIVATION, L'INTEGRATION NUMERIQUE

- I. Le problème de la dérivation numérique

II. L'intégration des fonctions

III. Résolution des équations différentielles du premier ordre

CHAPITRE IX

LA SIMULATION

I. Introduction

II. La simulation directe

III. La simulation par modèle déterministe – Introduction d'un graphe

IV. La simulation par modèle probabiliste

CHAPITRE X

CALCULS STATISTIQUES

I. L'approximation au sens des moindres carrés

**II. Application de la méthode d'approximation par le critère des moindres carrés :
la résolution des systèmes d'équations surdéterminés**

III. Construction d'un tableau de contingence. Les coefficients de liaison

IV. Analyse simple de la variance

ANNEXES

A1. Compléments de FORTRAN 77

A2. Approximation des fonctions par l'utilisation d'un filtre de KALMAN par B. MAUDRY