

ENSTA

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCE

L. LEON

**TRAITEMENT
d'ALGORITHMES
par
ORDINATEUR**

Tome 2

CEPADUES EDITIONS

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCEES

E.N.S.T.A.



TRAITEMENT D'ALGORITHMES PAR ORDINATEUR

TOME II

Louis LEON

CEPADUES-EDITIONS

111, rue Nicolas-Vauquelin
31100 TOULOUSE

TOME I

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

METHODOLOGIE DU TRAITEMENT DES PROBLEMES PAR ORDINATEUR

- I. Méthodologie générale
- II. Exemples

CHAPITRE II

TECHNIQUES DE L'ALGORITHME

- I. Introduction
- II. Etude de cas particuliers

CHAPITRE III

CALCUL DES SUITES ET DES SERIES INFINIES LES ERREURS MACHINE

- I. Introduction
- II. Méthodes de calcul des suites et des séries infinies
- III. Les erreurs machine
- IV. Exemples de calculs de séries infinies en tenant compte des erreurs analytiques et des erreurs machine
- V. Problèmes de l'utilisation des fonctions courantes en ordinateur

CHAPITRE IV

RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

- I. Le problème de la résolution des systèmes d'équations linéaires
- II. Aspect théorique : la méthode des déterminants de CRAMER
- III. Les méthodes par élimination
- IV. Les méthodes par itérations
- V. Les imprécisions concernant la solution d'un système d'équations linéaires
- VI. Résolution des systèmes d'équations linéaires à coefficients complexes

CHAPITRE V

LE CALCUL MATRICIEL

- I. Calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n
- II. L'inversion de matrice
- III. Calcul des éléments propres d'une matrice

CHAPITRE VI

RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS GENERAUX ET PARTICULIERS

- I. Les systèmes d'équations non linéaires
- II. Résolution des systèmes d'équations avec contraintes – Le problème de la programmation linéaire

TOME II

CHAPITRE VII L'APPROXIMATION DES FONCTIONS

I. Introduction	15
II. L'approximation locale	17
III. L'approximation par interpolation	18
a) Définition de l'approximation par interpolation	18
b) L'interpolation polynomiale simple	21
Programme P.VII.1 – Détermination de l'unique polynôme d'interpolation	23
1) Le polynôme de LAGRANGE	23
α. Formulation de LAGRANGE	25
Programme P.VII.2 – Mise en œuvre de la formulation de LAGRANGE : premier algorithme	27
Programme P.VII.3 – Mise en œuvre de la formulation de LAGRANGE : second algorithme	28
β. Majoration de l'erreur d'approximation d'une fonction par un polynôme de LAGRANGE	30
2) Le polynôme de NEWTON	35
Programme P.VII.4 – Mise en œuvre du polynôme d'interpolation de NEWTON : premier algorithme	37
Programme P.VII.5 – Mise en œuvre du polynôme d'interpolation de NEWTON : second algorithme	37
3) Autres formes de représentation du polynôme d'interpolation dans le cas d'abscisses équidistantes	38
α. Le polynôme d'interpolation de STIRLING	38
β. Le polynôme d'interpolation de BESSEL	39
4) Critères de choix des différents types de polynômes étudiées	41
c) L'interpolation par les fonctions SPLINE	48
Programme P.VII.6	52
d) L'interpolation d'HERMITE	54
IV. L'approximation au sens de TCHEBYCHEV	54
a) Définition de l'approximation au sens de TCHEBYCHEV	55
b) Principe de la méthode de TCHEBYCHEV	57
c) Définition et propriétés des polynômes de TCHEBYCHEV	61
d) La méthode de TCHEBYCHEV	62
e) Mise en œuvre de la méthode de TCHEBYCHEV	69
Programme P.VII.7	72
f) Autres formes d'utilisation des polynômes de TCHEBYCHEV	72
1) L'approximation « économique »	74
2) Les séries de TCHEBYCHEV	74
g) L'approximation par une fraction rationnelle	76
1) Le principe de l'approximation au moyen d'une fraction rationnelle	77
2) L'approximation par une fraction rationnelle d'une fonction donnée analytiquement	79
La méthode de PADE	79
3) L'approximation par une fraction rationnelle d'une fonction donnée sous forme de valeurs discrètes	80
V. L'approximation en moyenne quadratique	81
a) Définition de l'approximation en moyenne quadratique	81
b) Les fonctions orthogonales	86
c) Les polynômes de LEGENDRE	86
1) Définition des polynômes de LEGENDRE	88
2) Expression analytique des polynômes de LEGENDRE	91
Programme P.VII.8 – Calcul des coefficients des polynômes de LEGENDRE	93
3) Fonction génératrice	93
4) Propriétés des polynômes de LEGENDRE	95
d) Représentation approchée d'une fonction par une série de polynômes de LEGENDRE	95
e) Généralisation de l'approximation des fonctions au cas d'une suite de fonctions orthogonales quelconques	97

f) Mise en œuvre de l'approximation en moyenne quadratique à l'aide d'une série de polynômes de LEGENDRE	101
Programme P.VII.9 – Approximation de la fonction $f(x) = e^x$	104
Programme PP.VII.1 – Evaluation de l'erreur machine limite dans l'approximation de la fonction $f(x) = e^x$ par une série de polynômes de LEGENDRE	107
g) Procédé pour lever l'indétermination numérique des coefficients du développement d'une fonction par une série de polynômes de LEGENDRE	108
Programme P.VII.10 – Mise en œuvre du procédé de levée d'indétermination dans le cas où l'on dispose d'une relation analytique exacte pour calculer les dérivées $K^{i\text{ème}}, [f^{(K)}(x)]_{x=0}$	115
Programme P.VII.11 – Mise en œuvre du procédé de levée d'indétermination dans le cas où l'on calcule par différences, les dérivées $K^{i\text{ème}}, [f^{(K)}(x)]_{x=0}$	119
VI. L'approximation inverse	120
VII. L'approximation d'une fonction de plusieurs variables	121
a) L'approximation locale par la formule de TAYLOR ou de MAC-LAURIN	121
b) L'approximation par le polynôme de LAGRANGE	121

CHAPITRE VIII

LA DERIVATION, L'INTEGRATION NUMERIQUE

I. Le problème de la dérivation numérique	123
a) Calcul des dérivées successives d'une fonction $f(x)$ à partir du polynôme d'interpolation de NEWTON	123
Programme PP.VIII.1	128
b) Calcul des dérivées successives d'une fonction $f(x)$ à partir de la formule de TAYLOR	130
1) Dérivée première à deux points	130
2) Dérivée première à trois points	131
3) Dérivées d'ordre supérieur à un	132
α. Cas d'abscisses équidistantes	132
β. Cas d'abscisses équidistantes	132
4) Généralisation du procédé	134
Programme P.VIII.1 – Calcul d'une dérivée d'ordre quelconque, pour un ordre d'approximation quelconque, à partir d'une suite de points distribués de façon quelconque	142
Programme P.VIII.2 – Calcul d'une dérivée d'ordre quelconque, pour un ordre d'approximation quelconque, à partir d'une suite de points équidistants	145
c) Calcul des dérivées à partir des fonctions SPLINE cubiques	147
d) Calcul des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables	148
II. L'intégration des fonctions	149
a) Application du polynôme de LAGRANGE	149
Programme P.VIII.3	151
b) Application du polynôme de NEWTON	153
1) Formule des trapèzes	154
Programme P.VIII.4	155
2) Formule de SIMPSON	156
Programme P.VIII.5	157
3) Formule de WEDDLE	158
4) Cas des intégrales multiples	158
Programme P.VIII.6 – Application de la formule des trapèzes au cas d'une intégrale double	160
c) Méthode de GAUSS : application de la méthode d'interpolation au sens d'HERMITE	161
1) Cas d'une intégrale simple	161
2) Cas d'une intégrale multiple	167
Programme P.VIII.7 – Calcul de l'intégrale, d'ordre de multiplicité n , d'une fonction de n variables ..	171
d) Application des fonctions SPLINE cubiques	172
e) Calcul des intégrales impropres (ou singulières)	174
III. Résolution des équations différentielles du premier ordre	175
a) La méthode de PICARD	176
b) La méthode de TAYLOR	177

c) Les méthodes de résolution numérique par pas	178
1) La méthode d'EULER	179
α. La méthode générale	179
β. La méthode d'EULER modifiée	179
2) La méthode de RUNGE-KUTTA	181
α. Approximation au second ordre	182
β. Approximation au troisième ordre	183
γ. Approximation au quatrième ordre	183
δ. Approximation au cinquième ordre	184
Programme P.VIII.8 – La méthode de RUNGE-KUTTA au quatrième ordre	185
d) Résolution des systèmes d'équations différentielles du premier ordre	187
e) Résolution des équations aux dérivées partielles. Etude d'un cas particulier	188
Programmes P.VIII.9, P.VIII.10, P.VIII.11 – Eléments de la résolution d'une équation aux dérivées partielles particulières	228

CHAPITRE IX LA SIMULATION

I. Introduction	241
II. La simulation directe	241
Exemple de jeu	241
Programmes P.IX.1, P.IX.2, P.IX.3	246
III. La simulation par modèle déterministe – Introduction d'un graphe	251
Programmes P.IX.4, P.IX.5, P.IX.6	254
IV. La simulation par modèle probabiliste	259
a) Calcul de l'intégrale définie d'une fonction	260
Programme P.IX.7	264
b) Résolution numérique de l'équation de LAPLACE	265
1) Résolution numérique de l'équation de LAPLACE par une méthode numérique classique	269
Programme P.IX.8 – Méthode de JACOBI	271
Programme P.IX.9 – Méthode de GAUSS-SEIDEL	275
2) Résolution de l'équation de LAPLACE par une méthode probabiliste	278
Programme P.IX.10	282

CHAPITRE X CALCULS STATISTIQUES

I. L'approximation au sens des moindres carrés	285
a) Le critère des moindres carrés	285
b) Le polynôme des moindres carrés	288
Programme PP.X.1	296
c) Interpolation probabiliste	300
1) Introduction de la loi de GAUSS	300
2) Conséquences de l'hypothèse probabiliste de l'approximation au sens des moindres carrés	301
α. Détermination du meilleur polynôme d'approximation au sens des moindres carrés	301
β. Evaluation probabiliste de l'erreur limite d'approximation	302
d) Etude d'un cas particulier : la régression linéaire simple	303
Programme P.X.1	306
e) Approximation d'une fonction au sens des moindres carrés, par exponentiation	307
Programme PP.X.2	311
II. Application de la méthode d'approximation par le critère des moindres carrés : la résolution des systèmes d'équations surdéterminés	315
Programme P.X.2	318
III. Construction d'un tableau de contingence. Les coefficients de liaison	321
a) Le tableau de contingence (ou de tris croisés)	321

b) Les coefficients de liaison	321
1) Le coefficient χ^2	321
2) Le coefficient de contingence C	323
3) Le coefficient de corrélation des rangs de KENDALL τ	323
4) Le coefficient de corrélation linéaire R	325
Programme P.X.3	326
IV. Analyse simple de la variance	328
a) Analyse statistique descriptive	329
b) Analyse de la variance	329
Programme P.X.4	332

ANNEXES

A1. Compléments de FORTRAN 77	335
I. Le problème des conversions numériques	335
II. Le problème de la manipulation des caractères et des chaînes de caractères	419
A2. Approximation des fonctions par l'utilisation d'un filtre de KALMAN par B. MAUDRY	511

ENSTA

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCEES

L. LEON

**TRAITEMENT
d'ALGORITHMES
par
ORDINATEUR**

Tome 2

CEPADUES EDITIONS

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCEES

E.N.S.T.A.



TRAITEMENT D'ALGORITHMES PAR ORDINATEUR

TOME II

Louis LEON

CEPADUES-EDITIONS

111, rue Nicolas-Vauquelin
31100 TOULOUSE

TOME I

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

METHODOLOGIE DU TRAITEMENT DES PROBLEMES PAR ORDINATEUR

- I. Méthodologie générale
- II. Exemples

CHAPITRE II

TECHNIQUES DE L'ALGORITHME

- I. Introduction
- II. Etude de cas particuliers

CHAPITRE III

CALCUL DES SUITES ET DES SERIES INFINIES LES ERREURS MACHINE

- I. Introduction
- II. Méthodes de calcul des suites et des séries infinies
- III. Les erreurs machine
- IV. Exemples de calculs de séries infinies en tenant compte des erreurs analytiques et des erreurs machine
- V. Problèmes de l'utilisation des fonctions courantes en ordinateur

CHAPITRE IV

RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

- I. Le problème de la résolution des systèmes d'équations linéaires
- II. Aspect théorique : la méthode des déterminants de CRAMER
- III. Les méthodes par élimination
- IV. Les méthodes par itérations
- V. Les imprécisions concernant la solution d'un système d'équations linéaires
- VI. Résolution des systèmes d'équations linéaires à coefficients complexes

CHAPITRE V

LE CALCUL MATRICIEL

- I. Calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n
- II. L'inversion de matrice
- III. Calcul des éléments propres d'une matrice

CHAPITRE VI

RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS GENERAUX ET PARTICULIERS

- I. Les systèmes d'équations non linéaires
- II. Résolution des systèmes d'équations avec contraintes – Le problème de la programmation linéaire

TOME II

CHAPITRE VII L'APPROXIMATION DES FONCTIONS

I. Introduction	15
II. L'approximation locale	17
III. L'approximation par interpolation	18
a) Définition de l'approximation par interpolation	18
b) L'interpolation polynomiale simple	21
Programme P.VII.1 – Détermination de l'unique polynôme d'interpolation	23
1) Le polynôme de LAGRANGE	23
α. Formulation de LAGRANGE	25
Programme P.VII.2 – Mise en œuvre de la formulation de LAGRANGE : premier algorithme	27
Programme P.VII.3 – Mise en œuvre de la formulation de LAGRANGE : second algorithme	28
β. Majoration de l'erreur d'approximation d'une fonction par un polynôme de LAGRANGE	30
2) Le polynôme de NEWTON	35
Programme P.VII.4 – Mise en œuvre du polynôme d'interpolation de NEWTON : premier algorithme	35
Programme P.VII.5 – Mise en œuvre du polynôme d'interpolation de NEWTON : second algorithme	37
3) Autres formes de représentation du polynôme d'interpolation dans le cas d'abscisses équidistantes	38
α. Le polynôme d'interpolation de STIRLING	38
β. Le polynôme d'interpolation de BESSEL	39
4) Critères de choix des différents types de polynômes étudiées	41
c) L'interpolation par les fonctions SPLINE	48
Programme P.VII.6	52
d) L'interpolation d'HERMITE	54
IV. L'approximation au sens de TCHEBYCHEV	54
a) Définition de l'approximation au sens de TCHEBYCHEV	55
b) Principe de la méthode de TCHEBYCHEV	57
c) Définition et propriétés des polynômes de TCHEBYCHEV	61
d) La méthode de TCHEBYCHEV	62
e) Mise en œuvre de la méthode de TCHEBYCHEV	69
Programme P.VII.7	72
f) Autres formes d'utilisation des polynômes de TCHEBYCHEV	72
1) L'approximation « économique »	74
2) Les séries de TCHEBYCHEV	74
g) L'approximation par une fraction rationnelle	76
1) Le principe de l'approximation au moyen d'une fraction rationnelle	77
2) L'approximation par une fraction rationnelle d'une fonction donnée analytiquement	79
La méthode de PADE	80
3) L'approximation par une fraction rationnelle d'une fonction donnée sous forme de valeurs discrètes	81
V. L'approximation en moyenne quadratique	81
a) Définition de l'approximation en moyenne quadratique	82
b) Les fonctions orthogonales	86
c) Les polynômes de LEGENDRE	86
1) Définition des polynômes de LEGENDRE	88
2) Expression analytique des polynômes de LEGENDRE	91
Programme P.VII.8 – Calcul des coefficients des polynômes de LEGENDRE	93
3) Fonction génératrice	93
4) Propriétés des polynômes de LEGENDRE	95
d) Représentation approchée d'une fonction par une série de polynômes de LEGENDRE	95
e) Généralisation de l'approximation des fonctions au cas d'une suite de fonctions orthogonales quelconques	97

f) Mise en œuvre de l'approximation en moyenne quadratique à l'aide d'une série de polynômes de LEGENDRE	101
Programme P.VII.9 – Approximation de la fonction $f(x) = e^x$	104
Programme PP.VII.1 – Evaluation de l'erreur machine limite dans l'approximation de la fonction $f(x) = e^x$ par une série de polynômes de LEGENDRE	107
g) Procédé pour lever l'indétermination numérique des coefficients du développement d'une fonction par une série de polynômes de LEGENDRE	108
Programme P.VII.10 – Mise en œuvre du procédé de levée d'indétermination dans le cas où l'on dispose d'une relation analytique exacte pour calculer les dérivées $K^{ième}$, $[f^{(K)}(x)]_{x=0}$	115
Programme P.VII.11 – Mise en œuvre du procédé de levée d'indétermination dans le cas où l'on calcule par différences, les dérivées $K^{ième}$, $[f^{(K)}(x)]_{x=0}$	119
VI. L'approximation inverse	120
VII. L'approximation d'une fonction de plusieurs variables	121
a) L'approximation locale par la formule de TAYLOR ou de MAC-LAURIN	121
b) L'approximation par le polynôme de LAGRANGE	121

CHAPITRE VIII

LA DERIVATION, L'INTEGRATION NUMERIQUE

I. Le problème de la dérivation numérique	123
a) Calcul des dérivées successives d'une fonction $f(x)$ à partir du polynôme d'interpolation de NEWTON	123
Programme PP.VIII.1	128
b) Calcul des dérivées successives d'une fonction $f(x)$ à partir de la formule de TAYLOR	130
1) Dérivée première à deux points	130
2) Dérivée première à trois points	131
3) Dérivées d'ordre supérieur à un	132
α. Cas d'abscisses équidistantes	132
β. Cas d'abscisses équidistantes	132
4) Généralisation du procédé	134
Programme P.VIII.1 – Calcul d'une dérivée d'ordre quelconque, pour un ordre d'approximation quelconque, à partir d'une suite de points distribués de façon quelconque	142
Programme P.VIII.2 – Calcul d'une dérivée d'ordre quelconque, pour un ordre d'approximation quelconque, à partir d'une suite de points équidistants	145
c) Calcul des dérivées à partir des fonctions SPLINE cubiques	147
d) Calcul des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables	148
II. L'intégration des fonctions	149
a) Application du polynôme de LAGRANGE	149
Programme P.VIII.3	151
b) Application du polynôme de NEWTON	153
1) Formule des trapèzes	154
Programme P.VIII.4	155
2) Formule de SIMPSON	156
Programme P.VIII.5	157
3) Formule de WEDDLE	158
4) Cas des intégrales multiples	158
Programme P.VIII.6 – Application de la formule des trapèzes au cas d'une intégrale double	160
c) Méthode de GAUSS : application de la méthode d'interpolation au sens d'HERMITE	161
1) Cas d'une intégrale simple	161
2) Cas d'une intégrale multiple	167
Programme P.VIII.7 – Calcul de l'intégrale, d'ordre de multiplicité n , d'une fonction de n variables ..	171
d) Application des fonctions SPLINE cubiques	172
e) Calcul des intégrales impropres (ou singulières)	174
III. Résolution des équations différentielles du premier ordre	175
a) La méthode de PICARD	176
b) La méthode de TAYLOR	177

c) Les méthodes de résolution numérique par pas	178
1) La méthode d'EULER	179
α. La méthode générale	179
β. La méthode d'EULER modifiée	179
2) La méthode de RUNGE-KUTTA	181
α. Approximation au second ordre	182
β. Approximation au troisième ordre	183
γ. Approximation au quatrième ordre	183
δ. Approximation au cinquième ordre	184
Programme P.VIII.8 – La méthode de RUNGE-KUTTA au quatrième ordre	185
d) Résolution des systèmes d'équations différentielles du premier ordre	187
e) Résolution des équations aux dérivées partielles. Etude d'un cas particulier	188
Programmes P.VIII.9, P.VIII.10, P.VIII.11 – Eléments de la résolution d'une équation aux dérivées partielles particulières	228

CHAPITRE IX LA SIMULATION

I. Introduction	241
II. La simulation directe	241
Exemple de jeu	241
Programmes P.IX.1, P.IX.2, P.IX.3	246
III. La simulation par modèle déterministe – Introduction d'un graphe	251
Programmes P.IX.4, P.IX.5, P.IX.6	254
IV. La simulation par modèle probabiliste	259
a) Calcul de l'intégrale définie d'une fonction	260
Programme P.IX.7	264
b) Résolution numérique de l'équation de LAPLACE	265
1) Résolution numérique de l'équation de LAPLACE par une méthode numérique classique	269
Programme P.IX.8 – Méthode de JACOBI	271
Programme P.IX.9 – Méthode de GAUSS-SEIDEL	275
2) Résolution de l'équation de LAPLACE par une méthode probabiliste	278
Programme P.IX.10	282

CHAPITRE X CALCULS STATISTIQUES

I. L'approximation au sens des moindres carrés	285
a) Le critère des moindres carrés	285
b) Le polynôme des moindres carrés	288
Programme PP.X.1	296
c) Interpolation probabiliste	300
1) Introduction de la loi de GAUSS	300
2) Conséquences de l'hypothèse probabiliste de l'approximation au sens des moindres carrés	301
α. Détermination du meilleur polynôme d'approximation au sens des moindres carrés	301
β. Evaluation probabiliste de l'erreur limite d'approximation	302
d) Etude d'un cas particulier : la régression linéaire simple	303
Programme P.X.1	306
e) Approximation d'une fonction au sens des moindres carrés, par exponentiation	307
Programme PP.X.2	311
II. Application de la méthode d'approximation par le critère des moindres carrés : la résolution des systèmes d'équations surdéterminés	315
Programme P.X.2	318
III. Construction d'un tableau de contingence. Les coefficients de liaison	321
a) Le tableau de contingence (ou de tris croisés)	321

b) Les coefficients de liaison	321
1) Le coefficient χ^2	321
2) Le coefficient de contingence C	323
3) Le coefficient de corrélation des rangs de KENDALL τ	323
4) Le coefficient de corrélation linéaire R	325
Programme P.X.3	326
IV. Analyse simple de la variance	328
a) Analyse statistique descriptive	329
b) Analyse de la variance	329
Programme P.X.4	332

ANNEXES

A1. Compléments de FORTRAN 77	335
I. Le problème des conversions numériques	335
II. Le problème de la manipulation des caractères et des chaînes de caractères	419
A2. Approximation des fonctions par l'utilisation d'un filtre de KALMAN par B. MAUDRY	511