

COLLECTION INFORMATIQUE

Jacques Zahnd

Logique élémentaire

Cours de base
pour informaticiens

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	1
1.1	Buts généraux	1
1.2	La logique	3
1.3	Plan de l'ouvrage	11
2	Langages formels	15
2.1	Expressions d'un langage	15
2.2	Syntaxe et sémantique	17
2.3	Termes et propositions	22
2.4	Langage et métalangage	24
3	Symboles d'un langage du premier ordre	27
3.1	Exemple mathématique	27
3.2	Exemple informatique	31
3.3	Variables et constantes individuelles	33
3.4	Symboles fonctionnels	37
3.5	Symboles relationnels	40
3.6	Connecteurs logiques	42
3.7	Quantificateurs	48
3.8	Donnée d'un langage du premier ordre	50
4	Syntaxe d'un langage du premier ordre	53
4.1	Diagrammes et règles syntaxiques	53
4.2	Constructions génératrices	54
4.3	Arbres des termes et propositions	58
4.4	Variables libres et variables liées	61
4.5	Substitutions	66
4.6	Termes librement substituables	71
4.7	Exercices	75
5	Théories ou systèmes de déduction	79
5.1	Déductions	79
5.2	Hypothèses et jugements	84
5.3	Théories	88
5.4	Démonstrations et déductions	93
5.5	Théorèmes	97

5.6	Propositions vraies, propositions fausses	98
5.7	Extensions d'une théorie	100
6	Logique propositionnelle	103
6.1	Déductions élémentaires	103
6.2	Quelques démonstrations	110
6.3	Démonstrations naturelles	116
6.4	La loi du tiers exclu et la logique intuitionniste	126
6.5	Déductions structurelles	131
7	Déductions dérivées de logique propositionnelle	139
7.1	Proposition fausse et contradictions	139
7.2	Schémas d'implication	141
7.3	Disjonctions de cas contraires	147
7.4	Propriétés de l'équivalence	150
7.5	Substitutivité de l'équivalence	155
7.6	Schémas de déduction booléens	158
7.7	La règle de dualité	166
7.8	Formes booléennes de l'implication et de l'équivalence	170
7.9	Simplifications conditionnelles	177
7.10	Conditions nécessaires et suffisantes	177
7.11	Exercices	182
8	Introduction à la théorie des ensembles	183
8.1	Le rôle de la théorie des ensembles	183
8.2	L'univers de la théorie des ensembles	185
9	Logique des prédicats	191
9.1	Déductions élémentaires	191
9.2	Convention d'un langage universel	198
9.3	Particularisations	200
9.4	Généralisations	204
9.5	Rôle des déductions structurelles	208
9.6	Introduction de quantificateurs existentiels	212
9.7	Élimination de quantificateurs existentiels	220
10	Déductions dérivées de logique des prédicats	229
10.1	Substitutivité de l'équivalence	229
10.2	Dualité en logique des prédicats	232
10.3	Permutation distribution de quantificateurs	237
10.4	Changements de variables liées	245
10.5	Particularisations simultanées	253
10.6	Exemplifications	259
10.7	Application à la théorie des ensembles	263
10.8	Formes prénexes	274

10.9	Quantificateurs typés	278
11	Logique des prédicats avec égalité	281
11.1	Déductions élémentaires	281
11.2	Schémas de déduction dérivés	286
11.3	Application à la théorie des ensembles	294
11.4	Quantificateurs d'unicité	300
11.5	Exercices	310
12	Extensions définitionnelles	313
12.1	Axiomes et schémas définitionnels	313
12.2	Couples et graphes	320
13	Langages du premier ordre à opérateurs généraux	329
13.1	Opérateurs généraux	329
13.2	Sélecteurs	335
13.3	Termes conditionnels	346
14	Opérateurs de réunion et de collection de la théorie des ensembles	351
14.1	Opérateurs de réunion	351
14.2	Opérateurs de collection simples	359
14.3	Opérateurs de collection généraux	370
15	Fonctions	381
15.1	Fonctions et applications	381
15.2	Opérateurs d'abstraction	384
15.3	Propriétés de fonctions	391
16	Annexe	397
	Démonstrations de théorie des ensembles	397
	Bibliographie	423
	Index	427