

Jacques Vélú

1^{er} CYCLE

Méthodes mathématiques pour l'informatique

Cours et exercices corrigés



3^e édition

DUNOD

SCIENCES SUP

Jacques Vélú



MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

Cours et exercices corrigés

3^e édition

Ce manuel aborde en profondeur tous les thèmes qui constituent la base élémentaire de connaissances mathématiques indispensable à tout informaticien.

L'auteur y présente tous les concepts fondamentaux de la façon la plus intuitive possible avant de procéder à une mise en forme abstraite. Dans chaque chapitre, des problèmes nombreux sont posés et des méthodes pratiques énoncées qui permettent de les résoudre mécaniquement. Des exercices, nombreux et souvent distrayants, éclairent des démonstrations qui vont directement à l'essentiel.

Méthodes mathématiques pour l'informatique est un outil pédagogique très complet et intéressera tous les étudiants du premier cycle (cycle A du CNAM, IUT, BTS, DEUG), ainsi que ceux des MIAGE.

Cette 3^e édition a été entièrement revue et complétée par les solutions des exercices.

JACQUES VÉLÚ

mathématicien de formation, est actuellement professeur titulaire d'une chaire au Conservatoire national des arts et métiers à Paris. Il est également auteur de plusieurs ouvrages en mathématiques et a traduit des livres de vulgarisation scientifique.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA NATURE
ET DE LA VIE



9 782100 044146

ISBN 2 10 004414 1
Code 044414

<http://www.dunod.com>



Table des matières

Avant-propos	xi
1 La notion d'ensemble	1
1. Ensembles	1
2. Éléments	3
3. Sur les façons de définir un ensemble	4
4. Fonctions et applications	6
5. Diverses propriétés des applications	10
6. Exercices sur le chapitre 1	13
2 Constructions d'ensembles	17
1. Produit d'ensembles	17
2. Produit d'une famille d'ensembles	20
3. Puissances d'un ensemble	22
4. Réunion, intersection, somme disjointe	23
5. Exercices sur le chapitre 2	25

3	Cardinal d'un ensemble	27
1.	Ensembles finis	27
2.	Ensembles dénombrables	30
3.	Cardinaux	31
4.	Ensembles infinis	35
5.	Exercices sur le chapitre 3	36
4	Analyse combinatoire	39
1.	Le principe des choix successifs	39
2.	Arrangements	42
3.	Permutations	43
4.	Combinaisons	46
5.	Formule du binôme	48
6.	Exercices sur le chapitre 4	52
5	Relations	55
1.	Définitions	55
2.	Propriétés des relations binaires	58
3.	Relations d'équivalence	60
4.	Exercices sur le chapitre 5	63
6	Ensembles ordonnés	67
1.	Relations d'ordre	67
2.	Diagramme de Hasse	68
3.	Éléments particuliers	71
4.	Exercices sur le chapitre 6	73
7	Calcul booléen	77
1.	Treillis	77
2.	Algèbres de Boole	80
3.	Le théorème de Stone	87
4.	Exercices sur le chapitre 7	89

8 Parties d'un ensemble	93
1. Le treillis $\wp(E)$	93
2. Fonctions caractéristiques	92
3. Le principe d'inclusion-exclusion	101
4. Exercices sur le chapitre 8	103
9 Probabilités combinatoires	105
1. Épreuves et événements	105
2. Fréquences et probabilités	107
3. Lois de probabilité	110
4. Probabilité conditionnelle et indépendance	114
5. Essais répétés	116
6. Exercices sur le chapitre 9	119
10 Fonctions booléennes	127
1. Introduction	127
2. Fonctions booléennes de n variables	132
3. La forme canonique disjonctive	136
4. Fonctions et formules	140
5. Systèmes d'équations booléennes	144
6. Exercices sur le chapitre 10	149
11 Synthèse des fonctions booléennes	153
1. Les chaînes de contacts	153
2. Calcul des fonctions de transmission	156
3. Les portes	159
4. Exercices sur le chapitre 11	162
12 Simplification des formules	167
1. Le problème de la simplification	167
2. Formules polynomiales	168
3. La méthode de Karnaugh	173

4. La méthode des consensus	183
5. Exercices sur le chapitre 12	188
13 Calcul propositionnel	193
1. Propositions	193
2. Connexions	194
3. Formes propositionnelles	200
4. Exercices sur le chapitre 13	207
14 Récurrences, calcul des prédicats	213
1. Prédicats	213
2. Quantificateurs	215
3. Le principe de récurrence	220
4. Définitions récursives	225
5. Exercices sur le chapitre 14	229
15 Arithmétique	233
1. Division euclidienne	233
2. Nombres premiers	236
3. PGCD et PPCM	238
4. Exercices sur le chapitre 15	245
16 Congruences	249
1. Identité de Bézout	249
2. Fractions continues	254
3. Entiers modulo n	256
4. Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$	261
5. Exercices sur le chapitre 16	266
17 Codes détecteurs et codes correcteurs	269
1. Pourquoi coder	269
2. Distance de Hamming	270

2. Erreurs de transmission	272
4. Codage par blocs	274
5. Correction et détection	278
6. Exercices sur le chapitre 17	282
18 Codages linéaires	285
1. Codes linéaires	285
2. Représentations matricielles	288
3. Tableau standard	289
4. Syndromes	292
5. Construction de codes correcteurs	295
6. Codes cycliques	297
7. Exercices sur le chapitre 18	302
19 Graphes	305
1. Différentes sortes de graphes	305
2. Graphes orientés, graphes non orientés	306
3. Quelques problèmes classiques	309
4. Degrés, chemins, circuits, cycles	314
5. Représentations matricielles	318
6. Exercices sur le chapitre 19	324
20 Arbres enracinés	327
1. Arbres	327
2. Racine	330
3. Arbres binaires	333
4. Codes de Huffman	336
5. Exercices sur le chapitre 20	341
21 Automates finis	345
1. Familiarité avec les automates	345
2. Automates	348

3. Langages	351
4. Langage d'un automate fini	357
5. Langages réguliers	367
6. Exercices sur le chapitre 21	370
22 Constructions d'automates	373
1. Simplification d'un automate	373
2. Automates finis non déterministes	382
3. Déterminisation	384
4. Le théorème de Kleene	389
5. Exercices sur le chapitre 22	393
A Systèmes de numération	397
1 Représentation des nombres	397
2 Conversions	399
3. Applications de l'écriture binaire	404
4. Exercices sur l'appendice A	407
B Rudiments d'algèbre linéaire	411
1 Corps	411
2. Espaces vectoriels	413
3. Bases d'un espace vectoriel	415
4. Exercices sur l'appendice B	417
C Calcul matriciel	419
1 Matrices	419
2. Opérations sur les matrices	421
3. Matrices booléennes	425
4. Quelques applications du calcul matriciel	428
5. Exercices sur l'appendice C	432
D Solutions des exercices	435
Index	503