

l'intégrale

Julien Freslon
Jérôme Poineau
Daniel Fredon
Claude Morin

Mathématiques

Exercices incontournables

PC • PSI • PT

- Les exercices incontournables du programme
- Les méthodes de résolution étape par étape
- Les erreurs à éviter
- Les corrigés détaillés

DUNOD

Table des matières

1	Algèbre générale	3
	Exercice 1.1 : Calcul d'un produit	3
	Exercice 1.2 : Propriétés des applications	4
	Exercice 1.3 : Division de polynômes	5
	Exercice 1.4 : Résolution d'un système	6
	Exercice 1.5 : Configuration géométrique	6
	Exercice 1.6 : Utilisation d'une base non canonique de $\mathbb{R}_n[X]$	8
	Exercice 1.7 : Dés pipés et polynômes	9
	Exercice 1.8 : Sous-groupe	10
	Exercice 1.9 : Éléments nilpotents d'un anneau	11
2	Algèbre linéaire	13
	Exercice 2.1 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes	13
	Exercice 2.2 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions	17
	Exercice 2.3 : Étude d'un endomorphisme d'un espace d'endomorphismes	20
	Exercice 2.4 : Diagonalisation	23
	Exercice 2.5 : Réduction (PC-PSI)	27
	Exercice 2.6 : Réduction d'une matrice d'ordre 3 (PC-PSI)	30
	Exercice 2.7 : Trigonalisation	34
	Exercice 2.8 : Réduction d'une matrice à paramètres	38
	Exercice 2.9 : Diagonalisation simultanée (PC-PSI)	40
	Exercice 2.10 : Réduction des matrices de trace nulle	42
	Exercice 2.11 : Formes linéaires et base antéduale (PC-PSI)	45
	Exercice 2.12 : Formes linéaires et hyperplans (PC-PSI)	48
	Exercice 2.13 : Théorème de Cayley-Hamilton (PSI)	52
3	Algèbre bilinéaire	59
	Exercice 3.1 : Égalités du parallélogramme et de la médiane (PC-PT)	59
	Exercice 3.2 : Exemple de produit scalaire (PC-PT)	60
	Exercice 3.3 : Noyaux, images et adjoint (PSI)	62
	Exercice 3.4 : Exemple de matrice définie positive (PC-PSI)	64
	Exercice 3.5 : Construction de matrices positives (PC-PSI)	66
	Exercice 3.6 : Endomorphisme normal (PSI)	67
	Exercice 3.7 : Une inégalité sur le déterminant d'une matrice symétrique (PC-PSI)	70
	Exercice 3.8 : Racine carrée d'une matrice positive (PC-PSI)	73
	Exercice 3.9 : Décomposition polaire (PC-PSI)	75

4	Espaces vectoriels normés	77
	Exercice 4.1 : Réunion et intersection de boules (PC-PSI)	77
	Exercice 4.2 : Ouverts et fermés (PC-PSI)	78
	Exercice 4.3 : Boule unité (PC-PSI)	78
	Exercice 4.4 : Normes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (PC-PSI)	79
	Exercice 4.5 : Comparaison de normes (PC-PSI)	80
	Exercice 4.6 : Compacité du groupe des matrices orthogonales (PSI)	81
	Exercice 4.7 : Un fermé borné non compact (PSI)	82
	Exercice 4.8 : Matrices semblables et normes (PC-PSI)	83
	Exercice 4.9 : Comparaison de normes (PC-PSI)	83
	Exercice 4.10 : Encore une norme (PC-PSI)	84
	Exercice 4.11 : Détermination d'une fonction (PC-PSI)	85
5	Séries numériques	87
	Exercice 5.1 : Nature de séries	87
	Exercice 5.2 : Nature de séries II (PSI)	92
	Exercice 5.3 : Quelques calculs explicites de sommes de séries	98
	Exercice 5.4 : Formule de Stirling	103
	Exercice 5.5 : Séparation des termes pairs et impairs	106
	Exercice 5.6 : Convergence et développement asymptotique	109
	Exercice 5.7 : Un critère de convergence	111
	Exercice 5.8 : Convergence et monotonie	115
	Exercice 5.9 : Équivalents et restes de séries	118
	Exercice 5.10 : Transformation d'Abel (PSI)	127
6	Suites et séries de fonctions	131
	Exercice 6.1 : Convergence uniforme d'une suite de fonctions I (PSI)	131
	Exercice 6.2 : Convergence uniforme d'une suite de fonctions II (PSI)	133
	Exercice 6.3 : Convergence uniforme d'une série de fonctions (PSI)	135
	Exercice 6.4 : Fonction ζ de Riemann (PC-PSI)	138
	Exercice 6.5 : Régularité d'une série de fonctions (PC-PSI)	144
	Exercice 6.6 : Calcul d'intégrales à l'aide de séries de fonctions (PC-PSI)	147
	Exercice 6.7 : Intégration et convergence uniforme (PSI)	152
7	Intégration	159
	Exercice 7.1 : Un calcul d'intégrale I	159
	Exercice 7.2 : Un calcul d'intégrale II	162
	Exercice 7.3 : Changement de variable	166
	Exercice 7.4 : Calcul d'une intégrale à paramètre	167
	Exercice 7.5 : Fonction Γ d'Euler	172
	Exercice 7.6 : Convergence de l'intégrale de Dirichlet	175
	Exercice 7.7 : Transformée de Laplace du sinus cardinal	181
	Exercice 7.8 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet	184
	Exercice 7.9 : Une formule d'Euler	188
	Exercice 7.10 : Intégrale de Gauss	197
	Exercice 7.11 : Théorème de d'Alembert-Gauss	202

8	Séries de Fourier	209
Exercice 8.1 :	Calcul de séries numériques à l'aide de séries de Fourier I	211
Exercice 8.2 :	Calcul de séries numériques à l'aide de séries de Fourier II	214
Exercice 8.3 :	Calcul de séries numériques à l'aide de séries de Fourier III (PC-PSI)	217
Exercice 8.4 :	Relation de récurrence sur les coefficients de Fourier	222
Exercice 8.5 :	Expression d'une intégrale sous forme de série (PC-PSI)	225
Exercice 8.6 :	Inégalité de Wirtinger (PC-PSI)	227
9	Séries entières	237
Exercice 9.1 :	Calculs de sommes de séries numériques	237
Exercice 9.2 :	Calculs de rayons de convergence avec la règle de d'Alembert	238
Exercice 9.3 :	Calculs de rayons de convergence avec la définition	239
Exercice 9.4 :	Domaine de convergence	241
Exercice 9.5 :	Convergence et calcul de la somme I	242
Exercice 9.6 :	Convergence et calcul de la somme II	243
Exercice 9.7 :	Développement d'une fonction en série entière	244
Exercice 9.8 :	Avec une suite récurrente linéaire	245
Exercice 9.9 :	Détermination d'une somme	247
Exercice 9.10 :	Somme de deux séries	248
Exercice 9.11 :	Un équivalent de la somme	249
Exercice 9.12 :	Limite du quotient de deux sommes	250
Exercice 9.13 :	Calcul de la somme d'une série numérique	251
10	Équations différentielles	255
Exercice 10.1 :	Équations emboîtées	255
Exercice 10.2 :	Variation de la constante ou des constantes ?	256
Exercice 10.3 :	Utilisation d'une solution « évidente »	259
Exercice 10.4 :	Utilisation de séries entières (cas régulier)	261
Exercice 10.5 :	Utilisation de séries entières (cas singulier)	263
Exercice 10.6 :	Système différentiel d'ordre 2	265
Exercice 10.7 :	Système différentiel d'ordre 3 (A diagonalisable)	269
Exercice 10.8 :	Système différentiel d'ordre 3 (A trigonalisable)	271
11	Fonctions de plusieurs variables	275
Exercice 11.1 :	Continuité d'une fonction	275
Exercice 11.2 :	À propos du théorème de Schwarz	276
Exercice 11.3 :	Différentiabilité d'une fonction (PSI)	277
Exercice 11.4 :	Une équation aux dérivées partielles	278
Exercice 11.5 :	Équation des cordes vibrantes	279
Exercice 11.6 :	Dérivée directionnelle	281
Exercice 11.7 :	Recherche d'extremums	282
Exercice 11.8 :	Extremums sur un compact	283
Exercice 11.9 :	Extremums d'une fonction de 3 variables	284
Exercice 11.10 :	Majoration (PC-PSI)	286
Exercice 11.11 :	D'un extremum local à un extremum global (PC-PSI)	287
Exercice 11.12 :	Détermination d'un facteur intégrant d'une forme différentielle (PSI)	290

Exercice 11.13 : Calcul d'une intégrale double	292
Exercice 11.14 : Calcul d'une intégrale curviligne	283
12 Courbes et surfaces	295
Exercice 12.1 : Droites tangentes et normales	295
Exercice 12.2 : Enveloppe d'une famille de droites (PT)	296
Exercice 12.3 : Longueur et développée (PT)	297
Exercice 12.4 : Plans tangents à une surface	299
Exercice 12.5 : Intersection d'un cône et d'un plan	300
Exercice 12.6 : Équation d'un cylindre	301
Exercice 12.7 : Étude d'une quadrique	303
Exercice 12.8 : Variations sur les normes usuelles du plan	305
Exercice 12.9 : Quadrique dépendant d'un paramètre	308
Exercice 12.10 : Détermination d'un cône	310
Exercice 12.11 : Intersection d'une quadrique avec un plan et projection	312
Index	315