

TRAITÉ
DE MATHÉMATIQUES

KHELIFA ZIZI

ALGÈBRE LINÉAIRE ET MULTILINÉAIRE
ALGÈBRE QUADRATIQUE

LIVRE 04



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES



Table des matières

1 Espace vectoriel - Application linéaire - Produit et quotient

- 1.1 Espace vectoriel
- 1.2 Application linéaire
- 1.3 Matrices
- 1.4 Sous-espace vectoriel - Noyau et image d'une application linéaire
- 1.5 Produit d'espaces vectoriels
- 1.6 Exemples d'équations linéaires
- 1.7 Espace quotient - Décomposition canonique
- 1.8 Exercices sur les systèmes de vecteurs

2 Base d'un espace vectoriel - Rang d'un système de vecteurs - Rang d'une matrice

- 2.1 Famille génératrice, famille libre
- 2.2 Base d'un espace vectoriel - Espace vectoriel de dimension finie
 - 2.2.1 Complexification d'un espace vectoriel réel
- 2.3 Matrice d'une application linéaire
- 2.4 Rang d'un système de vecteurs, d'une matrice
- 2.5 Résolution des systèmes d'équations linéaires scalaires par la méthode de Gauss
- 2.6 Exercices sur les systèmes d'équations linéaires scalaires

3 Sous-espaces supplémentaires - Indice d'un endomorphisme - Projecteurs - métries

- 3.1 Sous-espaces supplémentaires
- 3.2 Rang et indice - Endomorphisme de Fredholm
- 3.3 Projecteurs - Symétries
- 3.4 Exercices sur applications linéaires

4 Algèbre des matrices carrées

- 4.1 Produit de matrices
 - 4.1.1 Matrices inversibles - Le groupe $GL(n, \mathbf{K})$
- 4.2 Matrices diagonales et triangulaires
- 4.3 Matrices de changement de bases
- 4.4 Matrices équivalentes - Matrices semblables
- 4.5 Matrices élémentaires
- 4.6 Matrices de permutation

4.8	Exercices sur les changements de base et les matrices semblables	
5	Dualité	
5.1	Dual - Base duale - Bidual	
5.2	Orthogonalité	
5.3	Transposée d'une application linéaire	
5.4	Applications de rang fini	
5.5	Relations entre les noyaux et les conoyaux d'une application linéaire et sa t	
5.6	Alternative de Fredholm	
5.7	Dilatation et transvection	
5.8	Exercices sur la dualité	
6	Programmation linéaire	
6.1	Systèmes d'inéquations linéaires homogènes	
6.2	Programme linéaire	
6.3	Variables de base et hors base, solution réalisable de base	
6.4	Méthode du simplexe	
6.5	Méthode des deux phases, méthode des pénalités	
6.6	Dual d'un programme linéaire	
6.7	Transport optimal	
6.8	Solution de base réalisable par la méthode du coin nord-ouest	
6.9	Résolution du programme de transport	
6.10	Exercices sur la programmation linéaire	
7	Introduction à l'algèbre tensorielle	
7.1	Rappels et conventions de notations	
7.2	Produit tensoriel de deux espaces vectoriels	
7.2.1	Produit tensoriel de deux applications linéaires	
7.3	Produit tensoriel d'un nombre fini d'espaces vectoriels	
7.3.1	Produit tensoriel de deux algèbres	
7.4	L'isomorphisme $\mathcal{L}_n(E_1^*, \dots, E_n^*; \mathbf{K})$ et $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$	
7.5	Tenseur p fois contravariant et q fois covariant - Critère de tensorialité	
7.5.1	Contraction d'un tenseur mixte - Multiplication contractée	
7.5.2	Tenseur p fois covariant (resp. contravariant) symétrique	
7.6	Exercices sur les tenseurs	
8	Introduction à l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel	
8.1	Application p -linéaire alternée et antisymétrique, p vecteurs et p covecteurs	
8.2	Antisymétrisée d'une application p -linéaire	
8.3	Base de la puissance extérieure p -ième d'un espace vectoriel de dimension n	
8.4	Exercices sur l'algèbre extérieure	
9	Déterminant de n vecteurs - Applications	
9.1	Déterminant de n vecteurs - Déterminant d'une matrice carrée	
9.2	Déterminant d'un endomorphisme	
9.3	Développement d'un déterminant suivant une ligne (resp. une colonne)	

4.8	Exercices sur les changements de base et les matrices semblables	
5	Dualité	
5.1	Dual - Base duale - Bidual	
5.2	Orthogonalité	
5.3	Transposée d'une application linéaire	
5.4	Applications de rang fini	
5.5	Relations entre les noyaux et les conoyaux d'une application linéaire et sa t	
5.6	Alternative de Fredholm	
5.7	Dilatation et transvection	
5.8	Exercices sur la dualité	
6	Programmation linéaire	
6.1	Systèmes d'inéquations linéaires homogènes	
6.2	Programme linéaire	
6.3	Variables de base et hors base, solution réalisable de base	
6.4	Méthode du simplexe	
6.5	Méthode des deux phases, méthode des pénalités	
6.6	Dual d'un programme linéaire	
6.7	Transport optimal	
6.8	Solution de base réalisable par la méthode du coin nord-ouest	
6.9	Résolution du programme de transport	
6.10	Exercices sur la programmation linéaire	
7	Introduction à l'algèbre tensorielle	
7.1	Rappels et conventions de notations	
7.2	Produit tensoriel de deux espaces vectoriels	
7.2.1	Produit tensoriel de deux applications linéaires	
7.3	Produit tensoriel d'un nombre fini d'espaces vectoriels	
7.3.1	Produit tensoriel de deux algèbres	
7.4	L'isomorphisme $\mathcal{L}_n(E_1^*, \dots, E_n^*; \mathbf{K})$ et $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$	
7.5	Tenseur p fois contravariant et q fois covariant - Critère de tensorialité	
7.5.1	Contraction d'un tenseur mixte - Multiplication contractée	
7.5.2	Tenseur p fois covariant (resp. contravariant) symétrique	
7.6	Exercices sur les tenseurs	
8	Introduction à l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel	
8.1	Application p -linéaire alternée et antisymétrique, p vecteurs et p covecteu	
8.2	Antisymétrisée d'une application p -linéaire	
8.3	Base de la puissance extérieure p -ième d'un espace vectoriel de dimension	
8.4	Exercices sur l'algèbre extérieure	
9	Déterminant de n vecteurs - Applications	
9.1	Déterminant de n vecteurs - Déterminant d'une matrice carrée	
9.2	Déterminant d'un endomorphisme	
9.3	Développement d'un déterminant suivant une ligne (resp. une colonne)	

4.8	Exercices sur les changements de base et les matrices semblables	
5	Dualité	
5.1	Dual - Base duale - Bidual	
5.2	Orthogonalité	
5.3	Transposée d'une application linéaire	
5.4	Applications de rang fini	
5.5	Relations entre les noyaux et les conoyaux d'une application linéaire et sa t	
5.6	Alternative de Fredholm	
5.7	Dilatation et transvection	
5.8	Exercices sur la dualité	
6	Programmation linéaire	
6.1	Systèmes d'inéquations linéaires homogènes	
6.2	Programme linéaire	
6.3	Variables de base et hors base, solution réalisable de base	
6.4	Méthode du simplexe	
6.5	Méthode des deux phases, méthode des pénalités	
6.6	Dual d'un programme linéaire	
6.7	Transport optimal	
6.8	Solution de base réalisable par la méthode du coin nord-ouest	
6.9	Résolution du programme de transport	
6.10	Exercices sur la programmation linéaire	
7	Introduction à l'algèbre tensorielle	
7.1	Rappels et conventions de notations	
7.2	Produit tensoriel de deux espaces vectoriels	
7.2.1	Produit tensoriel de deux applications linéaires	
7.3	Produit tensoriel d'un nombre fini d'espaces vectoriels	
7.3.1	Produit tensoriel de deux algèbres	
7.4	L'isomorphisme $\mathcal{L}_n(E_1^*, \dots, E_n^*; \mathbf{K})$ et $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$	
7.5	Tenseur p fois contravariant et q fois covariant - Critère de tensorialité	
7.5.1	Contraction d'un tenseur mixte - Multiplication contractée	
7.5.2	Tenseur p fois covariant (resp. contravariant) symétrique	
7.6	Exercices sur les tenseurs	
8	Introduction à l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel	
8.1	Application p -linéaire alternée et antisymétrique, p vecteurs et p covecteu	
8.2	Antisymétrisée d'une application p -linéaire	
8.3	Base de la puissance extérieure p -ième d'un espace vectoriel de dimension	
8.4	Exercices sur l'algèbre extérieure	
9	Déterminant de n vecteurs - Applications	
9.1	Déterminant de n vecteurs - Déterminant d'une matrice carrée	
9.2	Déterminant d'un endomorphisme	
9.3	Développement d'un déterminant suivant une ligne (resp. une colonne)	

TABLE DES MATIÈRES

57

9.5	Détermination du rang d'un système de vecteurs ou d'une matrice	
9.6	Résolution des systèmes d'équations linéaires scalaires	
9.6.1	Décomposition $A = LU$, $PA = LU$	
9.7	Familles biorthogonales	
9.8	Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie	
9.9	Exercices sur les déterminants et les applications des déterminants	
10	Equations récurrentes linéaires	
10.1	Cas des équations à coefficients constants	
10.2	Résolution de l'équation non homogène - Méthode de la variation de la constante	
10.3	Exercices sur les équations récurrentes linéaires	
11	Algèbre Cayleyenne, le corps des quaternions	
11.1	Algèbre quadratique	
11.2	Algèbre cayleyenne	
11.3	Le corps des quaternions $\mathbb{H}$	
11.4	Algèbre de Cayley alternative - Octonions	
11.5	Exercices sur les quaternions	

