

L3-M

PHYSIQUE-LMD
Universités-Écoles d'ingénieurs

La géométrie de la relativité restreinte

Jean Parizet



Table des matières

1	De Maxwell à Minkowski	9
1.1	Équations de Maxwell et formes différentielles	9
1.1.1	Équations de Maxwell	9
1.1.2	Ondes planes	11
1.2	Groupe de Lorentz	13
1.3	Interprétations géométrique et cinématique	17
1.3.1	Métrique de Minkowski	17
1.3.2	Interprétation cinématique	18
1.3.3	Remarque	20
2	Cinématique relativiste	23
2.1	Cinématique Galiléenne	23
2.1.1	Exemple élémentaire	23
2.1.2	Interprétation cinématique dans l'espace-temps	25
2.2	Espace de Minkowski	26
2.2.1	Forme quadratique de Minkowski	26
2.2.2	Les divers vecteurs	27
2.2.3	L'observateur et son espace	27
2.2.4	Sous-espaces	28
2.3	Interprétation cinématique	30
2.3.1	Orientation temporelle	30
2.3.2	Histoire d'un phénomène dans l'espace-temps	32
2.3.3	Causalité, simultanéité	33
2.4	Changement d'observateur	34
2.4.1	Effet Doppler	36
2.4.2	Interprétation des "paradoxes"	36
2.4.3	Composition des vitesses	38
3	Exemples	41
3.1	Évaluation optique d'une longueur en mouvement	41
3.2	Échange de signaux lumineux	42
3.3	Jumeaux de Langevin	46
3.4	Chute d'une barre pour un coureur	48
3.5	À propos du disque tournant	51

4	Collisions	57
4.1	Centre de masses	57
4.2	Chocs relativistes	61
4.2.1	Collision élastique	62
4.2.2	"Scattering" de Møller	63
4.2.3	Effet Compton	64
4.2.4	Collision inélastique	65
5	Électromagnétisme	69
5.1	Dynamique relativiste	69
5.2	Champ électromagnétique	71
5.3	Mouvement d'une particule dans un champ constant	75
5.4	Tenseur du champ électromagnétique	81
5.4.1	Matrice donnant la force de Minkowski	81
5.4.2	Tenseur du champ électromagnétique	82
6	Matrices de Lorentz	85
6.1	Définitions	85
6.1.1	Cas élémentaires	85
6.1.2	Boost	86
6.2	Étude d'une matrice de Lorentz	88
6.2.1	Caractérisation	88
6.2.2	Interprétation de ses coefficients	89
6.2.3	Formes polaires d'une matrice de Lorentz	89
6.3	Orientations	89
6.3.1	Déterminant d'une matrice de Lorentz	89
6.3.2	Partition de $\mathcal{L}$ selon les orientations	90
6.4	Groupes de Lorentz et de Galilée	92
6.4.1	Leurs algèbres de Lie	93
6.5	Rotation de Thomas	94
7	Représentation de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{P}$	97
7.1	Algèbre de Pauli $\mathcal{P}$	97
7.1.1	Conventions géométriques	98
7.2	Représentation de $\mathcal{L}$	99
7.2.1	Représentation de $\mathcal{L}^+$	100
7.2.2	Représentation des autres composantes de $\mathcal{L}$	102
7.2.3	Digression : les Quaternions	103
7.3	Rotation de Thomas	103
7.4	Représentation de $Al(\mathcal{L}^+)$	104
7.5	Fonctions sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans $\mathcal{P}$	106
7.5.1	Exponentielle d'un élément de $V_e \oplus PV_e$, Logarithme d'un élément unitaire de $\mathcal{P}$	108

8 Étude de $\mathcal{L}^+$ à l'aide de $\mathcal{P}$	113
8.1 Exemples de vecteurs propres et de valeurs propres d'une matrice de $\mathcal{L}^+$	113
8.2 Polynôme minimal d'une matrice de $\mathcal{L}^+$	115
8.3 Transformations de Lorentz simples	117
8.3.1 Similitudes dans $\mathcal{L}^+$ des matrices simples ou dont la forme polaire présente un demi-tour	118
8.3.2 Décomposition d'une matrice non simple de $\mathcal{L}^+$ en un produit commutatif de deux matrices de genres hyperbolique et elliptique	120
A Algèbre engendrée par une matrice	121
A.1 Cas d'une matrice A nilpotente	121
A.2 Cas général	124
A.3 Fonctions d'une matrice A sur son algèbre $\text{Alg}(A)$	130
A.4 Fonction Exponentielle	132
A.5 Logarithme de $L \in \mathcal{L}^+$	137
B Quaternions	139
B.1 Le corps des quaternions	139
B.2 Rotation dans E_3	141
B.3 Espace affine euclidien de dimension trois	143
B.4 Isométries positives de E_4	144
B.5 Algèbres de Lie	150
C Quaternions et mécanique	155
C.1 Mouvement plan sur plan	155
C.2 Cinématique du solide	157
C.3 Torseurs	160
D Algèbre de Pauli et Spineurs d'Élie Cartan	163
D.1 Relations de commutation	163
D.2 Spineurs d'Élie Cartan	165
Index	171