

TRAITÉ
DE MATHÉMATIQUES

KHELIFA ZIZI

CALCUL DIFFÉRENTIEL DES FONCTIONS
DE PLUSIEURS VARIABLES

LIVRE 08



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES



Table des matières

1 Espaces vectoriels normés - Espaces métriques

1.1	Normes - distances - Espaces métriques	
1.1.1	Espaces vectoriels normés - Normes équivalentes	
1.1.2	Espace métrique - Ensemble ouvert- fermé	
1.1.3	Sous-espaces métriques - Espace métrique produit	
1.1.4	Adhérence, Frontière, Intérieur, Extérieur	
1.1.5	Suite convergente - limite	
1.1.6	Suite de Cauchy - Espace métrique complet	
1.1.7	Complété d'un espace métrique	
1.1.8	Exercices sur les espaces métriques	

2 Eléments de topologie générale

2.1	Ouverts, fermés, voisinages	
2.2	Sous-espace d'un espace topologique - Produit de deux espaces topologiques . . .	
2.3	Comparaison de topologies	
2.4	Espaces compacts	
2.4.1	Le théorème de Bolzano-Weierstrass	
2.4.2	Le théorème de Borel Lebesgue	
2.5	Espaces localement compacts	
2.5.1	Equivalence des normes dans un espace vectoriel normé de dimension finie	
2.6	Espaces connexes	
2.7	Exercices de topologie générale	

3 Fonctions continues

3.1	Fonction d'un espace métrique dans un autre	
3.1.1	Limite d'une fonction en un point	
3.1.2	Fonctions continues et uniformément continues	
3.1.3	Fonctions continues sur des espaces compacts	
3.1.4	Le théorème d'Urysohn	
3.1.5	Le théorème de D'Alembert-Gauss	
3.1.6	Image d'un espace connexe par une application continue	
3.2	Fonctions semi-continues inférieurement (resp. supérieurement)	
3.3	Convergence de suites de fonctions, de droites et de plans	
3.3.1	Convergence de suites de fonctions	
3.3.2	Le chemin de Peano	
3.3.3	Convergence de droites et de plans affines	

TABLE DES MATIÈRES

55

3.4 Exercices sur les fonctions de plusieurs variables

4 Ensembles convexes et fonctions convexes

4.1 Ensembles convexes

4.2 Projection sur un convexe fermé

4.3 Séparation des convexes

4.4 Cônes polyédriques convexes

4.5 Fonction convexe

4.6 Problème général de la programmation convexe

4.7 Normes sur l'espace des applications linéaires

4.8 Exercices sur la convexité

5 Fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles

5.1 Dérivée d'une fonction d'une variable réelle

5.2 Théorème des accroissements finis - Formules de Leibniz

5.3 Dérivée d'ordre n

5.4 Formules de Taylor

5.5 Exercices sur le calcul différentiel d'une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles

6 Calcul Différentiel d'une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

6.1 Différentielle d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

6.1.1 Différentielle, dérivée suivant un vecteur, dérivée partielle d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

6.1.2 Différentielle d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

6.1.3 Matrice jacobienne d'une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

6.1.4 Opérations sur les applications différentiables

6.1.5 Cas des fonctions convexes

6.1.6 Exercices sur la différentiabilité

6.2 Gradient, Divergence, Rotationnel

6.2.1 Gradient d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ à valeurs réelles

6.2.2 Divergence d'un champ de vecteurs

6.2.3 Rotationnel d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

6.2.4 Divergence et rotationnel d'un produit vectoriel de champ de vecteurs

6.2.5 Exercices sur les notions de gradient, divergence, rotationnel

6.3 Le théorème des accroissements finis et ses applications

6.3.1 Le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeur réelle

6.3.2 Applications du théorème des accroissements finis

6.3.3 Le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs vectorielles

6.3.4 Exercices sur le théorème des accroissements finis

6.4 Différentielle d'ordre 2 - Formules de Taylor à l'ordre 2

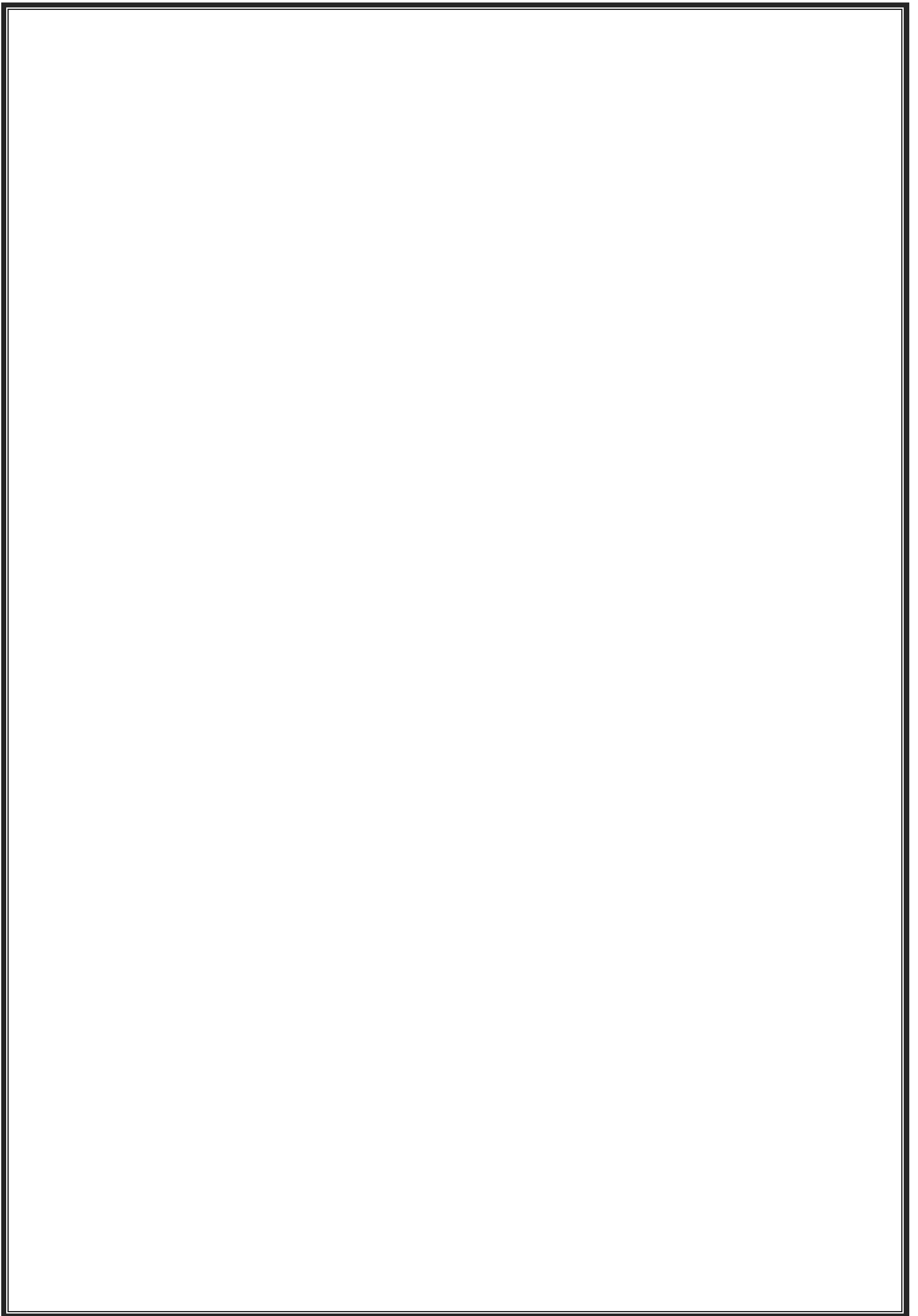
6.4.1 Théorèmes de Schwarz

6.4.2 Différentielle seconde et Matrice Hessienne

6.4.3 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

6.4.4 Cas d'une fonction convexe

6.5.2	Formule de Leibniz	
6.5.3	Formules de Taylor d'ordre quelconque	
6.5.4	Exercices sur les fonctions n fois différentiables	
6.6	Méthode des approximations successives	
6.6.1	Méthode des approximations successives - Théorème du point fixe . .	
6.6.2	Recherche de zéros par itérations	
6.6.3	Méthode de Newton	
6.6.4	Exercices sur la méthode des approximations successives	
6.7	Fonctions implicites - Difféomorphismes	
6.7.1	Existence de la fonction implicite	
6.7.2	Dérivabilité de la fonction implicite	
6.7.3	Difféomorphisme	
6.7.4	Système de fonctions indépendantes - Rang	
6.7.5	Exercices sur les fonctions implicites	
6.8	Extrema libres et extrema liés	
6.8.1	Introduction : Problèmes d'extremum	
6.8.2	Extrema libres	
6.8.3	Extrema liés	
6.8.4	Méthode des moindres carrés	
6.8.5	Cas des fonctions convexes	
6.8.6	Application au problème de la programmation convexe	
6.8.7	Exercices sur les extrema libres et liés	
6.9	Problèmes sur le calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables	
6.10	Liste des relations et des formules	
6.10.1	Liste des formules	
6.10.2	Liste des relations	
6.10.3	Liste des symboles	





KHÉLIFA ZIZI, MATHÉMATICIEN ALGÉRIEN, NAIT À KOLÉÂ (ALGER) EN JUILLET 1935; IL Y FAIT SA SCOLARITÉ, QU'IL POURSUIT AU DUVEYRIER (LYCÉE IBN ROCHD ACTUELLEMENT) À BLIDA.

IL OBTIENT SON BACCALAURÉAT EN 1955. JEUNE INTELLECTUEL ET ENTHOUSIASTE, IL PARTICIPE DE 1956 À 1959 À LA RÉVOLUTION ALGÉRIENNE AU SEIN DE L'ALGERIA FRONT. IL COMMENCE SA CARRIÈRE UNIVERSITAIRE À ORSAY (UNIVERSITÉ DE PARIS XI) EN 1960, OBTIENT SON DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE EN 1964.

IL SOUTIEN SA THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT À L'UNIVERSITÉ DE PARIS XIII EN 1967. SES TRAVAUX PORTENT SUR LA THÉORIE DE DIFFUSION POUR UNE CLASSE D'OPÉRATEURS DE SCHROEDINGER AVEC DES POTENTIELS ASYMPTOTIQUEMENT COULOMBIENS.

IL EST ASSISTANT À L'UNIVERSITÉ DE REIMS DE 1967 À 1970, PUIS MAÎTRE ASSOCIÉ AU CENTRE SCIENTIFIQUE ET POLYTECHNIQUE DE PARIS XIII DE 1971 À 1974 ET ORGANISATEUR DE CONFÉRENCES EN 1975. IL ENSEIGNE PENDANT L'ANNÉE 1975-1976 À L'UNIVERSITÉ D'ORAN ES SÉNIA, OÙ SES COURS SONT PUBLIÉS PAR L'OPU ET CONNAISSANT À CE MOMENT UN GRAND SUCCÈS TANT AUPRÈS DES ÉTUDIANTS QUE DES ENSEIGNANTS.

IL RETOURNE À L'U.E.R. SCIENCES DE REIMS D'ABORD COMME MAÎTRE ASSOCIÉ DE 1977 À 1980 ENSUITE COMME PROFESSEUR ASSOCIÉ DE 1980 À 1986 ET ENFIN PROFESSEUR DE CONFÉRENCES TITULAIRE DE 1986 À 1999. KHÉLIFA ZIZI A RÉDIGÉ LA NOUVELLE VERSION DU COURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LAURENT SCHWARTZ¹ À LA DEMANDE DE CE DERNIER, PARUE ENTRE 1991 ET 1993 (4 TOMES). IL S'EST DONNÉ CES DERNIÈRES ANNÉES COMME OBJECTIF DE RÉÉCRIRE TOUTES LES MATHÉMATIQUES SELON SA MANIÈRE, DES CHOSSES DANS UNE COLLECTION DESTINÉE AUX UNIVERSITAIRES.

KHELIFA ZIZI EST MARIÉ ET PÈRE DE QUATRE FILLES ET DEUX GARÇONS, IL EST ACTUELLEMENT À LA RETRAITE ET HABITE LA BANLIEUE DE PARIS.

CE LIVRE O8 EST CONSACRÉ À L'ÉTUDE DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES, À TRADUIRE ESSENTIELLEMENT LE CALCUL DIFFÉRENTIEL DES FONCTIONS DE $\mathbb{R}^p$ DANS $\mathbb{R}^q$. IL EST DIVISÉ EN CINQ CHAPITRES. LE PREMIER CHAPITRE TRAITE DES ESPACES MÉTRIQUES, DES ÉLÉMENTS DE LA TOPOLOGIE GÉNÉRALE. DANS LE CHAPITRE 2 ON TROUVERA LES THÈMES CLASSIQUES RELATIFS AUX PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES CONSERVÉES PAR LES APPLICATIONS CONTINUES. LE CHAPITRE 3 TRAITE DES FONCTIONS CONVEXES AVEC DEUX THÉORÈMES CLASSIQUES TRÈS IMPORTANTS : - LA PROJECTION, SUR UN CONVEXE FERMÉ; - LA SÉPARATION DES CONVEXES. LE CHAPITRE 4 TRAITE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE À VALEURS VECTORIELLES, NOTIONS INDISPENSABLES À L'ÉTUDE DES COURBES ET À LA CINÉMATIQUE. LE CHAPITRE 5 EST CONSACRÉ AU CALCUL DIFFÉRENTIEL DES FONCTIONS DE $\mathbb{R}^p$ DANS $\mathbb{R}^q$ ET CULMINE AVEC LE TRÈS BEAU THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLIQUES.

CHAQUE CHAPITRE DE CE LIVRE EST DIVISÉ EN SOUS-CHAPITRES. CHAQUE DÉFINITION, AINSI QUE CHAQUE PROPOSITION EST RÉFÉRENCÉE À L'AIDE DE TROIS NOMBRES: LE CHAPITRE, LE SOUS-CHAPITRE, LE NUMÉRO D'ORDRE DANS LE SOUS-CHAPITRE.

A LA FIN DE CHAQUE CHAPITRE SE TROUVE UNE LISTE D'EXERCICES.

¹ - LAURENT SCHWARTZ (1915-2002), MATHÉMATICIEN FRANÇAIS, LAURÉAT DE LA MÉDAILLE FÉLIX DE LAURENT (L'ÉQUIVALENT DU PRIX NOBEL POUR LES MATHÉMATIQUES) EN 1950 POUR SA TRAVAIL SUR LES DISTRIBUTIONS. PREMIER FRANÇAIS À RECEVOIR CETTE DISTINCTION INTERNATIONALE. IL EST SIGNATAIRE DU MANIFESTE DES 121 POUR L'ARRÊT DE LA GUERRE EN ALGÉRIE ET LA DÉFENSE DES DROITS DE L'HOMME.

