

TRAITÉ
MATHÉMATIQUES

KHELIFA ZIZI

CALCUL INTÉGRAL

DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

LIVRE 13



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES



Table des matières

1 Espace mesurable - Application mesurable

- 1.1 Anneau et algèbre de Boole
- 1.2 σ -anneau, σ -algèbre, Classe de Dynkin
- 1.3 Image réciproque d'une tribu
- 1.4 Tribu borélienne d'un espace topologique
- 1.5 Espace mesurable, Application mesurable
- 1.6 Fonction étagée
- 1.7 Exercices sur les anneaux, les σ -algèbres et les fonctions mesurables

2 Mesures sur un anneau(resp. une σ -algèbre) - Convergence des suites de fonctions mesurables

- 2.1 Mesure sur un anneau de Boole
 - 2.1.1 Ensembles négligeables
- 2.2 La mesure de Lebesgue-Stieltjes sur $\mathbb{R}$
 - 2.2.1 Mesure associée à une fonction croissante, continue à gauche
- 2.3 Mesure extérieure - Le théorème de Carathéodory
 - 2.3.1 La mesure de Lebesgue-Stieltjes sur $\mathbb{R}$
- 2.4 Mesure image
- 2.5 Propriétés particulières de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$
- 2.6 Convergence presque partout et convergence en mesure
 - 2.6.1 Convergence presque partout-Théorème d'Egoroff
 - 2.6.2 Convergence en mesure - Théorème de Lebesgue
- 2.7 Exercices sur les mesures et la convergence des suites de fonctions mesurables

3 Mesure de Borel - Mesure de Radon

- 3.1 Mesure de Borel régulière
- 3.2 Mesure de Radon ≥ 0
 - 3.2.1 Prolongement d'une mesure de Radon positive sur l'ensemble des fonctions s.c.i. positives
 - 3.2.2 Prolongement d'une mesure de Radon positive à l'ensemble des fonctions positives
 - 3.2.3 Théorème de Beppo-Levi et lemme de Fatou
 - 3.2.4 Mesurabilité au sens de Lusin
 - 3.2.5 Mesure essentielle associée à une mesure de Radon
- 3.3 L'intégrale de Riemann-Stieltjes : Exemple d'une mesure de Radon ≥ 0

4 Fonctions intégrables

- 4.1 Intégrales des fonctions étagées positives
- 4.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive
- 4.3 Théorème de Beppo-Levi ou de la convergence monotone
- 4.4 Fonctions intégrables
- 4.5 Le théorème de Lebesgue ou théorème de la convergence dominée
- 4.6 Comparaison de l'intégrale de Riemann et de l'intégrale de Lebesgue
- 4.7 Intégration par rapport à une mesure image
- 4.8 Application du théorème de Lebesgue aux intégrales dépendant d'un paramètre
- 4.9 Exercices sur les fonctions intégrables

5 Propriétés particulières aux mesures de Lebesgue sur la droite

- 5.1 Dérivation des fonctions à variation bornée
 - 5.1.1 Fonctions absolument continues
 - 5.1.2 Le théorème fondamental de dérivation
 - 5.1.3 Formule d'intégration par parties
- 5.2 Fonctions semi-intégrables - Intégrales impropres
 - 5.2.1 Fonctions semi-intégrables
 - 5.2.2 Famille de fonctions uniformément semi-intégrables
- 5.3 Exercices sur les propriétés particulières des mesures sur la droite réelle

6 Intégrales multiples

- 6.1 Produit tensoriel de deux mesures σ -finies
- 6.2 Intégrale d'une fonction par rapport à une mesure produit
 - 6.2.1 Le théorème de Fubini-Tonelli
 - 6.2.2 Le théorème de Fubini
- 6.3 Théorème d'intégration par parties et formule de la moyenne pour Lebesgue-Stieltjes
- 6.4 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$
- 6.5 Le théorème de dérivation de Lebesgue dans $\mathbb{R}^p$
- 6.6 Théorème du changement de variables dans une intégrale dans $\mathbb{R}^p$
- 6.7 Applications pratiques du théorème du changement de variables
 - 6.7.1 Coordonnées polaires
 - 6.7.2 Coordonnées sphériques
- 6.8 Mesure invariante sur la sphère S_{p-1} de $\mathbb{R}^p$
- 6.9 Exercices sur les intégrales multiples

7 Fonctions de puissance p -ème intégrable

- 7.1 Les espaces $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu)$: Inégalités de Hölder
- 7.2 Relations entre les divers espaces $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu)$
- 7.3 Inégalité de Minkowski - L'espace normé $L^p(X, \mathcal{T}, \mu)$
- 7.4 Le théorème de Riesz-Fisher pour les espaces $L^p(X, \mathcal{T}, \mu)$
- 7.5 Théorèmes de densité
- 7.6 Les espaces $\mathcal{L}^\infty(\mu, F)$ et $L^\infty(X, \mathcal{T}, \mu)$
- 7.7 Exercices sur les fonctions de puissance intégrables

TABLE DES MATIÈRES

8 Produit de convolution

- 8.1 La convolution dans $L^1(\mathbb{R}^n)$
- 8.2 Extension de la convolution à d'autres classes de fonctions
- 8.3 Approximation de l'unité
- 8.4 Une application de la convolution : la régularisation
 - 8.4.1 Partition de l'unité
- 8.5 Extension de la convolution grâce à des conditions sur les supports
- 8.6 La convolution des mesures
- 8.7 Exercices sur le produit de convolution

9 La transformation de Fourier

- 9.1 Transformée de Fourier des fonctions intégrables
 - 9.1.1 Transformation de Fourier des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide
- 9.2 Extension de la transformation de Fourier aux espaces $L^2(\mathbb{R}^n)$,
- 9.3 Transformée de Fourier d'une mesure bornée sur $\mathbb{R}^n$
- 9.4 Inverse de la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$
- 9.5 Inverse de la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$
 - 9.5.1 Convergence d'une suite de mesures bornées
- 9.6 Exercices sur la transformée de Fourier
- 9.7 Liste des formules
- 9.8 Symboles



KHÉLIFA ZIZI, MATHÉMATICIEN ALGÉRIEN, NAIT À KOLÉÂ EN JUILLET 1935; IL Y FAIT SA SCOLARITÉ, QU'IL POURSUIT DUVEYRIER (LYCÉE IBN ROCHD ACTUELLEMENT) À BLIDA.

IL OBTIENT SON BACCALAURÉAT EN 1955. JEUNE INTELLECTUEL ET IL PARTICIPE DE 1956 À 1959 À LA RÉVOLUTION ALGÉRIENNE AU SEIN IL COMMENCE SA CARRIÈRE UNIVERSITAIRE À ORSAY (UNIVERSITÉ XI) EN 1960, OBTIENT SON DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE EN 1961, SOUTIENT SA THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT À L'UNIVERSITÉ DE PARIS XIII

SES TRAVAUX PORTENT SUR LA THÉORIE DE DIFFUSION POUR UNE CLASSE D'OPÉRATEURS DE SCHROEDINGER AVEC DES POTENTIELS ASYMPTOTIQUEMENT COULOMBIENS.

IL EST ASSISTANT À L'UNIVERSITÉ DE REIMS DE 1967 À 1970, PUIS MAÎTRE A À REIMS AU CENTRE SCIENTIFIQUE ET POLYTECHNIQUE DE PARIS XIII DE 1971 À 1974 ET DE CONFÉRENCES EN 1975. IL ENSEIGNE PENDANT L'ANNÉE 1975-1976 À L'UNIVERSITÉ D'ORAN ES SÉNIA, OÙ SES COURS SONT PUBLIÉS PAR L'OPU ET CONNAISSENT UN GRAND SUCCÈS TANT AUPRÈS DES ÉTUDIANTS QUE DES ENSEIGNANTS.

IL RETOURNE À L'U.E.R. SCIENCES DE REIMS D'ABORD COMME MAÎTRE A À REIMS DE 1977 À 1980 ENSUITE COMME PROFESSEUR ASSOCIÉ DE 1980 À 1986 ET EN 1987 DE CONFÉRENCES TITULAIRE DE 1986 À 1999. KHÉLIFA ZIZI A RÉDIGÉ LA 1^{ère} VERSION DU COURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LAURENT SCHWARTZ¹ À LA PLACE DE CE DERNIER, PARUE ENTRE 1991 ET 1993 (4 TOMES). IL S'EST DONNÉ CES DERNIÈRES ANNÉES COMME OBJECTIF DE RÉÉCRIRE TOUTES LES MATHÉMATIQUES SELON SES VUES DES CHOSSES DANS UNE COLLECTION DESTINÉE AUX UNIVERSITAIRES.

LE PRÉSENT OUVRAGE COMPORTE NEUF CHAPITRES. LES CHAPITRES 1, 2 ET 3 SONT CONSACRÉS À L'INTRODUCTION DE LA NOTION D'ESPACE MESURABLE, D'ESPACE DE MESURABLE ET DE MESURE ABSTRAITE AVEC LE THÉORÈME DE CARATHÉODORISME DES MESURES DE LEBESGUE-STIELTJÈS. ON ÉNONCE ENSUITE LES THÉORÈMES DE H. LEBESGUE, D'EGOROFF ET DE F. RIESZ CONCERNANT LA CONVERGENCE DES FONCTIONS MESURABLES. ON TERMINE LE CHAPITRE 3 PAR L'INTRODUCTION DES MESURES DE RADON. ON ABORDE LE CHAPITRE 4, LA DÉFINITION D'UNE FONCTION INTÉGRABLE, AVEC LES THÉORÈMES DE BEPPO-LEVI, DE LEBESGUE ET LE LEMME DE FATOU. LES DEUX THÉORIES D'INTÉGRATION TROUVENT LEUR JONCTION DANS LE THÉORÈME DE F. RIESZ. ON DÉGAGE ENSUITE LA NOTION DE FONCTION ABSOLUMENT CONTINUE ET LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE CALCUL DE LEBESGUE ET LA FORMULE D'INTÉGRATION PAR PARTIES. PUIS ON PRÉSENTE LE CHAPITRE 5, LES PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES AUX MESURES DE LEBESGUE SUR LA DROITE RÉELLE. LE CHAPITRE 6 CONCERNE LE PRODUIT TENSORIEL DE MESURES. LES THÉORÈMES DE FUBINI-TONELLI ET DE FUBINI, PARTICULARITÉ DE LA MESURE DE LEBESGUE λ_n SUR $\mathbb{R}^n$ ET LE THÉORÈME DE CHANGEMENT DE VARIABLE. LES CHAPITRES 7, 8 ET 9, ON ÉNONCE LES INÉGALITÉS DE HÖLDER, DE CAUCHY-SCHWARTZ, DE MINKOWSKI, LE THÉORÈME DE RIESZ-FISHER. ON DÉFINIT ENSUITE LE PRODUIT DE CONVOLUTION DE DEUX FONCTIONS INTÉGRABLES ET LA TRANSFORMATION DE FOURIER D'UNE FONCTION INTÉGRABLE.

CHACUN DES CHAPITRES COMPORTE UN CERTAIN NOMBRE D'EXERCICES ET DE PROBLÈMES.

1 - LAURENT SCHWARTZ (1915-2002), MATHÉMATICIEN FRANÇAIS, LAURÉAT DE LA MÉDAILLE FÉLIX DE LAURENT (L'ÉQUIVALENT DU PRIX NOBEL POUR LES MATHÉMATIQUES) EN 1950 POUR SES TRAVAUX SUR LES DISTRIBUTIONS. PREMIER FRANÇAIS À RECEVOIR CETTE DISTINCTION INTERNATIONALE. IL A ÉTÉ LE SIGNATAIRE DU MANIFESTE DES 121 POUR L'ARRÊT DE LA GUERRE EN ALGÉRIE ET LA DÉFENSE DES DROITS DE L'HOMME.

