

Patrick **Bogaert**

Probabilités pour **scientifiques** **et ingénieurs**

Introduction au calcul des probabilités

**COURS
ET EXERCICES CORRIGÉS**

LMD

Licence de biologie, de physique,
de mathématiques, écoles
d'ingénieurs



de boeck

Table des matières

Avant-propos	i
Note aux enseignants	iii
Note aux étudiants	v
Introduction	vii
1 Notions de base	1
1.1 Expérience aléatoire ou épreuve	2
1.2 Événement	4
1.2.1 Relations entre événements	4
1.2.2 Composition d'événements	5
1.2.3 Algèbre des événements	7
1.2.4 Système complet d'événements ou partition	9
1.2.5 Diagrammes en arbre	10
1.3 Combinaison d'expériences aléatoires *	12
2 Notions de probabilité	15
2.1 Probabilité d'un événement	16
2.1.1 Définition classique	16
2.1.2 Définition en fréquence	16
2.1.3 Définition axiomatique	18
2.1.4 Probabilités théoriques et subjectives	21
2.2 Probabilité conditionnelle	22
2.3 Théorème des probabilités composées	27
2.4 Théorème des probabilités totales	28
2.5 Théorème de Bayes	29
2.6 Indépendance	33
2.6.1 Indépendance entre événements	33
2.6.2 Indépendance conditionnelle *	36
2.6.3 Indépendance entre épreuves *	38
3 Variables aléatoires	41
3.1 Définition	42
3.2 Variable aléatoire discrète	43
3.2.1 Fonction de probabilité	44
3.2.2 Fonction de répartition	46
3.2.3 Loi de Bernoulli	48

3.2.4	Répétitions de l'épreuve de Bernouilli	49
	Loi binomiale	49
	Loi hypergéométrique	52
	Loi géométrique	53
	Loi de Pascal ou loi binomiale négative	54
3.2.5	Loi de Poisson	56
	Approximation de la loi binomiale	58
3.3	Variable aléatoire continue	59
3.3.1	Fonction de répartition	60
3.3.2	Fonction de densité de probabilité	62
3.3.3	Loi uniforme	63
3.3.4	Loi exponentielle	64
3.3.5	Loi normale ou loi de Gauss-Laplace	66
3.4	Approximation d'une loi par une autre	70
3.5	Variable aléatoire mixte ★	71
3.6	Loi de probabilité conditionnelle ★	73
3.6.1	Événements définis sur la loi de probabilité	74
	Cas général	74
	Processus temporels et fonctions de survie	76
	Processus sans mémoire	77
3.6.2	Événements définis sur d'autres lois	79
	Théorème des probabilités totales	79
	Probabilités totales et composées	80
	Théorème de Bayes	82
4	Grandeurs caractéristiques	85
4.1	Mode	86
4.2	Médiane	86
4.3	Quantiles	88
4.4	Espérance	92
4.5	Variance	96
4.6	Inégalités intéressantes ★	98
4.6.1	Inégalité de Markov	99
4.6.2	Inégalité de Chebyshev	100
5	Fonction d'une variable aléatoire	103
5.1	Loi de probabilité	104
5.1.1	Cas général	104
5.1.2	Cas des fonctions strictement monotones	108
5.1.3	Cas des fonctions linéaires	109
5.2	Espérance	111
5.2.1	Cas général	111
5.2.2	Cas des fonctions linéaires	114
5.3	Variance	115
5.4	Variable centrée réduite	116
5.5	Linéarisation d'une fonction non linéaire ★	116
5.6	Moments d'une variable aléatoire ★	119
5.7	Fonction génératrice des moments ★	120
5.8	Fonction caractéristique ★	122

6 Couples aléatoires	125
6.1 Domaine de variation conjoint	126
6.2 Distribution conjointe	126
6.2.1 Fonction de répartition	127
6.2.2 Fonction de (densité de) probabilité	128
6.3 Probabilité d'un événement	130
6.4 Distributions marginales	132
6.4.1 Fonctions de répartition	133
6.4.2 Fonctions de (densité de) probabilité	133
6.5 Distributions conditionnelles	136
6.5.1 Cas discret	136
6.5.2 Cas continu	137
6.5.3 Distribution conditionnelle à un événement	139
6.5.4 Théorème des probabilités composées	139
6.5.5 Théorème des probabilités totales	140
6.5.6 Théorème de Bayes	144
6.6 Cas particuliers *	145
6.6.1 Couple aléatoire mixte	145
6.6.2 Couple comme fonctions d'une variable	147
Couple (X, Y) avec $Y = h(X)$	147
Couple (X, Y) avec $X = h_x(Z)$, $Y = h_y(Z)$	148
6.7 Indépendance	148
6.8 Caractéristiques du couple aléatoire	152
6.8.1 Mode	152
6.8.2 Covariance	153
6.8.3 Corrélation	156
6.8.4 Espérance et variance conditionnelles	157
Régression	159
Lien entre espérance et espérance conditionnelle	161
6.9 Fonctions d'un couple aléatoire	162
6.9.1 Cas général	162
6.9.2 Quelques cas particuliers *	164
Cas n°1 : $Z = X + Y$ avec $X \perp Y$	164
Cas n°2 : $Z = X/Y$ avec X et Y quelconques	167
Cas n°3 : $Z = \max(X, Y)$ ou $Z = \min(X, Y)$ avec $X \perp Y$	168
6.9.3 Couple fonction d'un autre couple *	169
6.9.4 Espérance	171
Cas général	172
Cas des fonctions linéaires	173
Cas de l'indépendance	174
6.9.5 Variance	175
6.9.6 Linéarisation de fonctions non linéaires *	176
6.9.7 Moments conjoints d'un couple aléatoire *	178
6.9.8 Fonction génératrice des moments conjoints *	178
6.9.9 Fonction caractéristique conjointe *	179
6.10 Couple aléatoire normal	181
6.10.1 Fonction de densité conjointe	181
6.10.2 Fonction caractéristique conjointe *	183
6.10.3 Fonctions de densité marginales	183
6.10.4 Fonctions de densité conditionnelles	184

6.10.5	Indépendance	186
6.10.6	Fonctions linéaires	186
7	Vecteurs aléatoires	189
7.1	Définition	190
7.2	Distribution conjointe	191
7.3	Distributions marginales	192
7.4	Distributions conditionnelles	194
7.5	Indépendance	195
7.6	Caractéristiques du vecteur aléatoire	197
7.7	Espérance et (co)variance conditionnelles	200
7.8	Fonctions d'un vecteur aléatoire	203
7.8.1	Cas général	203
7.8.2	Cas des fonctions inversibles ★	204
7.8.3	Cas des fonctions linéaires	210
7.8.4	Espérance et (co)variance	211
	Cas des fonctions linéaires	213
7.8.5	Linéarisation de fonctions non linéaires ★	216
7.8.6	Fonction caractéristique conjointe ★	217
7.8.7	Moyenne expérimentale	219
	Loi faible des grand nombres	220
7.8.8	Théorème central limite	221
7.9	Vecteur aléatoire normal	224
7.9.1	Distribution conjointe	224
7.9.2	Distributions marginales et conditionnelles	225
7.9.3	Indépendance	228
7.9.4	Fonctions linéaires	229
7.10	Loi multinomiale ★	232
7.10.1	Domaine de variation	232
7.10.2	Distribution conjointe	233
7.10.3	Regroupements	234
7.10.4	Distributions marginales	235
7.10.5	Distributions conditionnelles	237
7.10.6	Espérances et covariances	237
7.10.7	Indépendance	239
8	Nombres aléatoires ★	241
8.1	Définition	242
8.2	Générateur aléatoire uniforme	242
8.3	Générateur aléatoire non uniforme	243
8.3.1	Génération par inversion	244
8.3.2	Génération par transformation	248
8.3.3	Vecteur aléatoire	250
	Vecteur aléatoire normal	253
8.4	Méthodes de Monte-Carlo	254
8.4.1	Simulations numériques	255
8.4.2	Intégration numérique	258
8.4.3	Optimisation par recuit simulé	262

9 Introduction à la Statistique *	267
9.1 Population et échantillon	268
9.2 Statistique	269
9.3 Estimateur ponctuel	270
Statistiques d'ordre	272
9.3.1 Qualités d'un estimateur	274
Biais	274
Efficacité	276
Consistance	279
9.3.2 Obtention d'un estimateur	280
Méthode des moments	280
Méthode du maximum de vraisemblance	282
Méthode des moindres carrés	286
Autres méthodes	291
9.3.3 Distribution des estimateurs	291
9.4 Estimateurs par intervalle de confiance	295
9.5 Statistique multivariée	299
A Calcul combinatoire	303
A.1 Permutations	303
A.2 Arrangements sans répétitions	304
A.3 Combinaisons	304
A.4 Arrangements avec répétitions	305
A.5 Approximation de Stirling	306
B Calcul matriciel	307
B.1 Matrices réelles	307
B.1.1 Transposée	308
B.1.2 Somme et produit	308
B.1.3 Forme quadratique	309
B.1.4 Inverse	309
B.1.5 Valeurs propres et vecteurs propres	309
B.1.6 Rang et déterminant	309
B.2 Matrices partitionnées	310
B.2.1 Transposée, somme et produit	310
B.2.2 Inverse et déterminant	311
B.3 Dérivées d'ordre 1	311
B.3.1 Cas d'un scalaire	311
B.3.2 Cas d'un vecteur	312
Changement de variables	312
B.3.3 Cas d'une forme quadratique	313
B.4 Dérivées d'ordre 2	313
B.5 Espérances et (co)variances	314
C Calcul numérique	315
C.1 Polynôme de Taylor	315
C.1.1 Fonction d'une variable	315
C.1.2 Fonction de plusieurs variables	317
Linéarisation de fonctions non linéaires	318
Minimum et maximum d'une fonction	318

C.2	Dérivation numérique	321
C.3	Intégration numérique	322
C.3.1	Méthode du polynôme de Taylor	323
C.3.2	Méthode des trapèzes	323
D	Principales lois de probabilité	327
	Loi de Bernoulli	328
	Loi binomiale	329
	Loi de Cauchy	330
	Loi du Chi-carré	331
	Loi d'Erlang	332
	Loi exponentielle	333
	Loi de Fisher-Snedecor	334
	Loi Gamma	335
	Loi géométrique	336
	Loi hypergéométrique	337
	Loi log-normale	338
	Loi multinomiale	339
	Loi normale ou de Gauss-Laplace	340
	Loi du vecteur aléatoire normal	341
	Loi de Pascal ou binomiale négative	342
	Loi de Poisson	343
	Loi de Student	344
	Loi uniforme	345
E	Tables	347
	Loi binomiale – fonction $p(x)$	348
	Loi binomiale – fonction $F(x)$	349
	Loi de Poisson – fonction $p(x)$	350
	Loi de Poisson – fonction $F(x)$	351
	Loi normale réduite – fonction $f(z)$	352
	Loi normale réduite – fonction $F(z)$	353
	Loi normale réduite – quantiles z_p	354
	Loi du chi-carré – quantiles x_p	355
	Loi de Student – quantiles x_p	356
	Loi de Fisher-Snedecor – quantiles $x_{0.95}$	357
	Loi de Fisher-Snedecor – quantiles $x_{0.99}$	362
F	Formulaire abrégé	367

Patrick Bogaert

Probabilités pour scientifiques et ingénieurs

Introduction au calcul des probabilités

Indispensable et incontournable dans le domaine des sciences et de l'ingénierie, l'enseignement du calcul des probabilités est souvent perçu a priori comme un pénible exercice de style par les étudiants non mathématiciens, qui ont du mal à en percevoir les tenants et les aboutissants. Le but de cet ouvrage est d'essayer de remédier à ce paradoxe. Un effort tout particulier a été consenti par l'auteur pour rendre le texte instructif, agréable à lire et facile à suivre.

L'auteur a choisi d'illustrer abondamment par l'exemple les concepts théoriques afin de permettre au lecteur de bien comprendre les notions les plus fondamentales.

Cet ouvrage répond à deux attentes :

- Il constitue le support d'un cours à l'intention des étudiants en science et ingénierie, au niveau d'un premier cycle universitaire. À ce titre, sa présentation a été organisée en allant des concepts les plus élémentaires vers des notions plus élaborées faisant appel à un bagage mathématique plus important. L'ouvrage ayant été conçu pour une lecture linéaire, un enseignant ne devrait avoir aucune difficulté à l'utiliser tout ou en partie selon les exigences requises.
- Ce livre est aussi destiné à servir d'ouvrage de référence pour les chercheurs amenés à devoir utiliser le calcul des probabilités dans le cadre de leurs travaux.



Les « plus »

- ▶ Très bonne approche, avec une progression logique.
- ▶ Ouvrage complet et agréable à lire.
- ▶ De très nombreux exemples.
- ▶ Des synthèses permettant un accès rapide aux résultats les plus importants.

Patrick Bogaert Ingénieur Agronome, Ph.D. Professeur à l'Université Catholique de Louvain

ISBN 978-2-8041-4794-5



PROSCI

Dans le cadre du nouveau Système Européen de Transfert de Crédits (E.C.T.S.), ce manuel couvre **en France** le niveau : Licence 1-2-3.

En Belgique Baccalauréat 1-2-3

En Suisse Bachelor 1-2-3

Au Canada Baccalauréat 1-2-3

