

David HILBERT

THÉORIE
DES
CORPS DE NOMBRES ALGÈBRIQUES



ÉDITIONS
JACQUES GABAY

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE PAR M. G. HUMBERT.....	I
AVERTISSEMENT.....	II
PRÉFACE DE L'AUTEUR.....	III

Tome I^{er}. — 1909

<i>Table des ouvrages cités dans le texte.....</i>	257
--	-----

PREMIÈRE PARTIE. — Théorie générale.

CHAPITRE I. — Nombres algébriques et corps algébriques.

§ 1. — Les corps et les corps conjugués.....	265
§ 2. — Entiers algébriques.....	266
§ 3. — Norme, différent, discriminant d'un nombre. Base d'un corps.....	267

CHAPITRE II. — Idéaux du corps.

§ 4. — Multiplication et division des idéaux. Idéaux premiers.....	269
§ 5. — Décomposition unique d'un idéal en idéaux premiers.....	272
§ 6. — Les formes du corps et leur contenu.....	274

CHAPITRE III. — Congruences par rapport aux idéaux.

§ 7. — La norme d'un idéal et ses propriétés.....	276
§ 8. — Théorème de Fermat pour les idéaux. Fonction $\varphi(\mathfrak{a})$	279
§ 9. — Nombres primitifs suivant un idéal premier.....	280

CHAPITRE IV. — Le discriminant du corps et ses diviseurs.

§ 10. — Diviseurs du discriminant. Lemmes sur les polynômes.....	282
§ 11. — Équation fondamentale : décomposition et discriminant.....	285
§ 12. — Éléments et différent du corps. Théorème sur les diviseurs du discriminant du corps.....	287
§ 13. — Détermination des idéaux premiers. Diviseur fixe de la forme unité rationnelle U.....	288

CHAPITRE V. — Corps relatifs.

§ 14. — Norme, différent et discriminant relatifs.....	290
§ 15. — Propriétés de la différent et du discriminant relatifs.....	292
§ 16. — Décomposition d'un élément du corps k dans le corps supérieur K. Théorème sur la différent de K.....	295

CHAPITRE VI. — *Unités du corps.*

§ 17. — Existence de nombres conjugués vérifiant en valeur absolue certaines inégalités.	296
§ 18. — Théorèmes sur la valeur absolue du discriminant.	298
§ 19. — Existence des unités. Lemme sur l'existence d'une unité de nature particulière.	300
§ 20. — Démonstration de l'existence des unités.	303
§ 21. — Unités fondamentales. Régulateur. Système d'unités indépendantes.	306

CHAPITRE VII. — *Classes d'idéaux.*

§ 22. — Classes d'idéaux. Le nombre des classes est fini.	307
§ 23. — Applications.	308
§ 24. — Détermination des classes. Sens plus restreint de la notion de classe.	310
§ 25. — Lemme sur la valeur asymptotique du nombre de tous les idéaux principaux divisibles par un idéal donné.	310
§ 26. — Détermination du nombre de classes par le résidu de $\zeta(s)$ pour $s = 1$.	313
§ 27. — Autres développements de $\zeta(s)$.	316
§ 28. — Composition des classes d'idéaux.	316
§ 29. — Caractères d'une classe. Généralisation de $\zeta(s)$.	317

CHAPITRE VIII. — *Les formes décomposables du corps.*

§ 30. — Formes décomposables. Les classes de formes et leur composition.	317
--	-----

CHAPITRE IX. — *Les anneaux du corps.*

§ 31. — Anneaux. Idéaux d'anneaux.	320
§ 32. — Anneaux définis par un seul entier algébrique. Théorème sur la différence d'un entier du corps.	321
§ 33. — Idéaux d'anneaux réguliers. Leur divisibilité.	325
§ 34. — Unités d'un anneau. Classes d'un anneau.	327
§ 35. — Modules et classes de modules.	328

DEUXIÈME PARTIE. — *Corps de Galois.*CHAPITRE X. — *Idéaux premiers du corps de Galois et de ses sous-corps.*

Tome II. — 1910

§ 36. — Décomposition unique en idéaux premiers des idéaux d'un corps de Galois.	225
§ 37. — Éléments, différence et discriminant d'un corps de Galois.	227
§ 38. — Sous-corps d'un corps de Galois.	228
§ 39. — Corps de décomposition, corps d'inertie d'un idéal premier.	228
§ 40. — Théorème sur le corps de décomposition.	230
§ 41. — Corps de ramification d'un idéal premier.	231
§ 42. — Théorème sur le corps d'inertie.	232
§ 43. — Théorèmes sur les groupes et corps de ramification.	232
§ 44. — Groupes et corps de ramification soulignés.	233
§ 45. — Résumé des théorèmes sur la décomposition d'un nombre premier p dans le corps de Galois.	234

CHAPITRE XI. — *Différents et discriminants du corps de Galois.*

- § 46. — Différents du corps d'inertie et des corps de ramification..... 236
 § 47. — Les diviseurs du discriminant du corps de Galois..... 237

CHAPITRE XII. — *Rapports entre les propriétés arithmétiques et algébriques d'un corps de Galois.*

- § 48. — Le corps de Galois relatif, corps abélien relatif, corps cyclique relatif..... 238
 § 49. — Propriétés algébriques des corps d'inertie et de ramification. Représentation des nombres d'un corps de Galois par des radicaux dans le domaine du corps de décomposition..... 239
 § 50. — Densité des idéaux premiers du premier degré; relation de cette densité avec les propriétés algébriques du corps..... 240

CHAPITRE XIII. — *Composition des corps.*

- § 51. — Corps de Galois composé d'un corps et de ses conjugués..... 242
 § 52. — Composition de deux corps dont les discriminants sont premiers entre eux..... 242

CHAPITRE XIV. — *Idéaux premiers du premier degré. Notion de classe.*

- § 53. — Les classes d'idéaux peuvent être engendrées par les idéaux premiers du premier degré..... 244

CHAPITRE XV. — *Corps cyclique relatif de degré premier.*

- § 54. — Puissance symbolique. Théorème sur les nombres de norme relative égale à 1... 246
 § 55. — Système d'unités relatives fondamentales..... 248
 § 56. — Existence dans le corps d'une unité de norme relative égale à 1 et qui n'est pourtant pas le quotient de deux unités conjuguées relatives..... 250
 § 57. — Idéaux ambiges et différente relative du corps cyclique relatif..... 252
 § 58. — Théorème fondamental sur les corps cycliques relatifs dont la différente relative est égale à 1. Définition de ce corps comme corps de classes..... 253

TROISIÈME PARTIE. — *Les corps quadratiques.*CHAPITRE XVI. — *Décomposition des nombres dans un corps quadratique.*

- § 59. — Base et discriminant d'un corps quadratique..... 255
 § 60. — Idéaux premiers d'un corps quadratique..... 256
 § 61. — Symbole $\left(\frac{a}{w}\right)$ 258
 § 62. — Unités du corps quadratique..... 259
 § 63. — Classes d'idéaux..... 260

CHAPITRE XVII. — *Genres dans un corps quadratique et leurs caractères.*

- § 64. — Symbole $\left(\frac{n, m}{w}\right)$ 260
 § 65. — Caractères d'un idéal..... 265
 § 66. — Caractères d'une classe d'idéaux. Genre..... 266

§ 67. — Théorème fondamental sur les genres.....	267
§ 68. — Lemme sur les corps quadratiques dont les discriminants ne sont divisibles que par un seul nombre premier.....	267
§ 69. — Loi de réciprocité des restes quadratiques. Lemme sur le symbole $\left(\frac{n, m}{w}\right)$	268
§ 70. — Démonstration de la relation fondamentale du théorème 100 entre tous les caractères d'un genre.....	271

CHAPITRE XVIII. — *Existence des genres.*

§ 71. — Théorème sur les normes des nombres d'un corps quadratique.....	272
§ 72. — Classes du genre principal.....	274
§ 73. — Idéaux ambiges.....	275
§ 74. — Classes d'idéaux ambiges.....	275
§ 75. — Classes ambiges déterminées par des idéaux ambiges.....	276
§ 76. — Classes ambiges sans idéal ambige.....	277
§ 77. — Nombre des classes ambiges.....	278
§ 78. — Démonstration arithmétique de l'existence des genres.....	279
§ 79. — Expression transcendante du nombre de classes et application à la démonstration de l'existence d'une limite positive pour un certain produit infini.....	279
§ 80. — Existence d'une infinité de nombres premiers pour lesquels des nombres donnés ont des caractères de résidus quadratiques donnés.....	281
§ 81. — Existence d'une infinité d'idéaux premiers ayant des caractères donnés à l'avance dans le corps c	283
§ 82. — Démonstration transcendante de l'existence des genres et des autres résultats des paragraphes 71 à 77.....	285
§ 83. — Conception plus étroite de l'équivalence et de la classe.....	285
§ 84. — Le théorème fondamental avec cette nouvelle conception.....	286

CHAPITRE XIX. — *Nombre des classes d'un corps quadratique.*

§ 85. — Symbole $\left(\frac{a}{w}\right)$ pour un nombre composé.....	287
§ 86. — Expression finie du nombre de classes.....	287
§ 87. — Corps biquadratique de Dirichlet.....	290

CHAPITRE XX. — *Anneaux et modules d'un corps quadratique.*

§ 88. — Anneaux d'un corps quadratique.....	291
§ 89. — Théorème sur les classes de modules d'un corps quadratique. Formes quadratiques binaires.....	291
§ 90. — Théories élémentaire et supérieure des corps quadratiques.....	292

QUATRIÈME PARTIE. — *Les corps circulaires.*CHAPITRE XXI. — *Les racines de l'unité d'indice premier l et le corps circulaire qu'elles définissent.*

§ 91. — Degré du corps circulaire des $l^{\text{ièmes}}$ racines de l'unité et décomposition du nombre premier l dans ce corps.....	295
§ 92. — Base et discriminant du corps circulaire.....	297
§ 93. — Décomposition des nombres premiers.....	298

CHAPITRE XXII. — *Racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, m étant composé et corps circulaire correspondant.*

§ 94. — Le corps des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.....	299
§ 95. — Degré du corps circulaire des $l^{\text{h}}^{\text{ièmes}}$ racines de l'unité et décomposition du nombre premier l dans ce corps.....	300
§ 96. — Base et discriminant du corps circulaire des $l^{\text{h}}^{\text{ièmes}}$ racines de l'unité.....	301
§ 97. — Le corps circulaire général. Degré, discriminant, idéaux premiers.....	301
§ 98. — Unités du corps $c\left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)$. Définition des « unités circulaires ».....	303

CHAPITRE XXIII. — *Propriétés du corps circulaire comme corps abélien.*

§ 99. — Le groupe du corps circulaire des racines $l^{\text{ièmes}}$ de l'unité.....	306
§ 100. — Généralisation. Théorème fondamental sur les corps abéliens.....	307
§ 101. — Lemme général sur les corps cycliques.....	308
§ 102. — Sur certains facteurs premiers du discriminant d'un corps cyclique de degré l^h	309
§ 103. — Le corps cyclique de degré u , dont le discriminant ne contient que u et les corps cycliques de degré u^h et 2^h qui contiennent U_1 et Π_1 comme sous-corps....	312
§ 104. — Démonstration du théorème fondamental sur les corps abéliens.....	314

CHAPITRE XXIV. — *Les résolvantes d'un corps circulaire des racines $l^{\text{ièmes}}$ de l'unité.*

§ 105. — Définition et existence de la base normale.....	316
§ 106. — Les corps abéliens de degré premier l et de discriminant p^{l-1}	317
§ 107. — Propriétés caractéristiques des résolvantes.....	318
§ 108. — Décomposition de la $l^{\text{ième}}$ puissance d'une résolvante dans le corps des racines $l^{\text{ièmes}}$ de l'unité.....	321
§ 109. — Une équivalence relative aux idéaux du premier degré du corps des racines $l^{\text{ièmes}}$ de l'unité.....	322
§ 110. — Détermination de toutes les bases normales et de toutes les résolvantes.....	323
§ 111. — La base normale et la résolvante de Lagrange.....	324
§ 112. — Propriétés caractéristiques de la résolvante de Lagrange.....	324

CHAPITRE XXV. — *Loi de réciprocité pour les résidus de $l^{\text{ième}}$ s puissances entre un nombre rationnel et un nombre du corps des racines $l^{\text{ièmes}}$ de l'unité.*

§ 113. — Caractère de puissance d'un nombre et symbole $\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right\}$	327
§ 114. — Lemme sur le caractère de puissance de la $l^{\text{ième}}$ puissance de la résolvante de Lagrange.....	329
§ 115. — Démonstration de la loi de réciprocité entre un nombre rationnel et un nombre quelconque de $c(\zeta)$	330

CHAPITRE XXVI. — *Détermination du nombre de classes d'idéaux.*

§ 116. — Le symbole $\left[\frac{a}{\mathfrak{I}}\right]$	334
§ 117. — Expression du nombre des classes dans le corps circulaire des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.....	335
§ 118. — Démonstration des formules du nombre des classes de $c\left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)$	338

§ 119. — Existence d'une infinité de nombres premiers qui ont pour un nombre donné un reste donné premier à ce dernier.....	340
§ 120. — Représentation de toutes les unités du corps circulaire au moyen d'unités circulaires.....	342

CHAPITRE XXVII. — *Applications aux corps quadratiques.*

§ 121. — Expression des unités d'un corps quadratique réel au moyen d'unités circulaires.	342
§ 122. — Loi de réciprocité des résidus quadratiques.....	343
§ 123. — Les corps quadratiques imaginaires de discriminant premier.....	345
§ 124. — Détermination du signe de la somme de Gauss.....	346

CINQUIÈME PARTIE. — Les corps kummeriens.

CHAPITRE XXVIII. — *Décomposition des nombres d'un corps circulaire dans un corps kummerien.*

§ 125. — Définition d'un corps kummerien.....	349
§ 126. — Discriminant relatif d'un corps kummerien.....	350
§ 127. — Le symbole $\left\{ \frac{\mu}{\mathfrak{w}} \right\}$	353
§ 128. — Idéaux premiers d'un corps kummerien.....	354

CHAPITRE XXIX. — *Résidus et non-résidus de normes d'un corps kummerien.*

§ 129. — Définition des résidus de normes et des non-résidus.....	357
§ 130. — Théorème sur le nombre des résidus de normes. Idéaux de ramification.....	357
§ 131. — Le symbole $\left\{ \frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right\}$	365
§ 132. — Lemmes sur le symbole $\left\{ \frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right\}$ et les résidus de normes mod 1.....	368
§ 133. — Distinction des résidus et non-résidus avec le symbole $\left\{ \frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right\}$	373

CHAPITRE XXX. — *Existence d'une infinité d'idéaux premiers ayant des caractères de puissances donnés dans un corps kummerien.*

§ 134. — Valeur limite d'un produit infini.....	377
§ 135. — Idéaux premiers de $c(\zeta)$ ayant des caractères de puissance donnés.....	378

CHAPITRE XXXI. — *Corps circulaires réguliers.*

§ 136. — Définition des corps circulaires réguliers, des nombres premiers réguliers et des corps kummeriens réguliers.....	381
§ 137. — Lemme sur la divisibilité par l du premier facteur du nombre de classes de $c\left(e^{\frac{2i\pi}{l}}\right)$	381
§ 138. — Lemme sur les unités du corps circulaire $c\left(e^{\frac{2i\pi}{l}}\right)$ dans le cas où l ne divise le numérateur d'aucun des $\frac{l-3}{2}$ premiers nombres de Bernoulli.....	384

§ 139. — Critérium pour les nombres premiers réguliers.....	387
§ 140. — Système particulier d'unités indépendantes d'un corps circulaire régulier.....	389
§ 141. — Propriété caractéristique des unités d'un corps circulaire régulier.....	390
§ 142. — Nombres primaires d'un corps circulaire régulier.....	391

CHAPITRE XXXII. — *Classes d'idéaux invariantes et genres d'un corps kummerien régulier.*

§ 143. — Familles d'unités d'un corps circulaire régulier.....	393
§ 144. — Idéaux invariants, classes d'idéaux invariantes d'un corps kummerien régulier.....	394
§ 145. — Familles de classes dans un corps kummerien régulier.....	395
§ 146. — Deux lemmes généraux sur les unités fondamentales relatives d'un corps cyclique relatif de degré premier impair.....	396
§ 147. — Les classes d'idéaux déterminées par les idéaux invariants.....	398
§ 148. — La totalité des classes d'idéaux invariantes.....	405
§ 149. — Caractères d'un nombre et d'un idéal dans un corps kummerien régulier.....	407
§ 150. — Caractères d'une classe et notion de genre.....	409
§ 151. — Limites supérieures du degré de la famille issue de toutes les classes invariantes.....	410
§ 152. — Complexes d'un corps kummerien régulier.....	411
§ 153. — Limites supérieures du nombre des genres d'un corps kummerien régulier.....	412

CHAPITRE XXXIII. — *Loi de réciprocité des résidus de $l^{\text{ièmes}}$ puissances dans un corps circulaire régulier.*

§ 154. — La loi de réciprocité des résidus de $l^{\text{ièmes}}$ puissances et les lois complémentaires.....	413
§ 155. — Idéaux premiers de première et de seconde espèce dans un corps circulaire régulier.....	414
§ 156. — Lemmes sur les idéaux premiers de première espèce.....	417
§ 157. — Cas particulier de la loi de réciprocité pour deux idéaux premiers.....	420
§ 158. — Existence d'idéaux premiers auxiliaires pour lesquels la loi de réciprocité se vérifie.....	422
§ 159. — Démonstration de la première loi complémentaire.....	424
§ 160. — Démonstration de la loi de réciprocité entre deux idéaux premiers quelconques.....	424
§ 161. — Démonstration de la deuxième loi complémentaire.....	427

CHAPITRE XXXIV. — *Nombre des genres d'un corps kummerien régulier.*

§ 162. — Théorème sur le symbole $\left\{ \frac{v, \mu}{w} \right\}$	428
§ 163. — Théorème fondamental sur les genres d'un corps kummerien régulier.....	429
§ 164. — Les classes du genre principal dans un corps kummerien régulier.....	431
§ 165. — Sur les normes relatives des nombres d'un corps kummerien régulier.....	432

CHAPITRE XXXV. — *Nouvelle méthode pour la théorie d'un corps kummerien régulier*

§ 166. — Propriétés essentielles des unités d'un corps circulaire régulier.....	435
§ 167. — Démonstration d'une propriété des nombres primaires d'idéaux premiers de seconde espèce.....	437
§ 168. — Démonstration de la loi de réciprocité pour les cas où l'un des deux idéaux premiers est de seconde espèce.....	439

§ 169. — Lemme sur le produit $\Pi' \left\{ \frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right\}$ étendu à tous les idéaux premiers $\mathfrak{w}$ autres que $\mathfrak{f}$.	443
§ 170. — Le symbole $\{\nu, \mu\}$ et la loi de réciprocité entre deux idéaux premiers quelconques.	445
§ 171. — Coïncidence des symboles $\{\nu, \mu\}$ et $\left\{ \frac{\nu, \mu}{\mathfrak{f}} \right\}$.	447

CHAPITRE XXXVI. — *L'équation diophantine $\alpha^m + \beta^m + \gamma^m = 0$.*

§ 172. — Impossibilité de l'équation $\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$ pour les exposants premiers réguliers l .	448
§ 173. — Autres recherches sur l'impossibilité de $\alpha^m + \beta^m + \gamma^m = 0$.	454

NOTES DE M. G. HUMBERT

Tome III. — 1911
(présent volume).

NOTE I. — Démonstration du lemme 2 (théorème d'Hurwitz).	1
NOTE II. — Démonstration du théorème fondamental 8 par la méthode d'Hurwitz mentionnée au paragraphe 6.	3
NOTE III. — Démonstration des inégalités fondamentales de Minkowski pour n formes linéaires à n variables.	8
NOTE IV. — Questions diverses concernant les bases des idéaux d'un corps quadratique.	13

NOTES DE M. TH. GOT

NOTE V. — Détail de la démonstration de la seconde expression du nombre de classes d'idéaux du corps circulaire des racines $l^{\text{ièmes}}$ de l'unité, l étant premier.	17
NOTE VI. — Recherches sur le théorème de Fermat faites par Kummer et divers auteurs, postérieurement à la démonstration de l'impossibilité en nombres entiers de l'équation $x^l + y^l + z^l = 0$, donnée par Kummer pour les exposants l premiers réguliers.	21
<i>Errata et rectifications.</i>	62 a
<i>Index alphabétique des définitions.</i>	62 c
<i>Table des matières.</i>	62 e