



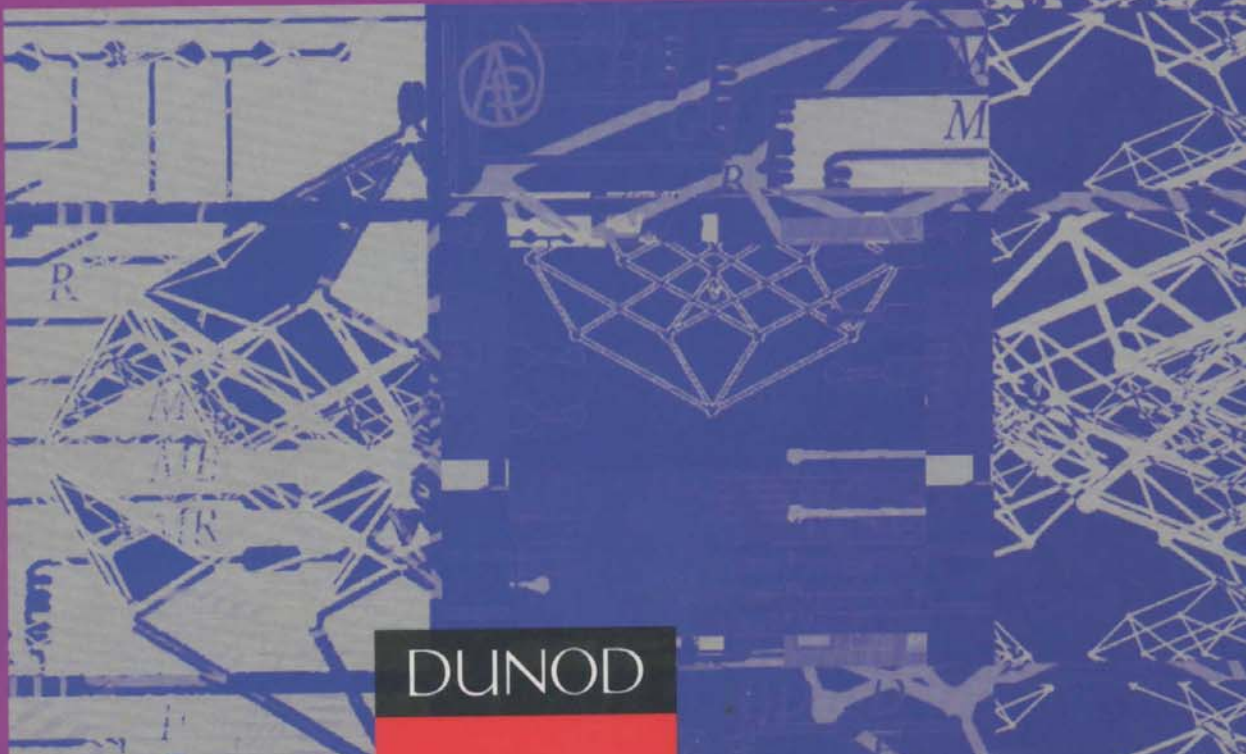
Hassan Boualem
Robert Brouzet

La Planète $\mathbb{R}$

Voyage au pays
des nombres réels

avec exercices corrigés

UniverSciences



DUNOD

Table des matières

AVANT-PROPOS

VII

PARTIE 1 • ASPECT ARITHMÉTIQUE

1 • LA DÉCOUVERTE DE PYTHAGORE

3

1.1 Le théorème de Pythagore

3

1.2 L'irrationalité de $\sqrt{2}$

4

1.3 Autres exemples simples de nombres irrationnels

6

2 • EULER ET L'IRRATIONALITÉ DE e

7

2.1 Le théorème d'Euler

8

2.2 Généralisation de la méthode d'Euler

9

3 • LE THÉORÈME DE LAMBERT

12

3.1 L'irrationalité des puissances de e

12

3.2 L'irrationalité de π^2

14

4 • LE THÉORÈME D'HERMITE

16

4.1 Lemmes préparatoires d'Hermite

16

4.2 La transcendance de e

18

5 • LE THÉORÈME DE LINDEMANN

21

6 • EULER ET LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

26

6.1 La fonction ζ de Riemann

26

6.2 Irrationalité et transcendance de $\zeta(2k)$

27

7 • THÉORÈME ET NOMBRES DE LIOUVILLE

31

7.1 Un résultat sur l'approximation rationnelle des irrationnels

31

7.2 Un théorème de Liouville sur les nombres algébriques

33

7.3 Les nombres de Liouville

35

8 • TROIS PROBLÈMES CÉLÈBRES ; LES NOMBRES CONSTRUCTIBLES

37

8.1 Quelques constructions élémentaires à la règle et au compas

39

8.2	La solution en langage moderne	42
8.2.1	L'outil algébrique	42
8.2.2	La solution de trois problèmes millénaires	43
9	• TRANSCENDANCE DE e^a OÙ a EST ALGÈBRE NON NUL	47
9.1	L'opérateur de dérivation sur l'espace des polynômes	48
9.2	Les fonctions quasi polynomiales	50
9.3	La preuve du théorème	51
9.4	La preuve de la formule intégrale	52
 PARTIE 2 • CONSTRUCTIONS, ARCHITECTURE ET REPRÉSENTATIONS		
10	• LES RÉELS TELS QU'ON LES RÊVE...	57
10.1	Le corps $\mathbb{Q}$	58
10.2	Les carences du corps $\mathbb{Q}$	60
10.3	Diverses caractérisations de la complétude	62
11	• LES RÉELS EXISTENT : LES COUPURES DE DEDEKIND	66
11.1	Définition d'une coupure	66
11.2	Le théorème de Dedekind	68
12	• LES RÉELS EXISTENT : LES SUITES DE CAUCHY	73
13	• UNICITÉ DE $\mathbb{R}$	79
13.1	Unicité du corps des réels	79
13.2	À propos de la structure de groupe	81
14	• TOPOLOGIE DE L'ENSEMBLE DES RÉELS	87
14.1	Topologie de $\mathbb{R}$	87
14.2	Les suites réelles	88
14.3	Le critère de Cauchy	89
14.4	La monotonie	90
14.5	Les valeurs d'adhérence d'une suite réelle	92
14.6	Les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$	94
14.7	La continuité	95
15	• LE CARDINAL DE L'ENSEMBLE DES RÉELS	97
15.1	Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$	97
15.2	Le théorème de Cantor sur la non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$	100
16	• REPRÉSENTATION DES RÉELS : ÉCRITURE DANS UNE BASE	103
16.1	Le développement d'un réel dans une base	103
16.2	Cas particulier d'un rationnel	105
16.3	Nombres-univers, nombres équirépartis, nombres normaux	107

17 • LES FRACTIONS CONTINUES	111
17.1 Le développement d'un rationnel en fractions continues	111
17.2 Le développement d'un irrationnel en fractions continues	113
17.3 Quelques développements en fractions continues	116
17.4 Une application à la topologie	118
 PARTIE 3 • QUELQUES SOUS-ENSEMBLES REMARQUABLES DE $\mathbb{R}$	
18 • LES PARTIES CONNEXES ET LA PROPRIÉTÉ DE LA VALEUR INTERMÉDIAIRE	123
18.1 Les connexes de $\mathbb{R}$	123
18.2 La propriété de la valeur intermédiaire	127
18.2.1 Deux résultats faciles de points fixes	130
18.2.2 Une version faible du théorème des fonctions implicites	130
18.2.3 Une version faible du dernier théorème géométrique de Poincaré	131
18.2.4 Le problème du marcheur (ou du cycliste)	135
19 • LE THÉORÈME DE CANTOR SUR L'ORDRE DES RATIONNELS	137
19.1 Le nombre de relations d'ordre total sur $\mathbb{Q}$	139
19.2 L'ordre naturel de $\mathbb{Q}$	140
19.3 L'ordre naturel de $\mathbb{R}$	142
20 • LES PARFAITS DE $\mathbb{R}$ ET LE THÉORÈME DE CANTOR-BENDIXON	144
20.1 Les parfaits de $\mathbb{R}$	144
20.2 Le cardinal d'un parfait de $\mathbb{R}$	146
20.3 Topologie d'un certain type de parfaits de $\mathbb{R}$	148
21 • LES SOUS-GROUPES ADDITIFS DE $\mathbb{R}$	151
21.1 Quelques exemples simples	152
21.2 La structure des sous-groupes de $\mathbb{R}$	152
21.3 Exemples	153
21.4 Applications	154
21.4.1 Une suite dense	154
21.4.2 Le groupe des périodes d'une fonction	154
21.5 Sous-groupes et mesure	155
22 • DE JORDAN À LEBESGUE : LONGUEUR D'UNE PARTIE DE $\mathbb{R}$	158
22.1 De Cantor à Jordan	158
22.2 Les parties mesurables de $\mathbb{R}$	159
22.3 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$	161
22.3.1 L'invariance par translation	165
22.3.2 Une partie non mesurable ou ensemble de Vitali	166
22.3.3 Une caractérisation de la mesure de Lebesgue	166
22.3.4 Topologie et mesure de Lebesgue	167
22.3.5 L'exemple d'un ensemble bien distribué	169

23 • L'ENSEMBLE DE CANTOR	171
23.1 La construction de l'ensemble de Cantor	172
23.2 Propriétés de l'ensemble de Cantor	172
23.3 Les intervalles $J_{n,p}$ et le développement triadique	173
23.4 L'escalier du diable ou la fonction de Cantor	176
23.5 Les ensembles de Cantor généralisés ou gras	179
24 • ESPACES COMPACTS ET ENSEMBLE DE CANTOR	182
24.1 Universalité de l'ensemble de Cantor	182
24.2 Les composantes connexes d'un espace métrique compact	185
25 • UNE CARACTÉRISATION DES SEGMENTS	189
25.1 De la topologie vers la relation d'ordre	191
25.2 De la relation d'ordre vers la topologie	191
26 • PARTIES DE $\mathbb{R}$ DE PREMIÈRE ET DE SECONDE CATÉGORIE DE BAIRE	194
26.1 Les sous-ensembles F_σ et G_δ de $\mathbb{R}$	194
26.2 Ensemble maigre et ensemble gras	197
26.2.1 Exemple d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un F_σ	200
26.2.2 Une caractérisation des polynômes	200
26.2.3 Une caractérisation locale des fonctions analytiques	202
PARTIE 4 • QUELQUES BASES UTILES	
27 • RUDIMENTS DE THÉORIE DES ENSEMBLES	207
28 • RUDIMENTS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE	208
28.1 Les espaces topologiques	208
28.2 Les espaces métriques	209
28.3 Les suites	211
28.4 Les espaces compacts	212
28.5 La continuité	214
28.6 Deux espaces fonctionnels utiles	214
29 • VOCABULAIRE DE L'ALGÈBRE GÉNÉRALE	216
CORRECTION DES EXERCICES	219
INDEX	245