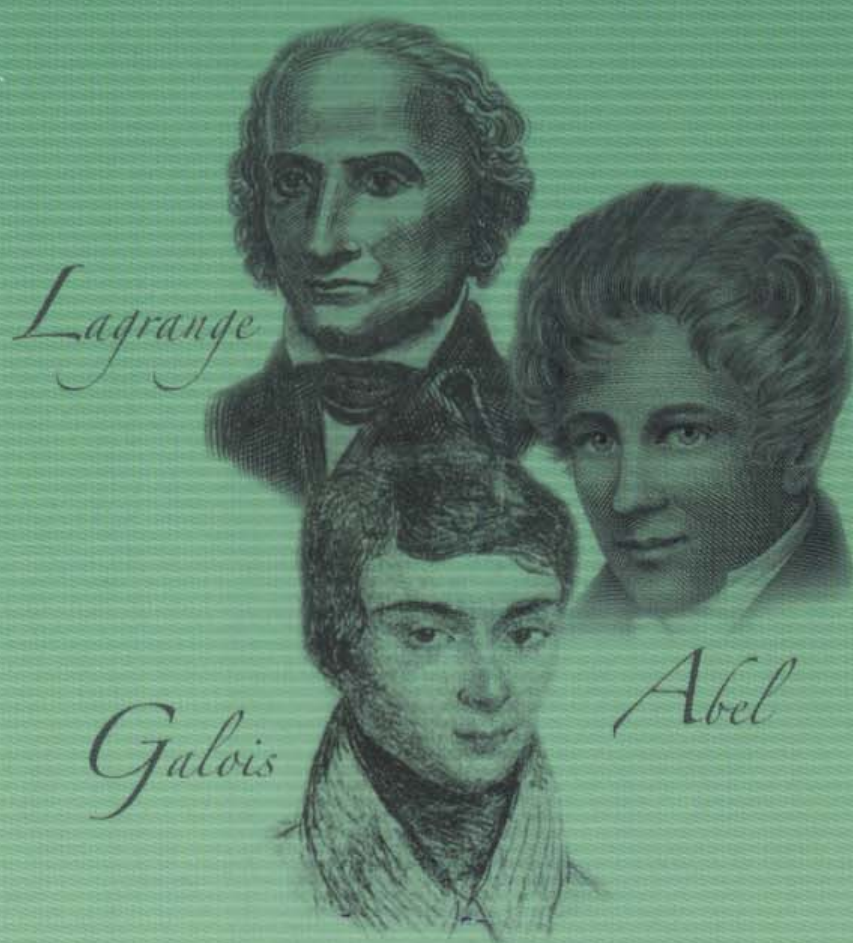


Antoine Chambert-Loir

Algèbre corporelle



LES ÉDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Table des matières

Présentation	vii
1. Extensions de corps	1
Constructions à la règle et au compas, 1 ; Corps, 3 ; Extensions de corps, 9 ;	
Quelques impossibilités classiques, 14 ; Fonctions symétriques des racines, 18 ;	
Appendice : transcendance de e et π , 21 ; Exercices, 25.	
2. « Mais où sont mes racines ? »	31
Anneau des restes, 31 ; Extensions de décomposition, 34 ;	
Corps algébriquement clos ; clôture algébrique, 35 ; Appendice : structure des	
anneaux de polynômes, 39 ; Appendice : anneaux quotients, 42 ;	
Appendice : théorème de Puiseux, 45 ; Exercices, 49.	
3. Théorie de Galois	53
Homomorphismes d'une extension dans une clôture algébrique, 53 ;	
Groupe d'automorphismes d'une extension, 56 ; Le groupe de Galois comme	
groupe de permutations des racines, 62 ; Discriminant, résolvantes, 65 ;	
Corps finis, 70 ; Exercices, 72.	
4. Un peu de théorie des groupes	79
Groupes (rappels de définitions), 79 ; Sous-groupes, 80 ; Opération d'un groupe	
sur un ensemble, 82 ; Sous-groupes distingués, groupes quotients, 83 ;	
Groupes résolubles, nilpotents, 86 ; Groupe symétrique, alterné, 88 ;	
Groupes de matrices, 92 ; Exercices, 96.	
5. Applications	101
Constructibilité à la règle et au compas, 101 ; Cyclotomie, 103 ;	
Extensions composées, 107 ; Extensions cycliques, 110 ; Les équations de degrés	
inférieur à 4, 112 ; Résolubilité par radicaux, 118 ; Comment (ne pas) calculer	
des groupes de Galois, 121 ; Spécialisation des groupes de Galois, 124 ;	

L'équation générique et le théorème d'irréductibilité de Hilbert, 131 ;

Exercices, 137.

6. Équations différentielles143

Corps différentiels, 143 ; Extensions différentielles. Construction de

dérivations, 146 ; Équations différentielles, 149 ; Extensions de Picard-

Vessiot, 152 ; Le groupe de Galois différentiel. Exemples, 155 ;

La correspondance de Galois différentielle, 160 ; Extensions élémentaires, 161 ;

Appendice : théorème des zéros de Hilbert, 167 ; Exercices, 169.

Problèmes d'examen171

Bibliographie181

Index183

Mathématiques



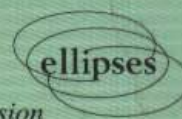
Antoine
Chambert-Loir

Antoine Chambert-Loir est actuellement professeur à l'Université de Rennes I.

Ce petit livre d'algèbre est issu d'un cours enseigné aux élèves de seconde année de l'École Polytechnique. Il met l'accent sur la structure de corps et s'intéresse aux équations, polynomiales ou différentielles, ainsi qu'à la nature algébrique de leurs solutions. Outre les résultats désormais classiques de la théorie de Galois des extensions algébriques, ce livre contient la démonstration de la transcendance de π et e , du théorème d'irréductibilité de Hilbert, ainsi qu'une introduction aux groupes de Galois différentiels.

Il contient aussi des théorèmes d'analyse, comme le fait que le corps des nombres complexes est algébriquement clos, la transcendance de e et π mentionnée plus haut, ou le théorème de Puiseux qui montre comment l'on peut paramétrer les racines d'une équation polynomiale dont les coefficients varient. Il comporte également quelques indications historiques, ainsi que des reproductions de timbres mathématiques et des images de mathématiciens ; l'auteur espère que cela rendra son livre plus vivant.

*Illustration de couverture :
Abel (1802-1829) a démontré qu'il n'existe pas de formule
donnant les solutions des équations polynomiales générales.
C'est l'un des grands résultats de l'algèbre moderne
née avec Lagrange (1736-1813),
puis magnifiée par la théorie de Galois (1811-1832).*



9 782730 212175

ISBN 2-7302-1217-5