

MATHÉMATIQUES

4. ALGÈBRE

ELIE AZOULAY & JEAN AVIGNANT

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR TECHNIQUE



COURS ET
EXERCICES

McGRAW-HILL

TABLE DES MATIÈRES

1. Notion d'ensemble. Opérations sur les ensembles	1
1. Ensemble	1
2. Appartenance	1
3. Détermination d'un ensemble	2
4. Egalité de deux ensembles	2
5. Inclusion	3
6. Visualisation des ensembles. Diagrammes	4
7. Opérations sur les ensembles	6
8. Propriétés des opérations sur les ensembles	6
9. Lois de Morgan	7
10. Différence de deux ensembles	7
11. Notion de recouvrement et de partition	8
12. Ensembles usuels en mathématiques	8
13. Produit d'ensembles	9
14. Relation. Graphe d'une relation	9
Résumé du chapitre 1	11
Exercices	
2. Applications. Relations d'ordre et d'équivalence.	19
Analyse combinatoire	19
1. Lois de composition d'un ensemble	19
2. Notion d'application	23
3. Notion de relation binaire	24
4. Relation d'équivalence	25
5. Relation d'ordre	26
6. Dénombrement des différentes applications d'un ensemble E dans un ensemble F	28
7. Applications : binôme de Newton	32
Résumé du chapitre 2	34
Exercices	
3. Structures algébriques	41
1. Groupe	41
2. Anneau	43
3. Corps	43
Résumé du chapitre 3	44
Exercices	

4. Nombres complexes	51
1. Définition	51
2. Opérations sur les nombres complexes	52
3. Quotient de deux nombres complexes	55
4. Nombres réels. Nombres imaginaires purs. Notation algébrique et trigonométrique des nombres complexes	55
5. Formule de Moivre	57
6. Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe	58
7. Résolution de l'équation du second degré	59
8. Transformations géométriques simples	59
9. e^z pour z complexe. Formules d'Euler	63
<i>Résumé du chapitre 4</i>	64
<i>Exercices</i>	64
5. Polynômes. Fractions rationnelles	77
1. Définition	77
2. Addition des polynômes	78
3. Multiplication des polynômes	78
4. Multiplication par un scalaire	79
5. Polynôme dérivé	79
6. Formules de Mac Laurin et de Taylor	80
7. Division des polynômes suivant les puissances décroissantes ou division euclidienne	82
8. Recherche du quotient et du reste	83
9. Division suivant les puissances croissantes	84
10. PGCD de polynômes	86
11. Division par $x - a$	89
12. Polynômes et équations sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes	90
13. Théorème de D'Alembert	90
14. Factorisation d'un polynôme	91
15. Relations entre coefficients et racines	92
16. Fractions rationnelles	92
<i>Résumé du chapitre 5</i>	96
<i>Exercices</i>	99
6. Espaces vectoriels. Applications linéaires. Matrices	113
A. Espaces vectoriels	113
1. Introduction	113
2. Définition d'un espace vectoriel	113
3. Exemples	114
4. Propriétés immédiates des opérations dans un espace vectoriel	115
5. Familles de vecteurs d'un espace vectoriel. Dépendance, indépendance	115
6. Sous-espaces vectoriels	116
7. Intersection de deux sous-espaces	116
8. Sommes de sous-espaces. Somme directe. Sous-espaces supplémentaires	117

9. Générateurs d'un espace vectoriel. Base. Coordonnées	118
10. Dimension finie	119
11. Sous-espaces vectoriels en dimension finie. Rang d'un système de vecteurs	121
12. Espaces de dimension finie	123
B. Applications linéaires. Matrices	123
1. Définition	123
2. Noyau. Image	124
3. Application linéaire injective	125
4. Image d'une famille génératrice. Cas où E est de dimension finie	125
5. Cas où E et F sont de dimensions finies. Matrices associées à une application linéaire.	127
6. Matrice nulle. Egalité. Transposition	130
7. Opérations linéaires sur les applications linéaires et les matrices	131
8. Composition des applications linéaires. Multiplication des matrices	132
C. Endomorphismes. Algèbre des matrices carrées d'ordre n	135
1. Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Matrices carrées d'ordre n	135
2. Anneau des matrices carrées d'ordre n	136
3. Endomorphisme bijectif. Inverse d'une matrice carrée	137
4. Inversion progressive d'une matrice par prémultiplications successives	140
5. Changement de base. Matrices semblables	143
6. Projecteurs	145
D. Notions sur la dualité	147
1. Forme linéaire	147
2. Espace dual d'un espace vectoriel. Base duale d'une base de E	147
Résumé du chapitre 6	148
Exercices	152
7. Déterminants. Systèmes d'équations linéaires	173
A. Permutations d'un ensemble fini	173
1. Rappel	173
2. Transpositions	173
3. Inversions d'une permutation. Parité. Signature	174
B. Déterminants	175
1. Forme multilinéaire alternée	175
2. Expression d'une forme multilinéaire alternée dans une base de E	176
3. Définition d'un déterminant	177
4. Exemples. Déterminants d'ordres 2 et 3. Règle de Sarrus	178
5. Propriétés des déterminants	179
6. Développement d'un déterminant suivant une rangée	182
7. Calcul pratique d'un déterminant	183
8. Déterminant de Van der Monde	185

C. Inversion d'une matrice. Systèmes d'équations linéaires	187
1. Inversion d'une matrice	187
2. Systèmes d'équations linéaires. Généralités	188
3. Système de Cramer	188
4. Rang d'un système linéaire	190
5. Cas général du système de n équations à p inconnues. Théorème de Fontené-Rouché	192
6. Système homogène	194
D. Notions sur l'élimination	194
1. Résultant de deux polynômes à une variable	194
2. Discriminant d'un polynôme à une variable	196
Résumé du chapitre 7	197
Exercices	200
3. Valeurs propres. Réduction d'un endomorphisme	215
1. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres	215
2. Recherche des valeurs propres en dimension finie. Polynôme caractéristique	216
3. Réduction d'un endomorphisme possédant n valeurs propres distinctes	218
4. Etude générale de la diagonalisation	219
5. Trigonalisation	222
6. Matrices de Jordan. Réduction de Jordan	225
7. Applications de la réduction au calcul des puissances d'une matrice et aux suites récurrentes	227
8. Application de la réduction aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants du premier ordre	228
9. Polynômes d'endomorphismes. Théorème de Cayley-Hamilton	231
Résumé du chapitre 8	234
Exercices	236
Formes quadratiques. Espaces euclidiens. Isométries	259
A. Formes bilinéaires. Formes quadratiques	259
1. Forme bilinéaire. Définition et représentation matricielle	259
2. Forme bilinéaire symétrique, forme quadratique associée	260
3. Orthogonalité par rapport à une forme quadratique	262
4. Base orthogonale. Diagonalisation. Décomposition en carrés	262
B. Espace euclidien	266
1. Définition d'un espace euclidien. Produit scalaire	266
2. Norme associée à un produit scalaire. Espace normé	266
3. Base orthonormée d'un espace euclidien. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt	267
4. Changement de base orthonormée. Matrice orthogonale, endomorphisme orthogonal	269
5. Notions sur les isométries d'un espace vectoriel réel de dimension finie	270

TABLE DES MATIÈRES

XI

6. Isométries de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	273
7. Réduction d'une matrice symétrique réelle. Application aux formes quadratiques	274
8. Réduction des coniques et quadriques à centres	275
9. Produit mixte et produit vectoriel dans un espace euclidien de dimension n	276
<i>Résumé du chapitre 9</i>	276
<i>Exercices</i>	279

NOTION D'ENSEMBLE

OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

10. Formes hermitiennes. Matrices hermitiennes	289
1. Formes sesquilineaires. Formes hermitiennes	289
2. Matrice d'une forme hermitienne en dimension finie	290
3. Produit scalaire hermitien. Orthogonalité	291
4. Matrice unitaire, endomorphisme unitaire	292
5. Réduction d'une matrice hermitienne	292
<i>Exercices</i>	293

Des objets ou éléments présentant une ou plusieurs propriétés communes constituent une collection ou un ensemble.

Ces propriétés sont suffisantes pour affirmer qu'un objet appartient ou n'appartient pas à l'ensemble.