

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

N. PISKOUNOV

TOME I

TRADUIT
DU RUSSE

ELLIPSES

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos à la cinquième édition	11
---	----

CHAPITRE I

NOMBRE, VARIABLE, FONCTIONS

§ 1. Nombres réels. Représentation des nombres réels par les points de l'axe numérique	13
§ 2. Valeur absolue d'un nombre réel	15
§ 3. Grandeurs variables et grandeurs constantes	16
§ 4. Domaine de définition d'une variable	17
§ 5. Variable ordonnée. Variable croissante et variable décroissante. Variable bornée	19
§ 6. Fonction	20
§ 7. Diverses formes d'expression des fonctions	21
§ 8. Principales fonctions élémentaires. Fonctions élémentaires	23
§ 9. Fonctions algébriques	28
§ 10. Système de coordonnées polaires	30
<i>Exercices</i>	32

CHAPITRE II

LIMITE ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS

§ 1. Limite d'une grandeur variable. Grandeur variable infiniment grande	34
§ 2. Limite d'une fonction	37
§ 3. Fonctions qui tendent vers l'infini. Fonctions bornées	40
§ 4. Infinitement petits et leurs propriétés fondamentales	44
§ 5. Théorèmes fondamentaux sur les limites	47
§ 6. Limite de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ quand $x \rightarrow 0$	51
§ 7. Le nombre e	53
§ 8. Logarithmes népériens	58
§ 9. Continuité des fonctions	59
§ 10. Propriétés des fonctions continues	64
§ 11. Comparaison des infinitésimales	66
<i>Exercices</i>	69

CHAPITRE III

DÉRIVÉE ET DIFFÉRENTIELLE

§ 1. Vitesse d'un mouvement	72
§ 2. Définition de la dérivée	74
§ 3. Interprétation géométrique de la dérivée	76
§ 4. Fonctions dérivables	77
§ 5. Dérivée de la fonction $y = x^n$ pour n entier et positif	79
§ 6. Dérivées des fonctions $y = \sin x$; $y = \cos x$	81
§ 7. Dérivées d'une constante, du produit d'une constante par une fonction, d'une somme, d'un produit et du rapport de deux fonctions	83
§ 8. Dérivée d'une fonction logarithmique	88
§ 9. Dérivée d'une fonction composée	89
§ 10. Dérivées des fonctions $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{Log} x $	91
§ 11. Fonction implicite et sa dérivée	93
§ 12. Dérivée d'une fonction puissance quand l'exposant est un nombre réel quelconque, dérivée de la fonction exponentielle et de la fonction composée exponentielle	95
§ 13. Fonction inverse (ou réciproque) et sa dérivée	98
§ 14. Fonctions trigonométriques inverses et leurs dérivées	102
§ 15. Tableau des principales formules de dérivation	106
§ 16. Fonctions données sous forme paramétrique	108
§ 17. Equations paramétriques de certaines courbes	109
§ 18. Dérivée d'une fonction donnée sous forme paramétrique	112
§ 19. Fonctions hyperboliques	114
§ 20. Différentielle	117
§ 21. Interprétation géométrique de la différentielle	121
§ 22. Dérivées de différents ordres	122
§ 23. Différentielles de différents ordres	125
§ 24. Dérivées de différents ordres des fonctions implicites et des fonctions données sous forme paramétrique	126
§ 25. Interprétation mécanique de la dérivée seconde	129
§ 26. Equations de la tangente et de la normale. Longueurs de la sous-tangente et de la sous-normale	130
§ 27. Interprétation géométrique de la dérivée du rayon vecteur par rapport à l'angle polaire	133
<i>Exercices</i>	135

CHAPITRE IV

THÉORÈMES RELATIFS AUX FONCTIONS DÉRIVABLES

§ 1. Théorème relatif aux racines de la dérivée (théorème de Rolle)	147
§ 2. Théorème des accroissements finis (théorème de Lagrange) . . .	149
§ 3. Théorème de Cauchy (rapport des accroissements de deux fonctions)	150

§ 4. Limite du rapport de deux infiniment petits (vraie valeur des indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$)	151
§ 5. Limite du rapport de deux infiniment grands (vraie valeur des indéterminations de la forme $\frac{\infty}{\infty}$)	155
§ 6. Formule de Taylor	160
§ 7. Développement des fonctions e^x , $\sin x$, $\cos x$ par la formule de Taylor	164
Exercices	168

CHAPITRE V

ÉTUDE DE LA VARIATION DES FONCTIONS

§ 1. Position du problème	171
§ 2. Croissance et décroissance des fonctions	172
§ 3. Maximum et minimum des fonctions	174
§ 4. Marche à suivre pour l'étude du maximum et du minimum d'une fonction dérivable à l'aide de la dérivée première	181
§ 5. Etude du maximum et du minimum des fonctions à l'aide de la dérivée seconde	183
§ 6. Plus grande et plus petite valeur d'une fonction sur un segment	187
§ 7. Application de la théorie du maximum et du minimum des fonctions à la résolution de problèmes	188
§ 8. Etude des maximums et des minimums d'une fonction à l'aide de la formule de Taylor	190
§ 9. Convexité et concavité des courbes. Points d'inflexion	192
§ 10. Asymptotes	199
§ 11. Schéma général de l'étude des fonctions et de la construction des graphiques	203
§ 12. Etude des courbes données sous forme paramétrique	207
Exercices	212

CHAPITRE VI

COURBURE D'UNE COURBE

§ 1. Longueur de l'arc et sa dérivée	219
§ 2. Courbure	221
§ 3. Calcul de la courbure	223
§ 4. Calcul de la courbure des courbes sous forme paramétrique	226
§ 5. Calcul de la courbure des courbes en coordonnées polaires	227
§ 6. Rayon et cercle de courbure. Centre de courbure. Développée et développante	228
§ 7. Propriétés de la développée	234
§ 8. Calcul approché des racines réelles d'une équation	237
Exercices	242

CHAPITRE VII

NOMBRES COMPLEXES, POLYNÔMES

§ 1. Nombres complexes. Définitions	245
§ 2. Principales opérations sur les nombres complexes	247
§ 3. Elévation d'un nombre complexe à une puissance et extraction de la racine d'un nombre complexe	250
§ 4. Fonction exponentielle à exposant complexe et ses propriétés	253
§ 5. Formule d'Euler. Forme exponentielle d'un nombre complexe	256
§ 6. Décomposition d'un polynôme en facteurs	258
§ 7. Racines multiples du polynôme	261
§ 8. Décomposition en facteurs d'un polynôme dans le cas des racines complexes	263
§ 9. Interpolation. Formule d'interpolation de Lagrange	264
§ 10. Formule d'interpolation de Newton	266
§ 11. Dérivation numérique	268
§ 12. Meilleure approximation d'une fonction par des polynômes. Théorie de Tchébychev	269
<i>Exercices</i>	271

CHAPITRE VIII

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

§ 1. Définition des fonctions de plusieurs variables	273
§ 2. Représentation géométrique d'une fonction de deux variables	276
§ 3. Accroissement partiel et accroissement total de la fonction	277
§ 4. Continuité des fonctions de plusieurs variables	279
§ 5. Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables	282
§ 6. Interprétation géométrique des dérivées partielles d'une fonction de deux variables	284
§ 7. Accroissement total et différentielle totale	285
§ 8. Emploi de la différentielle totale pour les calculs approchés	288
§ 9. Emploi de la différentielle pour évaluer l'erreur commise pendant les calculs numériques	289
§ 10. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée totale. Différentielle totale d'une fonction composée	293
§ 11. Dérivation des fonctions implicites	297
§ 12. Dérivées partielles de différents ordres	300
§ 13. Surfaces de niveau	305
§ 14. Dérivée suivant une direction donnée	306
§ 15. Gradient	308
§ 16. Formule de Taylor pour une fonction de deux variables	312
§ 17. Maximum et minimum d'une fonction de plusieurs variables	314
§ 18. Maximums et minimums des fonctions de plusieurs variables soumises à certaines conditions (maximums et minimums liés)	323

§ 19. Dépendance fonctionnelle obtenue en traitant les données expérimentales par la méthode des moindres carrés	328
§ 20. Points singuliers d'une courbe	332
Exercices	338

CHAPITRE IX

APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL À LA
GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

§ 1. Equation d'une courbe dans l'espace	342
§ 2. Limite et dérivée d'une fonction vectorielle d'une variable scalaire indépendante. Equation de la tangente à une courbe. Equation du plan normal	345
§ 3. Règles de dérivation des vecteurs (fonctions vectorielles)	351
§ 4. Dérivées première et seconde d'un vecteur par rapport à la longueur de l'arc. Courbure de la courbe. Normale principale. Vitesse et accélération du point dans un mouvement curviligne	354
§ 5. Plan osculateur. Binormale. Torsion d'une courbe gauche . . .	363
§ 6. Plan tangent et normale à une surface	368
Exercices	372

CHAPITRE X

INTÉGRALE INDÉFINIE

§ 1. Primitive et intégrale indéfinie	375
§ 2. Table d'intégrales	378
§ 3. Quelques propriétés de l'intégrale indéfinie	380
§ 4. Intégration par changement de variable	382
§ 5. Intégration de certaines expressions contenant le trinôme $ax^2 + bx + c$	384
§ 6. Intégration par parties	387
§ 7. Fractions rationnelles. Fractions rationnelles élémentaires et leur intégration	390
§ 8. Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples	395
§ 9. Intégration des fractions rationnelles	399
§ 10. Intégration des fonctions irrationnelles	402
§ 11. Intégrales du type $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$	404
§ 12. Intégration de certaines classes de fonctions trigonométriques	407
§ 13. Intégration de certaines fonctions irrationnelles à l'aide de transformations trigonométriques	412
§ 14. Fonctions dont les intégrales ne peuvent être exprimées par des fonctions élémentaires	414
Exercices	416

CHAPITRE XI

INTÉGRALE DÉFINIE

§ 1. Position du problème. Sommes intégrales inférieure et supérieure	427
§ 2. Intégrale définie. Théorème d'existence de l'intégrale définie . .	429
§ 3. Propriétés fondamentales de l'intégrale définie	439
§ 4. Calcul de l'intégrale définie. Formule de Newton-Leibniz . . .	443
§ 5. Changement de variable dans une intégrale définie	447
§ 6. Intégration par parties	449
§ 7. Intégrales impropres	451
§ 8. Calcul approché des intégrales définies	458
§ 9. Formule de Tchébychev	464
§ 10. Intégrales dépendant d'un paramètre. Fonction gamma	469
§ 11. Intégration d'une fonction complexe de la variable réelle	473
Exercices	473

CHAPITRE XII

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES DE L'INTÉGRALE DÉFINIE

§ 1. Calcul des aires en coordonnées rectangulaires	478
§ 2. Aire d'un secteur curviligne en coordonnées polaires	481
§ 3. Longueur d'un arc de courbe	482
§ 4. Calcul du volume d'un corps en fonction des aires des sections parallèles	488
§ 5. Volume d'un corps de révolution	490
§ 6. Aire d'un corps de révolution	491
§ 7. Calcul du travail au moyen de l'intégrale définie	492
§ 8. Coordonnées du centre de gravité	494
§ 9. Calcul du moment d'inertie d'une courbe, d'un cercle et d'un cy- lindre à l'aide de l'intégrale définie	497
Exercices	500
Index	506