

Henri POINCARÉ

THÉORIE
DU
POTENTIEL NEWTONIEN



ÉDITIONS
JACQUES GABAY

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

POTENTIEL EN UN POINT EXTÉRIEUR AUX MASSES AGISSANTES
EQUATION DE LAPLACE. — EXEMPLES. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

Définition du potentiel en général.	1
Potentiel newtonien	2
Potentiel logarithmique	3
Equation de Laplace.	4
Limites supérieures des dérivées de $\frac{1}{r}$	5
Potentiel des corps continus	6
Propriétés à l'infini	10
Potentiel newtonien d'une surface sphérique homogène.	13
Potentiel d'une sphère pleine.	15
Potentiel logarithmique d'une circonférence	21
Attraction d'une droite homogène sur un point extérieur.	25
Potentiel newtonien d'un cylindre.	28
Cas du cylindre de révolution.	29
Potentiel newtonien d'une circonférence.	31
Formule de Green.	39
Polynômes de Legendre	43
Développement du potentiel newtonien en série de polynômes sphériques	46
Développement du potentiel newtonien suivant les puissances entières de x, y, z	51
Autre développement en série du potentiel newtonien.	54
Développements analogues pour le potentiel logarithmique	56

CHAPITRE II

POTENTIEL EN UN POINT INTÉRIEUR AUX MASSES AGISSANTES
FORMULE DE POISSON

Convergence des intégrales. — Application au potentiel	62
Intégrales absolument convergentes et intégrales semi-convergentes. — Exemples	69

Autre exemple. — Potentiel d'une surface attirante quelconque en un point de cette surface	75
Analogie avec les séries	78
Potentiel newtonien d'un volume attirant. — Existence des dérivées premières.	80
Etude des dérivées secondes	85
Formule de Poisson	88
Potentiel logarithmique d'une surface attirante	90

CHAPITRE III

SURFACES ATTIRANTES ET LIGNES ATTIRANTES

SURFACES ATTIRANTES

Notations et remarques préliminaires	93
Etude du potentiel	97
Préparation à l'étude des composantes de l'attraction	99
Composantes de l'attraction.	103
Etude de la composante normale	104
Continuité des composantes tangentielles	111
Remarque sur les dérivées du potentiel d'un volume attirant.	118
Cas singuliers.	119
Potentiel logarithmique d'une ligne attirante	120
Remarque sur un lemme fondamental dans la théorie des surfaces attirantes	120

LIGNES ATTIRANTES

Potentiel newtonien d'une ligne attirante	121
Cas d'une circonférence homogène	129

CHAPITRE IV

LA FONCTION DE GREEN ET LE PROBLÈME DE DIRICHLET

Théorème de la moyenne de Gauss	133
Fonctions harmoniques	135
Problème de Dirichlet. — Problème intérieur. — Problème extérieur.	139
Extension au cas de deux variables	141
Remarque sur le potentiel newtonien.	142
Conséquences de la formule de Green.	143
Analogies avec la théorie des résidus de Cauchy.	149
Définition de la fonction de Green.	153
Propriétés de la fonction de Green	154
Problème de Green. — Problème de Dirichlet transformé. — Comparaison avec le problème de Dirichlet ordinaire. — Equivalence de ces trois problèmes	160

CHAPITRE V

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LE CAS DU CERCLE
ET DE LA SPHÈRE. — THÉORÈME DE HARNACK.

Fonction de Green pour le cas du cercle	173
Représentation conforme.	177
Résolution du problème de Dirichlet pour le cas de la sphère	183
Méthode de Thomson	193
Équivalence des problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur	198
Cas du potentiel logarithmique.	199
Propriétés des fonctions harmoniques à l'infini.	200
Théorème analogue à celui de Laurent	204
Théorème de Harnack.	211

CHAPITRE VI

DOUBLES COUCHES

Définition d'une double couche	215
Étude du potentiel d'une double couche.	218
Étude des dérivées secondes d'un potentiel de simple couche. — Cas d'une surface plane	231
Cas d'une surface attirante quelconque	235
Étude des dérivées premières d'un potentiel de double couche. . . .	251
Comparaison des simples et des doubles couches.	257

CHAPITRE VII

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET
LA MÉTHODE DU BALAYAGE

Énoncé du problème de Dirichlet.	263
Comparaison des fonctions harmoniques et des potentiels.	264
Balayage d'un domaine.	267
Balayage d'une sphère.	273
Théorème de Harnack	275
Méthode du balayage	281

CHAPITRE VIII

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET
LA MÉTHODE DE NEUMANN

Principe de la méthode de Neumann.	289
Développement de la méthode de Neumann.	293

Signification de la constante C	309
Emploi des potentiels de simple couche dans la méthode de Neumann.	312
Propriétés des fonctions T_n	316
Résolution d'un problème analogue à celui de Dirichlet.	320

CHAPITRE IX

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE NEUMANN AU CAS DES DOMAINES SIMPLEMENT CONSEXES. — LES FONCTIONS FONDAMENTALES

Énoncé.	327
Hypothèses.	327
Rappel de certaines notations.	328
Les intégrales J_n	330
Le rapport $\frac{J}{J'}$	337
Convergence des séries de Neumann	340
Conclusion	348
Définition des fonctions fondamentales.	348
Application à la méthode de Neumann.	356
Application à un problème analogue à celui de Dirichlet	359