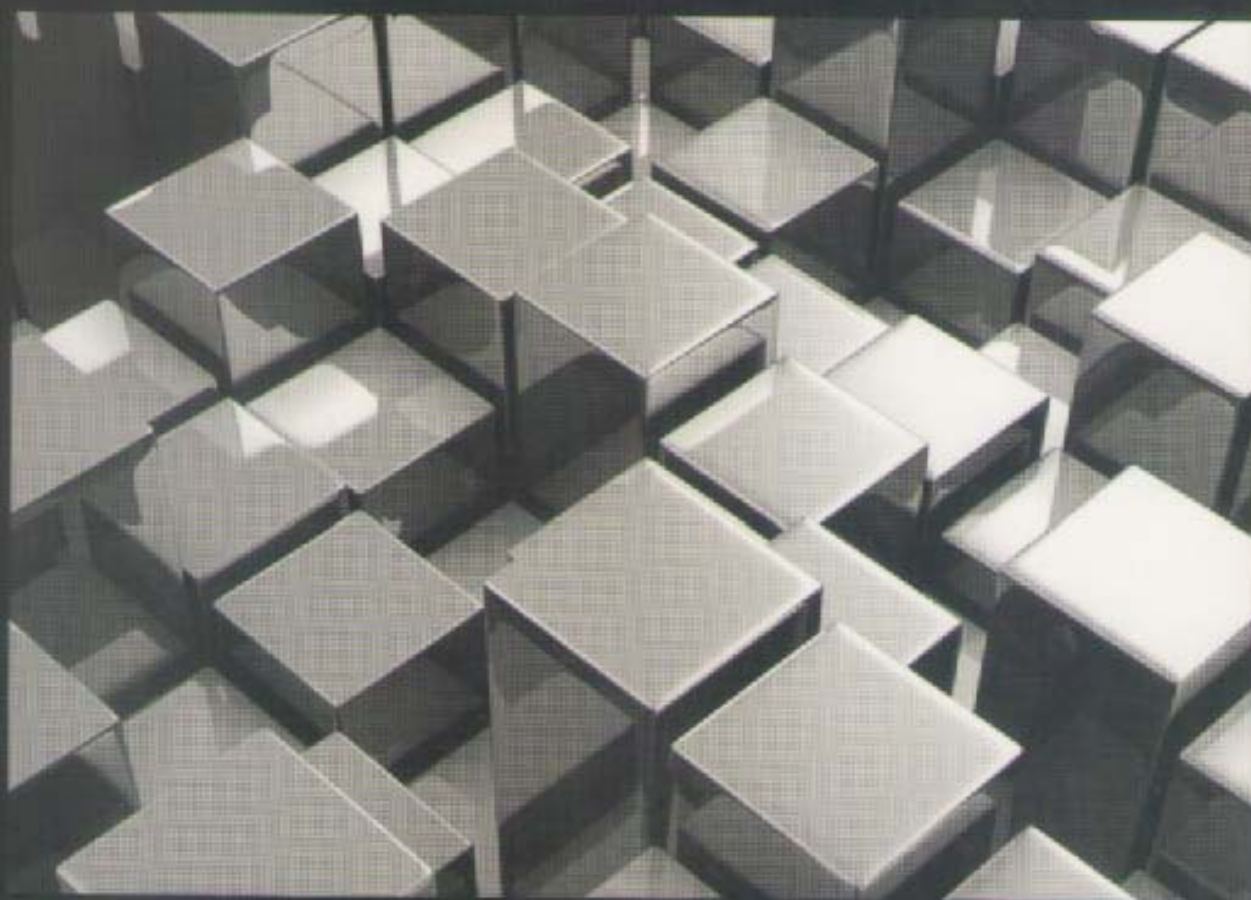


Enseignement des mathématiques

Théorie des probabilités

Cours d'introduction
avec application à la
statistique mathématique

Charles-Edouard Pfister



Presses polytechniques et universitaires romandes

Enseignement des mathématiques



2-519-254-1

Théorie des probabilités

Cours d'introduction
avec application à la
statistique mathématique

Charles-Edouard Pfister

Presses polytechniques et universitaires romandes

Table des matières

Pages de titre	iii
Avant-propos	v
Table des matières	vii
Conventions et rappels de mathématiques	xi
L1 Rappel sur les ensembles	xi
L2 Rappel d'analyse	xii
L3 Rappel d'algèbre linéaire	xvi
1 Introduction	1
2 Axiomes de Kolmogorov	5
2.1 Expérience aléatoire	5
2.2 Espace de probabilité	6
2.3 Espace de probabilité discret	11
2.4 Exercices	14
3 Des boules et des boîtes	17
3.1 Ranger n boules distinguables dans M boîtes	18
3.2 Ranger n boules distinguables, au plus une boule par boîte	18
3.3 Ranger n boules indistinguables, au plus une boule par boîte	19
3.4 Ranger n boules distinguables dans M boîtes ordonnées	21
3.5 Ranger n boules indistinguables dans M boîtes	22
3.6 Exercices	26
4 Probabilité conditionnelle et indépendance	29
4.1 Probabilité conditionnelle	30
4.2 Indépendance	36
4.3 Exercices	40

5	Espaces de probabilité sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^k$	43
5.1	Mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$	44
5.2	Mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^k$	49
5.3	Exercices	54
6	Variable aléatoire	57
6.1	Variable aléatoire réelle	57
6.2	Construction d'une variable aléatoire réelle	67
6.3	Plusieurs variables aléatoires réelles	69
6.4	Variables aléatoires indépendantes	71
6.5	Somme de variables aléatoires indépendantes	75
6.6	La loi binomiale et la loi de Poisson	77
6.7	Exercices	79
7	Espérance d'une variable aléatoire	83
7.1	Définition de l'espérance	83
7.2	Définition de l'espérance, cas général	86
7.3	Propriétés de l'espérance	91
7.4	Exercices	98
8	Inégalités de Markov, Chebyshev et Hoeffding	101
8.1	Inégalités de Markov et Chebyshev	101
8.2	Inégalité de Hoeffding	104
8.3	Exercices	107
9	Chaînes de Markov	111
9.2	Exercices	118
10	La loi des grands nombres	123
10.1	Théorème de la loi des grands nombres	123
10.2	Processus stochastique faiblement corrélé	127
10.3	Loi forte des grands nombres	130
10.4	Fonction de répartition empirique	131
10.5	Principe de la méthode de Monte-Carlo	133
10.6	Chaîne de Markov ergodique	134
10.7	Exercices	136

11 Marche aléatoire	139
11.1 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, retour à l'origine	140
11.2 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, loi de l'arc-sinus	144
11.3 Comportement récurrent/transitoire	147
11.4 Exercices	150
12 Théorème de la limite centrale	153
12.1 La loi binomiale et la loi normale	154
12.2 Théorème de De Moivre-Laplace	157
12.3 Théorème de la limite centrale	160
12.4 Preuve du théorème de la limite centrale	165
12.5 Convergence faible	169
12.6 Exercices	172
13 Estimation ponctuelle	175
13.1 Modèle statistique	175
13.2 Définitions de base	177
13.3 Modèle de Gauss	180
13.4 Exercices	186
14 Méthode des moindres carrés	189
14.1 Principe général	190
14.2 Mesure d'une quantité scalaire	191
14.3 Régression linéaire simple	192
14.4 Modèle de Gauss et les moindres carrés	195
14.5 Exercices	196
15 Estimation par intervalle	199
15.1 Domaine de confiance	199
15.2 Exercices	204
16 Test	207
16.1 Test de signification, p -valeur	207
16.2 Erreurs de première et deuxième espèce	210
16.3 Exercices	213

Solutions de quelques exercices	215
Index	225
Bibliographie	231

Théorie des probabilités

Cours d'introduction avec application à la statistique mathématique

Cet ouvrage constitue une première introduction à la théorie des probabilités. A la fois rigoureux et didactique, il présente l'ensemble des notions et outils de base, et de manière approfondie, les deux théorèmes fondamentaux que sont la loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale. Certains sujets, comme celui de l'espérance d'une variable aléatoire, sont traités plus en détail qu'usuellement dans un texte d'introduction. La théorie ainsi développée est appliquée d'une part à l'étude des chaînes de Markov, marches aléatoires et au modèle d'Ising, et d'autre part à des sujets classiques de statistique mathématique, estimations, tests, populations normalement distribuées. Les résultats sont démontrés dans leur intégralité, et de nombreux exemples jalonnent le texte.

Cette référence s'adresse principalement aux étudiants de physique ou de mathématiques des universités et grandes écoles, maîtrisant au préalable les bases du calcul différentiel et intégral.



Charles-Edouard Pfister est Docteur en physique mathématique de l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich (ETHZ). Il a poursuivi sa carrière de chercheur en Allemagne, au Centre pour la recherche interdisciplinaire (ZIF) de l'Université de Bielefeld, en France à Marseille, au Centre national de la recherche scientifique (CNRS) et à l'Université Rutgers aux USA. Il a ensuite rejoint la section de mathématiques de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL), où il est professeur titulaire depuis 1996. Ses domaines de recherches sont principalement la mécanique statistique ainsi que les systèmes dynamiques.

ISBN 978-2-88074-981-1



9 782880 749811 >

Presses polytechniques et universitaires romandes