

**Agrégation
de mathématiques**

COURS

D'ALGÈBRE

Patrice Tauvel

DUNOD

Table des matières

Avant-propos	XI
1 Relations d'ordre et d'équivalence	1
1.1 Relations d'équivalence	1
1.2 Relations d'ordre	3
1.3 Ensembles inductifs, ensembles bien ordonnés	6
2 Entiers naturels, cardinaux	7
2.1 Ensemble des entiers naturels	7
2.2 Ensemble finis, cardinaux	9
2.3 Addition des entiers naturels	12
2.4 Multiplication des entiers naturels	13
2.5 Nombres premiers	16
2.6 Analyse combinatoire	16
2.7 Ensembles dénombrables	18
2.8 Quelques compléments	19
3 Lois de compositions	23
3.1 Lois de composition internes	23
3.2 Morphismes, quotients	26
3.3 Lois de composition externes	27
3.4 Structures algébriques	28
3.5 Symétrisation d'un semi-groupe	29
3.6 Anneau des entiers rationnels	30
4 Groupes	33
4.1 Généralités	33
4.2 Sous-groupes	34
4.3 Quotients	36
4.4 Suites exactes, produits semi-directs	39
4.5 Groupes résolubles	40
4.6 pgcd, ppcm	41
4.7 Quotients du groupe des entiers	43
4.8 Quelques résultats classiques	44
4.9 Sommes de groupes abéliens	46
4.10 Groupes abéliens libres	48
4.11 Groupes abéliens de type fini	51
4.12 Groupes libres	55
4.13 Générateurs et relations	57

5 Groupes symétriques	59
5.1 Orbites, transpositions, cycles	59
5.2 Signature d'une permutation	61
5.3 Opération d'un groupe sur un ensemble	64
5.4 Applications aux groupes	66
5.5 Simplicité du groupe alterné	68
5.6 Résolubilité du groupe symétrique	69
5.7 Automorphismes intérieurs	70
5.8 Sous-groupes de Sylow	72
6 Anneaux et corps	75
6.1 Structure d'anneau	75
6.2 Sous-anneaux, idéaux, quotients	77
6.3 Caractéristique d'un anneau	79
6.4 Sommes et produits d'idéaux	80
6.5 Corps	81
6.6 Localisation	82
6.7 Corps des nombres rationnels	84
6.8 Corps premiers	85
6.9 Matrices	85
7 Nombres réels	89
7.1 Structures ordonnées	89
7.2 Suites de Cauchy	93
7.3 Corps des nombres réels	95
7.4 Propriétés topologiques du corps des réels	97
7.5 Propriétés algébriques du corps des réels	100
7.6 Applications continues	103
7.7 Une représentation des nombres réels	106
7.8 Une caractérisation du corps des réels	108
8 Nombres complexes	111
8.1 Corps des nombres complexes	111
8.2 Propriétés topologiques du corps des complexes	113
8.3 Application exponentielle	114
8.4 Dual d'un groupe abélien fini	118
9 Modules	121
9.1 Structure de module	121
9.2 Sous-modules, produits, quotients	123
9.3 Sommes de modules	125
9.4 Projecteurs, sous-modules supplémentaires	127
9.5 Structure d'algèbre	128
9.6 Familles génératrices, familles libres, bases	129
9.7 Dualité	132
9.8 Matrices, trace	136
9.9 Matrices et applications linéaires	137
9.10 Anneaux et modules noethériens	139

10 Espaces vectoriels	141
10.1 Indépendance linéaire dans les espaces vectoriels	141
10.2 Espaces vectoriels de dimension finie	142
10.3 Cas général	145
10.4 Rang	146
10.5 Dualité	147
10.6 Matrices et applications linéaires	152
10.7 Changements de bases	153
10.8 Espaces vectoriels sur un corps fini	156
10.9 Applications linéaires	157
11 Polynômes à une indéterminée	161
11.1 Définition des polynômes	161
11.2 Degré	162
11.3 Valuation	164
11.4 Divisions	164
11.5 Idéaux, diviseurs, multiples	165
11.6 Polynômes irréductibles	169
11.7 Substitutions	171
11.8 Zéros des polynômes	172
11.9 Dérivations, formule de Taylor	176
11.10 Corps algébriquement clos	177
11.11 Polynômes réels	178
11.12 Relations entre coefficients et racines	179
11.13 Polynômes d'endomorphismes	182
11.14 Endomorphismes semi-simples	185
12 Déterminants	187
12.1 Applications multilinéaires	187
12.2 Premières propriétés des déterminants	189
12.3 Déterminant d'un endomorphisme	191
12.4 Déterminant d'une matrice carrée	192
12.5 Calcul des déterminants	194
12.6 Exemples de déterminants	197
12.7 Application au rang	198
12.8 Calculs de dimensions	199
12.9 Polynôme caractéristique	201
13 Réduction des endomorphismes	205
13.1 Vecteurs propres, valeurs propres	205
13.2 Diagonalisation	206
13.3 Trigonalisation	208
13.4 Endomorphismes nilpotents	211
13.5 Réduction de Jordan	213
13.6 Sous-espaces monogènes	214
14 Polynômes	217
14.1 Algèbre d'un monoïde	217
14.2 Définition des polynômes	219

14.3	Degrés	221
14.4	Valuation	222
14.5	Substitutions	222
14.6	Dérivations	223
14.7	Fonctions polynomiales	225
14.8	Anneaux de polynômes noëthériens	226
14.9	Polynômes symétriques	226
14.10	Structure des polynômes symétriques	227
14.11	Sommes de puissances	229
14.12	Résultant et discriminant	230
15	Arithmétique dans les anneaux	233
15.1	Généralités	233
15.2	Anneaux factoriels	235
15.3	Anneaux principaux	238
15.4	Anneaux euclidiens	239
15.5	Entiers de Gauss	241
15.6	Polynômes et anneaux factoriels	243
15.7	Localisation	246
15.8	Corps des fractions d'un anneau principal	247
15.9	Modules de type fini sur un anneau principal	249
15.10	Module associé à un endomorphisme	255
16	Fractions rationnelles	257
16.1	Généralités	257
16.2	Substitutions	258
16.3	Dérivations	261
16.4	Décomposition en éléments simples	263
16.5	Partie polaire, résidus	266
16.6	Un calcul d'intégrales	267
16.7	Théorème des résidus	269
16.8	Autres applications des fractions rationnelles	271
16.9	Fractions rationnelles symétriques	273
17	Systèmes linéaires	275
17.1	Sous-espaces affines	275
17.2	Systèmes et équations linéaires	276
17.3	Systèmes de Cramer	278
17.4	Cas général	280
17.5	Deux applications	282
17.6	Opérations élémentaires	284
17.7	Applications aux matrices inversibles	287
17.8	Applications au calcul du rang	288
17.9	Applications aux systèmes linéaires	289
18	Théorie élémentaire des corps	293
18.1	Extensions et adjonctions	293
18.2	Extensions algébriques	294
18.3	Corps de rupture, corps de décomposition	295

18.4	Clôture algébrique	297
18.5	Racines de l'unité	299
18.6	Corps finis	301
18.7	Extensions quadratiques, involutions	303
18.8	Quelques calculs dans les corps finis	304
19	Algèbre linéaire et analyse	307
19.1	Rappels	307
19.2	Espaces normés de dimension finie	309
19.3	Rayon spectral	313
19.4	Exponentielle d'endomorphismes	314
19.5	Matrices diagonalisables ou trigonalisables	315
19.6	Applications des polynômes symétriques	317
19.7	Classes de conjugaison	319
20	Séries formelles	321
20.1	Familles sommables	321
20.2	Premières propriétés des séries formelles	325
20.3	Séries formelles et sommabilité	328
20.4	Substitutions	331
20.5	Réversion d'une série formelle	332
20.6	Séries formelles généralisées	334
20.7	Dérivations	336
20.8	Séries formelles usuelles	337
20.9	Séries génératrices	339
21	Produits tensoriels	341
21.1	Définition des produits tensoriels	341
21.2	Propriétés des produits tensoriels	343
21.3	Sommes directes et produits	345
21.4	Dualité et produits tensoriels	346
21.5	Extension des scalaires	348
21.6	Produits tensoriels de matrices	349
21.7	Produits tensoriels d'algèbres	350
22	Groupe linéaire	351
22.1	Généralités	351
22.2	Groupes dérivés	353
22.3	Dilatations et transvections	356
22.4	Simplicité du groupe projectif spécial linéaire	358
22.5	Ordres de certaines matrices	361
23	Formes sesquilinéaires	365
23.1	Applications semi-linéaires	365
23.2	Formes sesquilinéaires	366
23.3	Formes hermitiennes	368
23.4	Adjoint d'un endomorphisme	370
23.5	Isotropie, théorème de Witt	371
23.6	Équivalence de formes hermitiennes	376

23.7	Formes hermitiennes et corps ordonnés	378
23.8	Groupe unitaire, similitudes	380
23.9	Groupe unitaire complexe	382
24	Groupe orthogonal	385
24.1	Formes quadratiques	385
24.2	Cas de la dimension 2	388
24.3	Générateurs du groupe orthogonal	390
24.4	Centre du groupe orthogonal	392
24.5	Commutateurs dans le groupe orthogonal	393
24.6	Groupe orthogonal euclidien	395
25	Quaternions réels	401
25.1	Généralités	401
25.2	Quaternions et groupes orthogonaux	403
26	Espaces hermitiens	407
26.1	Généralités	407
26.2	Déterminants de Gram	410
26.3	Endomorphismes hermitiens	411
26.4	Endomorphismes hermitiens positifs	413
26.5	Endomorphismes normaux	415
26.6	Décomposition polaire	416
26.7	Quelques points de topologie	418
27	Espaces euclidiens	423
27.1	Généralités	423
27.2	Endomorphismes symétriques	424
27.3	Similitudes	426
27.4	Endomorphismes normaux	428
27.5	Orientation	429
27.6	Produit mixte, produit vectoriel	430
27.7	Produit vectoriel en dimension 3	432
27.8	Quelques points de topologie	433
28	Quelques points d'arithmétique	435
28.1	Numération des entiers	435
28.2	Fonctions d'Euler et de Möbius	436
28.3	Loi de réciprocité quadratique	437
28.4	Structure de certains groupes	439
28.5	Étude des carrés	441
28.6	Un cas particulier du théorème de Dirichlet	442
	Références bibliographiques	443
	Index de notations	445
	Index alphabétique	447