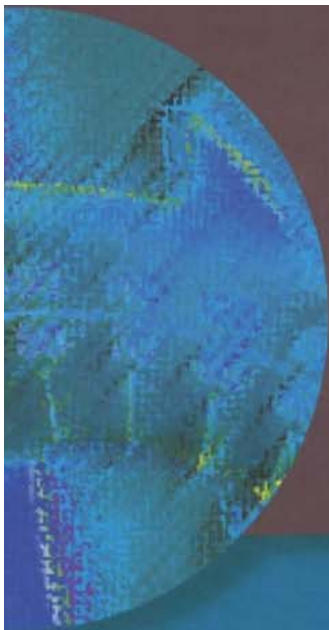




LES NOUVEAUX

Précis

B R É A L

Mathématiques

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

MP

Cours

Méthodes

Exercices
résolus

D. GUININ • B. JOPPIN



1. Groupes (compléments) – Arithmétique – Action de groupe

A. Groupes, sous-groupes, morphismes	8
B. Congruences – Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	9
C. Génération d'un sous-groupe	13
D. Compléments d'arithmétique	15
E. Actions de groupe	18
F. Action d'un groupe fini sur un ensemble fini	21
G. Produit de groupes	23
Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre	29
Énoncés des exercices	36
Solutions des exercices	39

2. Anneaux et idéaux – Arithmétique des polynômes

A. Anneaux	48
B. Idéaux d'un anneau commutatif	50
C. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	52
D. Divisibilité dans un anneau	54
E. Sous algèbre engendrée par un élément d'une $\mathbb{K}$ -algèbre E	56
Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre	60
Énoncés des exercices	68
Solutions des exercices	71

3. Espaces vectoriels – Applications linéaires

A. Familles libres, génératrices – Bases – Dimension	80
B. Somme de sous-espaces vectoriels	83
C. Rang d'une application linéaire	92
D. Dual d'un espace vectoriel – Formes linéaires – Hyperplans	95
Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre	100
Énoncés des exercices	107
Solutions des exercices	110

4. Calcul matriciel – Systèmes linéaires

A. Matrices semblables – Matrices équivalentes, rang	120
B. Opérations élémentaires	123
C. Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme	127
D. Systèmes d'équations linéaires	129
Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre	134
Énoncés des exercices	140
Solutions des exercices	143

5. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

A. Sous-espaces stables	152
B. Polynômes d'un endomorphisme	154
C. Éléments propres d'un endomorphisme	157
D. Réduction en dimension finie	161
E. Applications de la réduction	171
Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre	179
Énoncés des exercices	190
Solutions des exercices	193

6. Formes bilinéaires symétriques – Formes quadratiques

A. Formes bilinéaires	202
B. Formes quadratiques	205
C. Formes quadratiques sur un espace de dimension finie	209
Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre	217
Énoncés des exercices	221
Solutions des exercices	223

7. Espaces préhilbertiens

A. Espaces préhilbertiens réels	232
B. Orthogonalité	239
Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre	251
Énoncés des exercices	257
Solutions des exercices	259

8. Espaces euclidiens

A. Structure d'espace euclidien	268
B. Adjoint d'un endomorphisme – Endomorphismes remarquables	271
C. Formes quadratiques sur un espace euclidien	281
Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre	285
Énoncés des exercices	294
Solutions des exercices	298

9. Coniques – Quadriques

A. Réduction de l'équation d'une conique	312
B. Quadriques	315
Énoncés des exercices	323
Solutions des exercices	325

10. Espaces hermitiens

A. Structure d'espace hermitien	334
B. Endomorphismes remarquables d'un espace hermitien	335
Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre	339
Énoncés des exercices	341
Solutions des exercices	343

INDEX	347
-------	-----

Notations usuelles	351
--------------------	-----

Groupes (compléments)

Arithmétique

Actions de groupes

A. Groupes, sous-groupes, morphismes	8
1. Groupes	8
2. Sous-groupes	8
3. Morphismes de groupes	8
B. Congruences – Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	9
1. Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$	9
2. Congruence modulo n	9
3. Opérations canoniques dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	10
4. Morphismes de $\mathbb{Z}$ dans un anneau	12
C. Génération d'un sous-groupe	13
1. Sous-groupes cycliques	13
2. Caractéristique d'un anneau	14
D. Compléments d'arithmétique	15
1. Éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	15
2. Théorèmes classiques	16
3. Indicateur d'Euler	17
E. Actions de groupe	18
1. Contexte et définitions	18
2. Stabilisateur d'un élément	19
3. Orbites sous une action de groupe	20
F. Action d'un groupe fini sur un ensemble fini	21
1. Équation des classes	21
2. Théorème de Lagrange	21
3. Théorème de Cayley	22
4. Théorème de Cauchy	22
G. Produit de groupes	23
1. Produit direct	23
2. Sous-groupes distingués	26
3. Produit semi-direct	27
4. Groupes diédraux	27
Méthodes : L'essentiel ; mise en œuvre	29
Énoncés des exercices	36
Solutions des exercices	39