

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOGRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE BLIDA 1
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Analyse Mathématiques et Applications

Présenté par:

Benmoussa Bilal

Thème:

Étude de quelques problèmes de Cauchy pour les équations d'évolution d'ordre fractionnaire

Soutenue publiquement, le .. / 07 / 2025, devant le jury composé de :

M. Tami Omar	MCB	Univ. Blida1	Président
M. Talbi Mohamed El Amine	MCA	Univ. Blida1	Examineur
Mme Boutaous Fatiha	MCA	Univ. Blida1	Promotrice

Année universitaire : 2024/2025

Table des matières

Remerciements	i
Notations	2
Résumé	4
Abstract	5
Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Les espaces fonctionnels	3
1.1.1 Espace métrique	3
1.1.2 Espace de Banach	3
1.1.3 Espace de Hilbert	4
1.2 Les opérateurs linéaires	4
1.2.1 Opérateur linéaire	4
1.2.2 Opérateur linéaire borné	4
1.2.3 Opérateur inversible	5
1.2.4 Opérateur linéaire fermé	5
1.2.5 Ensemble résolvant, spectre et résolvante d'un opérateur	5
1.2.6 Opérateur compact	6
1.2.7 Application Lipschitzienne	6
1.3 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires	7
1.3.1 Générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe	8
1.3.2 Quelques semi-groupes particuliers	9
1.4 Théorème d'Ascoli	10

1.5	Intégrale de Bochner	11
1.6	Le calcul fractionnaire	13
1.6.1	Fonctions utiles	13
1.6.2	Intégrale fractionnaire	13
1.6.3	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	14
1.6.4	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	16
1.7	Mesure de non-compacité	17
1.7.1	Propriétés supplémentaires	18
1.7.2	Mesure de Kuratowski	19
1.7.3	Mesure de Hausdorff	19
1.8	Théorèmes fondamentaux du point fixe	22
2	Problème de Cauchy autonome de Riemann-Liouville	24
2.1	Équation d'évolution abstraite avec dérivée de Riemann-Liouville	24
2.1.1	Introduction	24
2.1.2	Le problème posé	24
2.2	Résultats principaux d'existence des solutions	30
2.2.1	Lemmes préliminaires	31
2.2.2	Cas du semi-groupe compact	36
2.2.3	Cas du semi-groupe non compact	41
3	Problème de Cauchy non-autonome de Caputo	45
3.1	Équation d'évolution intégrro-différentielle abstraite avec dérivée de Caputo	45
3.1.1	Introduction	45
3.1.2	Le problème posé	45
3.2	Résultats principaux d'existence de solutions	47
3.2.1	Lemmes préliminaires	47
3.2.2	Exemple d'application	63
	Conclusion générale	65
	Bibliographie	65

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma promotrice, **Mme Boutaous Fatiha**, pour son encadrement exceptionnel tout au long de ce travail. Sa disponibilité, ses conseils avisés et son soutien constant m'ont permis de mener à bien ce mémoire.

Je remercie également Messieurs les membres du jury, **M. Tami Omar** et **M. Talbi Mohamed El Amine**, pour l'honneur qu'ils me font en évaluant ce travail et pour leurs remarques pertinentes qui ont enrichi cette étude.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à ma famille et à mes proches pour leur soutien moral et leur encouragement indéfectible tout au long de ce parcours.

Notations

$\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{N}$: L'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{C}$: L'ensemble des nombres complexes.

$[a, b]$: L'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x < b$.

$[x]$: La partie entière d'un nombre réel x .

$|x|$: valeur absolue ou module de x .

∂F : la frontière de l'ensemble F .

X : L'espace de Banach.

$\|\cdot\|_X$: La norme de l'espace X .

A : Opérateur linéaire.

$D(A)$: Domaine de l'opérateur linéaire A .

$\mathcal{L}(X, Y)$: Espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y .

$C([a, b], \mathbb{R})$: Espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

$C^k(]a, b[)$: Espace des fonctions k fois continûment différentiables sur l'intervalle $]a, b[$.

$AC([a, b])$: Espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

$B(x_0, r)$: Boule ouverte de centre x_0 et rayon r .

$\overline{B}(x_0, r)$: Boule fermée de centre x_0 et rayon r .

$\rho(A)$: L'ensemble résolvant de A .

$R(\lambda, A)$: Résolvante de A en $\lambda \in \rho(A)$.

$\text{conv}(B)$: Enveloppe convexe de B .

$\overline{\text{conv}}(B)$: Enveloppe convexe fermée de B .

$\text{diam}(F)$: Diamètre de l'ensemble F . MNC : mesure de non-compacité.

$\alpha(F), \beta(F), \gamma(F)$: Des mesures de non-compacité.

$I^\alpha f$: Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

${}^{RL}D^\alpha f$: Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

${}^CD^\alpha f$: Dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

$\Gamma(\alpha)$: Fonction Gamma d'Euler.

المخلص

هذا الأطروحة تدرس المعادلات التطورية التجريدية الكسرية، مع التركيز على مشتقات ريمان-ليوفيل وكابوتو. تتناول وجود حلول تكاملية لمشاكل كوشي غير المحلية، باستخدام أدوات مثل نصف مجموعات العوامل، وقياسات عدم التراص، ونظريات النقطة الثابتة. تشمل النتائج الرئيسية شروط وجود حلول في فضاءات باناخ، مع تطبيقات على المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية. يجمع العمل بين التحليل الوظيفي والحساب الكسري لحل المشاكل المعقدة في الفيزياء الرياضية.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية تجريدية كسرية، نصف مجموعة مضغوطة، حل تكاملي، قياس عدم التراص لهوسدورف، قياس عدم التراص لكيراتوفسكي، نظرية النقطة الثابتة.

Résumé

Ce mémoire étudie les équations d'évolution abstraites fractionnaires, en se concentrant sur les dérivées de Riemann-Liouville et Caputo. Il aborde l'existence de solutions intégrales pour des problèmes de Cauchy non locaux, en utilisant des outils tels que les semi-groupes d'opérateurs, les mesures de non-compacité et des théorèmes de point fixe. Les résultats principaux incluent des conditions d'existence de solutions dans des espaces de Banach, avec des applications aux équations aux dérivées partielles fractionnaires. Le travail combine analyse fonctionnelle et calcul fractionnaire pour résoudre des problèmes complexes en physique mathématique.

Mots clés :

Équations différentielle abstraite d'ordre fractionnaire, semi-groupe compact, solution intégrale, mesure de non compacité de Hausdorff, mesure de non compacité de Kuratowski, théorème du point fixe.

Abstract

This master's thesis explores abstract fractional evolution equations, focusing on Riemann-Liouville and Caputo derivatives. It establishes existence theorems for mild solutions using fixed-point theory and measures of noncompactness. The work includes applications to partial differential equations and nonlocal conditions, providing new insights into fractional calculus. Key results address both compact and noncompact operator semigroups, extending classical analysis techniques.

Keywords :

Fractional order abstract differential equation, compact semigroup, mild solution, Hausdorff measure of noncompactness, Kuratowski measure of noncompactness, fixed point theorem.

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires, qui généralisent les dérivées classiques aux ordres non entiers, constituent un domaine riche et fascinant des mathématiques appliquées. Leur histoire remonte à la fin du XVII^e siècle, avec une correspondance célèbre entre Leibniz et L'Hospital en 1695, où fut évoquée pour la première fois la possibilité d'une dérivée d'ordre fractionnaire. Cependant, ce n'est qu'au XIX^e siècle que des mathématiciens comme Liouville, Riemann et Grünwald ont formalisé les opérateurs différentiels fractionnaires, ouvrant la voie à des développements théoriques et appliqués.

Au XX^e siècle, les équations fractionnaires ont connu un essor significatif, notamment grâce aux travaux de **Caputo** et **Riemann-Liouville**, qui ont introduit des définitions alternatives des dérivées fractionnaires. Ces outils se sont révélés particulièrement adaptés pour modéliser des phénomènes complexes présentant des mémoires longues ou des propriétés héréditaires, comme les processus de diffusion anormale, les matériaux viscoélastiques, ou encore les systèmes biologiques.

Ce mémoire, représente une synthèse des résultats obtenus dans :

- **Le chapitre 4 du livre de Yong Zhou** : Basic theory of fractional differential equations, 2015, voir [17].
- **L'article de P. Chen, X. Zhang and Y. Li** : Cauchy problem for fractional non-autonomous evolution equations, 2019, voir [11].

L'objectif de ce travail est double :

- Explorer les fondements théoriques des équations fractionnaires, en mettant l'accent sur les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo, ainsi que sur leurs propriétés.
- Étudier l'existence et l'unicité des solutions pour des équations d'évolution fractionnaires non linéaires, en utilisant des outils avancés tels que la théorie des semi-groupes d'opérateurs, la mesure de non-compacité et les théorèmes de point fixe.

Ce mémoire s'articule autour de trois chapitres principaux :

- **Le premier chapitre** contient des préliminaires mathématiques, incluant les espaces

fonctionnels, les opérateurs linéaires, les semi-groupes d'opérateurs linéaires, les dérivées fractionnaires, la mesure de non-compacité et les théorèmes de point fixe.

- **Le deuxième chapitre** concerne l'analyse d'une équation d'évolution avec dérivée de **Riemann-Liouville** et condition non locale :

$$\begin{cases} {}^{RL}D_0^q x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \text{ p.p. } t \in [0, a], \\ {}^{RL}D_0^{q-1} x(0) + g(x) = x_0, \end{cases}$$

où ${}^{RL}D_0^q$ est la dérivée de Riemann-Liouville d'ordre q , ${}^{RL}D_0^{q-1}$ est l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $1-q$, $0 < q < 1$, A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés (C_0 -semi-groupe) $\{Q(t)\}_{t \geq 0}$ dans un espace de Banach X , $f : J \times X \rightarrow X$ est une fonction donnée, $g : C(J, X) \rightarrow L(J, X)$ est un opérateur donné satisfaisant certaines hypothèses, et $x_0 \in X$.

- **Le troisième chapitre** concerne l'étude d'une équation d'évolution intégral-différentielle non autonome de type mixte d'ordre fractionnaire de **Caputo** :

$$\begin{cases} {}^CD_t^\alpha u(t) + A(t)u(t) = f(t, u(t), (Tu)(t), (Su)(t)), \quad t \in I, \\ u(0) = A^{-1}(0)u_0, \end{cases}$$

où ${}^CD_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire standard de Caputo en temps d'ordre $0 < \alpha \leq 1$, $I = [0, a]$, $a > 0$ est une constante, $A(t)$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés définis sur un domaine dense $D(A)$ dans un espace de Banach E à valeurs dans E tel que $D(A)$ est indépendant de t , $f : I \times E \times E \times E \rightarrow E$ est une fonction de type Carathéodory, $u_0 \in E$, T est l'opérateur intégral de Volterra défini par

$$(Tu)(t) = \int_0^t K(t, s)u(s) ds,$$

avec noyau intégral $K \in C(\Delta, \mathbb{R})$, $\Delta = \{(t, s) \mid 0 \leq s \leq t \leq a\}$ et S est l'opérateur intégral de Fredholm défini par

$$(Su)(t) = \int_0^a H(t, s)u(s) ds,$$

On termine ce travail avec une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaires

Introduction Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques notions et résultats de base qui seront utiles dans ce travail. En particulier, nous rappelons les définitions de quelques espaces fonctionnels, des opérateurs linéaires fermés, des opérateurs compacts, des fonctions Lipschitziennes, le calcul fractionnaire, la mesure de non compacité et les théorèmes fondamentaux du point fixe. Pour plus de détails voir Brézis [3], Kilbas [5], Pazy [10] et Vrabie [16].

1.1 Les espaces fonctionnels

1.1.1 Espace métrique

Définition 1.1 (*Distance*) Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur l'ensemble X , une application $(x, y) \mapsto d(x, y)$ de $X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant les trois conditions :

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ (inégalité triangulaire).

On appelle espace métrique le couple (X, d) , où d est une distance sur l'ensemble X .

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.2 1. On dit qu'un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente dans X .

2. Un espace vectoriel normé qui est complet est appelé espace de Banach.

Exemples : Les espaces vectoriels $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont de Banach.

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.3 On appelle espace de Hilbert X , tout espace de Banach X dont la norme provient d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur X (c'est-à-dire : $\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \forall x \in X$).

1.2 Les opérateurs linéaires

Soit E et F deux espaces de Banach sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1.2.1 Opérateur linéaire

Définition 1.4 Un opérateur linéaire A de E dans F est une application linéaire définie sur sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ et à valeurs dans F , tel que pour tous $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

1. $A(x + y) = Ax + Ay$.
2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

L'ensemble $D(A)$, défini par : $D(A) = \{x \in E / Ax \text{ ait un sens}\}$ est appelé le domaine de l'opérateur linéaire A .

1.2.2 Opérateur linéaire borné

Définition 1.5 Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. Dire que l'opérateur A est borné, signifie qu'il existe une constante $C > 0$, telle que $\|Au\|_F \leq C\|u\|_E, \forall u \in D(A)$.

Sinon, A est dit opérateur linéaire non borné.

Lorsque $D(A) = E$, alors l'opérateur linéaire borné A est continu.

Théorème 1.1 Un opérateur linéaire A défini sur $D(A) = E$, à valeurs dans F est continu si, et seulement s'il est borné.

On note $\mathcal{L}(E, F)$: l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F .

Si $E = F$, on note l'ensemble $\mathcal{L}(E, E)$ par $\mathcal{L}(E)$.

1.2.3 Opérateur inversible

Définition 1.6 Soit E et F deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que l'opérateur A est inversible s'il existe un opérateur linéaire $B \in \mathcal{L}(E, F)$, tel que $A \circ B = I_F$ et $B \circ A = I_E$, où I_E (resp. I_F) est l'opérateur identité de E (resp. de F).

Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.

1.2.4 Opérateur linéaire fermé

Définition 1.7 (Graphe d'un opérateur) Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire non borné. Le graphe de l'opérateur linéaire est un sous-espace vectoriel de $E \times E$, défini par

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}.$$

Définition 1.8 (Opérateur fermé). Un opérateur linéaire non borné $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ est dit fermé si son graphe $\Gamma(A)$ est fermé dans $E \times E$.

Proposition 1.1 Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur linéaire non borné. L'opérateur A est fermé si : $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que :

$$(u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \text{ dans } E) \text{ et } (Au_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v \text{ dans } F) \Rightarrow u \in D(A) \text{ et } v = Au.$$

1.2.5 Ensemble résolvant, spectre et résolvante d'un opérateur

Définition 1.9 • On appelle ensemble résolvant d'un opérateur linéaire A est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, défini par :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

• On appelle spectre d'un opérateur linéaire A le complémentaire de l'ensemble résolvant de A dans $\mathbb{C}$, défini par :

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A).$$

• La résolvante d'un opérateur linéaire A est définie par $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

1.2.6 Opérateur compact

Définition 1.10 (*Ensemble compact*) Soit (X, τ) un espace topologique.

1. On appelle **recouvrement** ouvert de X , une famille $A_i, i \in I$ des ouverts de X , telle que $X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.
2. L'espace topologique séparé (X, τ) est **compact**, si de tout recouvrement ouvert de X , on peut extraire un sous-recouvrement fini. C'est-à-dire si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts telle que $X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, alors il existe $i_0, i_2, \dots, i_n \in I$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ tels que $X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

Définition 1.11 (*Ensemble pré-compact*) Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est pré-compact si pour tout $\epsilon > 0$, on peut recouvrir X par un nombre fini des boules de rayon ϵ .

Théorème 1.2 Soit (X, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est compact.
2. X précompact et complet.

Définition 1.12 (*Ensemble relativement compact*) Une partie S d'un espace métrique X est dite relativement compacte, si sa fermeture $\overline{A}$ est compacte.

Définition 1.13 (*Opérateur compact*) Un opérateur linéaire continu $A : E \rightarrow F$ est dit compact s'il transforme tout ensemble borné M de E en un ensemble relativement compact. Autrement dit : $\overline{A(B_E)}$ est un compact de F , où B_E désigne la boule unité de E .

On note l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F par $K(E; F)$.

Si $E = F$, on note l'ensemble des opérateurs compacts de E dans E par $K(E)$.

Théorème 1.3 (*Théorème de Riesz*) Soit E un espace vectoriel normé. Si la boule unité fermée de E est compacte alors l'espace E est de dimension finie.

1.2.7 Application Lipschitzienne

Une application Lipschitzienne est une application possédant une certaine propriété de régularité qui est plus forte que la continuité.

Cas réel

Définition 1.14 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point), $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et k un réel strictement positif. On dit que f est **k -Lipschitzienne** si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Cas des espaces métriques

Définition 1.15 Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, $f : E \rightarrow F$ une application et k un réel strictement positif. On dit que f est **k -Lipschitzienne** si, et seulement si

$$\forall (x, x') \in E^2, d_F(f(x), f(x')) \leq kd_E(x, x').$$

De plus

- 1) f est dite Lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que f soit k -Lipschitzienne. La plus petite constante k telle que f soit k -lipschitzienne est appelée constante de Lipschitz.
- 2) f est dite contractante si et seulement s'il existe un $k \in [0, 1[$ tel que f soit k -Lipschitzienne.

1.3 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

Introduction Dans ce chapitre, nous rappelons les notions essentielles de la théorie de semi-groupes d'opérateurs linéaires. Pour plus de détails, voir A. Pazy [10].

Définition 1.16 (Semi-groupe) Soit X un espace de Banach. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de X dans X est dite semi-groupe sur X si :

1. $T(0) = I$ (I est l'opérateur identité dans X).
2. $T(s + t) = T(s) \circ T(t)$ pour tous $t, s \geq 0$.

Exemple On considère l'espace de Banach $X = L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$. Pour $t \geq 0$, soit l'opérateur linéaire T_t défini sur l'espace X , par

$$T_t(f)(x) = f(x + t).$$

La famille d'opérateurs linéaires $\{T_t\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe sur l'espace X , car :

1. Pour $t = 0$, $T_0(f)(x) = f(x)$.
2. Pour tous $t, s \geq 0$, on a $T_t(s)f(x) = f(x + t + s) = (T_t \circ T_s)f(x)$.

Définition 1.17 (*Semi-groupe fortement continu ou C_0 -Semi-groupe*) On dit qu'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $t \mapsto T(t)x$ de $\mathbb{R}_+$ dans X est continue. Cette propriété peut être remplacée par :

$$\forall x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0.$$

Proposition 1.2 1. Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est C_0 -semi-groupe, alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $w \geq 0$ telles que : $\forall t \geq 0, \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{wt}$.
 2. Si $M = 1$ et $w = 0$ alors $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$, on dira que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contraction.

Définition 1.18 (*Semi-groupe uniformément continu*) Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit uniformément continu sur un espace de Banach X si :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Remarque Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu alors $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 Semi-groupe. La réciproque est fausse en général.

1.3.1 Générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe

Définition 1.19 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe, l'opérateur linéaire A défini par :

$$\begin{cases} D(A) = \{x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \} \\ \text{et} \\ Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

est appelé le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ et $D(A)$ est le domaine de définition de l'opérateur A .

Théorème 1.4 Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur X si, et seulement si A est un opérateur linéaire borné sur X .

Proposition 1.3 Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe sur l'espace X et A le générateur infinitésimal alors :

a) $\forall x \in X$,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

b) $\forall x \in X$ on a

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A) \text{ et } A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

c) $\forall x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

d) $\forall x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Théorème 1.5 (Théorème de Hille-Yosida) *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *l'opérateur A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$, où $\rho(A)$ désigne l'ensemble résolvant de A et*

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \omega}, \text{ pour } \operatorname{Re} \lambda > \omega.$$

1.3.2 Quelques semi-groupes particuliers

Semi-groupe différentiable

Définition 1.20 • *Un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X est dit différentiable pour $t > t_0$, si pour tout $x \in X$, l'application $t \mapsto T(t)x$ est différentiable pour $t > t_0$.*

• *$\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est dit différentiable, s'il est différentiable pour $t > 0$.*

Semi-groupe compact

Définition 1.21 *Un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}$ pour $t > t_0$ est dit compact si pour chaque $t > t_0$ l'opérateur $T(t)$ est compact. $T(t)$ est dit compact s'il est compact pour $t > 0$.*

Notons que si $T(t)$ est compact pour $t \geq 0$, alors en particulier l'opérateur d'identité est compact et donc l'espace X est de dimension finie.

Remarque Si $T(t_0)$ est compact pour certains $t_0 > 0$ alors $T(t)$ est compact pour tout $t \geq t_0$, puisque $T(t) = T(t - t_0)T(t_0)$ est borné.

Théorème 1.6 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe, si $T(t)$ est compact pour $t > t_0$ alors $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est uniformément continue pour $t > t_0$.

Théorème 1.7 Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, $T(t)$ est un semi-groupe compact si, et seulement si :

- (1) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est uniformément continue pour $t > 0$
- (2) $R(\lambda, A)$ est compact pour $\lambda \in \rho(A)$.

Semi-groupe analytique

Il est possible d'étendre le domaine du paramètre t des semi-groupes $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ à des régions du plan complexe contenant l'intervalle $[0, \infty[$, appelées angles autour de la demi-droite réelle positive, notées :

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2, \theta_1 < 0 < \theta_2\}.$$

Définition 1.22 Soit Δ un secteur dans $\mathbb{C}$. On appelle semi-groupe analytique la famille d'opérateurs linéaires bornés $\{T(z), z \in \Omega\}$ satisfaisant les conditions suivantes :

- 1. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ pour tous $z_1, z_2 \in \Delta$.
- 2. $T(0) = I$, où I désigne l'opérateur identité.
- 3. Pour chaque $x \in X$, $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$ où $z \in \Delta$.
- 4. La fonction $z \mapsto T(z)$ est analytique dans Δ .

1.4 Théorème d'Ascoli

Définition 1.23 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite (f_n) est **équicontinue** si

$$\forall x, y \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |x - y| < \sigma \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Théorème 1.8 (Ascoli) Soit (E, d) un espace métrique compact, (F, δ) un espace métrique complet. Une partie $A \in \mathcal{C}(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si :

1. A est équicontinue, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall f \in A, d(x, y) < \sigma \implies \delta(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

2. Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact.

1.5 Intégrale de Bochner

L'intégrale de Bochner généralise la notion d'intégrale de Lebesgue pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Définition 1.24 (Fonction simple) Une fonction $u : \Omega \rightarrow X$ est dite simple (ou étagée), si elle est mesurable et s'il existe un nombre fini d'ensembles Lebesgue-mesurables $B_{i=1, \dots, n} \subset \Omega$ de mesure finie, deux à deux disjoints tels que, u prenne une valeur constante $b_i \in X$ sur chaque B_i pour $i = 1, \dots, n$ et u s'annule sur $B_n = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$. Il revient au même de dire que $u = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i}$, où χ_{B_i} est la fonction caractéristique de l'ensemble $B_i \subset \Omega$ et $b_n = 0$. On note $S(\Omega, X)$ l'ensemble des fonctions simples de Ω dans X .

Proposition 1.4 L'ensemble de fonctions simples $S(\Omega, X)$ est un espace vectoriel.

Définition 1.25 (fonction fortement mesurable) Une fonction $u : \Omega \rightarrow X$ est dite fortement mesurable s'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $S(\Omega, X)$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x) - u(x)\|_X = 0, \text{ pour p.p. } x \in \Omega.$$

Proposition 1.5 1. L'ensemble des fonctions fortement mesurables est un espace vectoriel.

2. Si $u : \Omega \rightarrow X$ est fortement mesurable alors la fonction

$$\|u\|_X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \|u(x)\|_X$$

est aussi fortement mesurable.

Définition 1.26 (Fonction Bochner-intégrable) Une fonction $u : \Omega \rightarrow X$ est dite Bochner-intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $S(\Omega, X)$ telle que $u_n(x) \rightarrow u(x)$ pour p.p. $x \in \Omega$ et $\int_{\Omega} \|u_n(x) - u(x)\|_X dx \rightarrow 0$. On note l'ensemble des fonctions Bochner-intégrables de Ω dans X par $\mathfrak{L}^1(\Omega, X)$. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possédant les propriétés citées dans la définition ci-dessus est dite suite approximante pour u .

Proposition 1.6 1. Une fonction $u : \Omega \rightarrow X$ est Bochner-intégrable ssi u est fortement mesurable et

$$\int_{\Omega} \|u(x)\|_X dx < \infty.$$

2. $\mathfrak{L}^1(\Omega, X)$ est un espace vectoriel.

Définition 1.27 Si $u \in \mathfrak{L}^1(\Omega, X)$, on définit

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) dx,$$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arbitraire de $S(\Omega, X)$ approximante pour u . La valeur $\int_{\Omega} u(x) dx$ s'appelle l'intégrale de Bochner de la fonction u .

Remarque. Lorsque $A \subset \Omega$ est Lebesgue -mesurable et $u \in \mathfrak{L}^1(\Omega, X)$, on définit

$$\int_A u(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \chi_A dx.$$

Proposition 1.7 1. Si $u \in \mathfrak{L}^1(\Omega, X)$, on a :

$$\left\| \int_{\Omega} u(x) dx \right\|_X \leq \int_{\Omega} \|u(x)\|_X dx.$$

2. L'intégrale de Bochner $\int : \mathfrak{L}^1(\Omega, X) \rightarrow X$ est une application linéaire.

3. Si A et B sont deux ensembles Lebesgue-mesurables disjoints de Ω , alors pour tout $u \in \mathfrak{L}^1(\Omega, X)$, on a

$$\int_{A \cup B} u(x) dx = \int_A u(x) dx + \int_B u(x) dx.$$

Définition 1.28 (Fonction de type Carathéodory) Une fonction $\varphi : [0, a] \times E \rightarrow E$ est dite continue au sens de Carathéodory si :

- (i) pour tout $u \in E$, $\varphi(\cdot, u)$ est fortement mesurable,
- (ii) pour presque tout $t \in [0, a]$, $\varphi(t, \cdot)$ est continue.

Remarque 1.9 Une fonction mesurable f de $[0, +\infty)$ vers E est intégrable au sens de Bochner si $\|f\|$ est intégrable au sens de Lebesgue.

1.6 Le calcul fractionnaire

Le concept de dérivée fractionnaire est apparu pour la première fois dans une célèbre correspondance entre G.A. de L'Hospital et G.W. Leibniz, en 1695. Beaucoup de mathématiciens ont développé ce domaine. Au cours des soixante dernières années, le calcul fractionnaire a joué un rôle très important dans divers domaines tels que la physique, la chimie, la mécanique, l'électricité, la biologie, l'économie, la théorie du contrôle, le traitement du signal et de l'image, la biophysique, les phénomènes de flux sanguin, l'aérodynamique, l'ajustement de données expérimentales, etc. Les modèles les plus importants sont ceux décrits par des équations différentielles contenant des dérivées d'ordre fractionnaire. De nouvelles théories et méthodes sont donc nécessaires pour développer spécifiquement ce domaine, dont l'étude devient plus difficile. Voir [5], [7], [9], [12], [13] et [18].

1.6.1 Fonctions utiles

La fonction Gamma

Définition 1.29 *On appelle fonction Gamma Eulérienne (ou intégrale Eulérienne de seconde espèce) la fonction notée Γ définie par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt,$$

où α est un nombre complexe quelconque tel que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$.

Proposition 1.8 *Nous avons la relation suivante :*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha).$$

En particulier, nous avons :

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.6.2 Intégrale fractionnaire

Définition 1.30 *L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $f \in C([a, b])$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est définie par :*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Proposition 1.9 *Nous avons les propriétés suivantes :*

1. $I^0 f(t) = f(t)$.
2. $I^\alpha I^\beta f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$.
3. L'opérateur intégral I^α est linéaire :

$$I^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I^\alpha f(t) + I^\alpha g(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

4. $\frac{d}{dt}(I^\alpha f)(t) = I^{\alpha-1} f(t)$.

Exemple 1.10 Soit $f(t) = (t - a)^m$ alors :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s) ds. \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} (t - a)^m ds. \end{aligned}$$

A l'aide du changement de variable $s = a + (t - a)x$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{(t - a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - x)^{\alpha-1} x^m dx. \\ &= \frac{(t - a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, m + 1). \\ &= \frac{(t - a)^{m+\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(m + 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + m + 1)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(\alpha + m + 1)} (t - a)^{m+\alpha}.$$

1.6.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire. Dans cette partie, nous allons citer celles qui sont les plus utilisées.

Définition 1.31 Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (avec $n - 1 \leq \alpha < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - s)^{n-\alpha-1} f(s) ds = \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-\alpha} f(t)) = D^n I^{n-\alpha} f(t).$$

Ici, $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

Propriétés

1. Composition avec l'intégrale fractionnaire

- i) L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire :

$${}^{RL}D_a^\alpha(I^\alpha f(t)) = f(t).$$

En général, on a :

$${}^{RL}D_a^{\alpha_1}(I^{\alpha_2} f(t)) = {}^{RL}D_a^{\alpha_1 - \alpha_2} f(t),$$

et si $\alpha_1 - \alpha_2 < 0$, ${}^{RL}D_a^{\alpha_1 - \alpha_2} f(t) = I^{\alpha_2 - \alpha_1} f(t)$.

- ii) En général, la dérivation et l'intégration fractionnaires ne commutent pas :

$${}^{RL}D^{-\alpha_1}({}^{RL}D_a^{\alpha_2} f(t)) = {}^{RL}D_a^{\alpha_2 - \alpha_1} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}^{RL}D_a^{\alpha_2 - k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha_1 - k}}{\Gamma(\alpha_1 - k + 1)},$$

avec $m - 1 \leq \alpha_2 < m$.

- 2. Composition avec les dérivées d'ordre entier** La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entier) ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$:

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}^{RL}D_a^\alpha f(t)) = {}^{RL}D_a^{n+\alpha} f(t),$$

mais

$${}^{RL}D_a^\alpha \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}^{RL}D_a^{n+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}.$$

3. Pour l'opérateur différentiel fractionnaire Riemann-Liouville, on a les propriétés suivantes :

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^{RL}D_a^\alpha f(t) = f^{(n)}(t), \quad \lim_{\alpha \rightarrow n-1} {}^{RL}D_a^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t).$$

4. **Linéarité.** La dérivation fractionnaire est une opération linéaire pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$${}^{RL}D_a^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^{RL}D_a^\alpha f(t) + {}^{RL}D_a^\alpha g(t).$$

5. **Non-commutativité** L'opérateur de Riemann-Liouville est non-commutatif :

$$D^\alpha D^m f(t) = D^{\alpha+m} f(t) \neq D^m D^\alpha f(t).$$

1.6.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.32 Pour une fonction donnée f sur l'intervalle $[a, b]$, la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo de f , d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :

$${}^C D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(s) ds,$$

où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

Propriétés

1. **Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville** On suppose que $n - 1 < \alpha < n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^C D^\alpha f(t)$ et ${}^{RL} D^\alpha f(t)$ existent. Alors :

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t - a)^{k - \alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)}.$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, on aura :

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha f(t).$$

2. **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire** Si f est une fonction continue, on a :

$${}^C D_a^\alpha I^\alpha f = f \quad \text{et} \quad (I_a^\alpha)({}^C D_a^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t - a)^k}{k!}.$$

Ainsi, l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, mais il n'est pas un inverse à droite.

3. **Non-commutativité** On suppose que $n - 1 < \alpha < n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^C D^\alpha f(t)$ existe. Alors :

$${}^C D_a^\alpha {}^C D_a^m f(t) = {}^C D_a^{\alpha+m} f(t) \neq ({}^C D_a^m)({}^C D_a^\alpha f(t)).$$

4. Pour $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(t)$ telle que ${}^C D_a^\alpha f(t)$ existe, on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D_a^\alpha f(t) = f^{(n)}(t), \quad \lim_{\alpha \rightarrow n-1} {}^C D_a^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).$$

5. **Linéarité** La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire.

Soit $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

$${}^C D_a^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^C D_a^\alpha f(t) + {}^C D_a^\alpha g(t).$$

Exemple 1.11 La différentiation de la fonction constante pour l'opérateur de Caputo est :

$${}^C D_a^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} c^{(n)} dx = 0.$$

Ainsi, ${}^C D_a^\alpha c = 0$ pour c constante. Pour Riemann-Liouville :

$${}^{RL} D_a^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \neq 0 \quad \text{pour } c \text{ constante.}$$

Lemme 1.1 Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle :

$${}^C D_a^\alpha f(t) = 0,$$

admet comme solution :

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$, ou :

$$f(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \dots + c_N t^{\alpha-N},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, $N = [\alpha] + 1$.

Proposition 1.10 Soit $f(t)$ définie sur $(0, \infty)$ et $0 < \alpha < 1$. Alors, la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire et de l'opérateur différentiel fractionnaire satisfait :

- (i) ${}_0 D_t^{-\alpha} f(s) = s^{-\alpha} \bar{f}(s)$;
- (ii) ${}_0 D_t^\alpha f(s) = s^\alpha \bar{f}(s) - ({}_0 D_t^{\alpha-1} f)(0)$;
- (iii) ${}^C D_t^{-\alpha} f(s) = s^\alpha \bar{f}(s) - s^{\alpha-1} f(0)$.

1.7 Mesure de non-compacité

Dans cette section, nous définissons les mesures les plus connues de non-compacité et rappelons brièvement certaines de leurs propriétés de base. Considérons E comme un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$. On note par M_E la famille de tous les sous-ensembles bornés non vides de E et par N_E sa sous-famille constituée de tous les ensembles relativement compacts. voir [11] et [17].

Définition 1.33 (Ensemble convexe) Soit E un espace vectoriel, et B une partie de E . B est convexe pour tous x et y de B , le segment $[x, y]$ est inclu dans B , c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in B \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda x + (1 - \lambda) y \in B.$$

Définition 1.34 (*Enveloppe convexe*) Soit E un espace vectoriel, et B une partie de E . L'enveloppe convexe de B , notée $\text{conv}(B)$ est l'intersection des parties convexes de contenant B . Elle est elle-même un convexe, et c'est le plus petit convexe contenant B .

Définition 1.35 On dit qu'une application $\mu : M_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une mesure de non-compacité dans E si elle satisfait aux conditions suivantes :

1. La famille $\ker \mu = \{X \in M_E \mid \mu(X) = 0\}$ est non vide et $\ker \mu \subset N_E$.
2. $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.
3. $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$.
4. $\mu(\text{Conv} X) = \mu(X)$.
5. $\mu(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1 - \lambda)\mu(Y)$ pour $\lambda \in [0, 1]$.
6. Si $\{X_n\}_{n \geq 1}$ est une suite imbriquée d'ensembles fermés de M_E telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0, \text{ alors l'ensemble d'intersection } X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \text{ est non vide.}$$

La famille $\ker \mu$ décrite dans 1 est appelée le noyau de la mesure de non-compacité μ . Notons que l'ensemble d'intersection X_∞ est un membre du noyau $\ker \mu$.

En effet, puisque $\mu(X_\infty) \leq \mu(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mu(X_\infty) = 0$. Cela implique $X_\infty \in \ker \mu$.

1.7.1 Propriétés supplémentaires

Dans la suite, nous allons utiliser des mesures de non-compacité ayant des propriétés supplémentaires. Une mesure est dite sous-linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

7. $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}$.
8. $\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$.

On dit qu'une mesure de non-compacité μ a la propriété maximale si :

9. $\mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\}$.

Une mesure de non-compacité sous-linéaire μ qui a le maximum et est telle que $\ker \mu = N_E$ est appelée une mesure régulière.

Proposition 1.11 Invariance sous translation : Soit X un ensemble borné,

$$\mu(X + x_0) = \mu(X), \quad \text{pour tout } x_0 \in E.$$

1.7.2 Mesure de Kuratowski

Définition 1.36 La mesure de non-compactité de Kuratowski d'un ensemble Ω , notée $\alpha(\Omega)$, est l'inf des nombres $d > 0$ tel que Ω admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre inférieur à d , c'est-à-dire :

$$\alpha(\Omega) = \inf \left\{ d > 0 \mid \Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i \text{ tel que } \delta(\Omega_i) \leq d \right\}.$$

La fonction α définie sur l'ensemble des sous-ensembles non vides et bornés de (X, d) est appelée mesure de non-compactité de Kuratowski.

Proposition 1.12 Soit Ω , Ω_1 et Ω_2 des sous-ensembles non vides et bornés d'un espace métrique (X, d) . Alors :

1. $\alpha(\Omega) = 0 \Leftrightarrow \overline{\Omega}$ est compact, où $\overline{\Omega}$ désigne la fermeture de Ω .
2. $\alpha(\Omega) = \overline{\alpha(\Omega)}$.
3. $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \alpha(\Omega_1) \leq \alpha(\Omega_2)$.
4. $\alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\}$.
5. $\alpha(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \min\{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\}$.

Proposition 1.13 Soit Ω , Ω_1 et Ω_2 des sous-ensembles non vides et bornés d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ sur $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors :

1. $\alpha(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1) + \alpha(\Omega_2)$.
2. $\alpha(\Omega + x) = \alpha(\Omega), \forall x \in X$.
3. $\alpha(\lambda\Omega) = |\lambda|\alpha(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{F}$.
4. $\alpha(\text{conv}\Omega) = \alpha(\Omega)$, où $\text{conv}(\Omega)$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble Ω .

1.7.3 Mesure de Hausdorff

En général, le calcul de la valeur exacte de $\alpha(\Omega)$ est difficile. Une autre mesure de non-compactité, plus applicable, est la mesure de non-compactité de Hausdorff. Elle est définie comme suit :

Définition 1.37 Soit (X, d) un espace métrique complet. La mesure de Hausdorff de la non-compactité d'un sous-ensemble non vide et borné Ω de X , notée $\chi(\Omega)$, est l'inf de tous les

nombres $\epsilon > 0$ tel que Ω puisse être couvert par un nombre fini de boules de rayons $< \epsilon$, c'est-à-dire :

$$\chi(\Omega) = \inf\{\epsilon > 0 \mid \Omega \subset \cup_{i=1}^n B(x_i; r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Remarque 1.12 Dans le cas où Ω est un sous-ensemble non vide et non borné, alors :

$$\alpha(\Omega) = \chi(\Omega) = \infty.$$

Théorème 1.13 Soient α et χ les mesures de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff, et Ω un sous-ensemble d'un espace de Banach E . Alors :

$$\chi(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\chi(\Omega).$$

Théorème 1.14 Soit E un espace de Banach, $B \subset C([a, b]; E)$ un sous-ensemble équicontinu et borné, où $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\chi(B) = \max_{t \in [a, b]} \chi\{(x(t) : x(\cdot) \in B)\}.$$

Remarque 1.15 Il est facile d'observer que la non-singularité découle directement de la régularité et la monotonie de la semi-additivité et la continuité de la lipschitzianité.

La mesure de non-compacité de Kuratowski ou de Hausdorff est invariante par le passage à la fermeture et l'enveloppe convexe, ce qu'affirme le théorème suivant :

Théorème 1.16 Soient γ une mesure de non-compacité (Kuratowski ou de Hausdorff) et Ω un sous-ensemble d'un espace de Banach E . Alors,

$$\gamma(\Omega) = \gamma(\overline{\Omega}) = \gamma(\text{Conv}\Omega),$$

où $\overline{\Omega}$ est la fermeture de Ω .

1.2.3 k -contraction d'ensemble

Définition 1.38 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue et bornée (i.e., f transforme les bornés de E en des bornés de F).

1. On dit que f est une k -contraction d'ensembles s'il existe $k \geq 0$, tel que,

$$\mu(f(\Omega)) < k\mu(\Omega), \quad \forall \Omega \in M_E.$$

2. f est appelée k -contraction stricte d'ensembles (ou contraction stricte d'ensembles) si :

$$0 \leq k < 1.$$

3. f est dite condensante si :

$$\mu(f(\Omega)) < \mu(\Omega),$$

pour tout Ω borné et non relativement compact ($\mu(\Omega) > 0$).

Remarque 1.17 Il est évident que toute application f complètement continue est une k -contraction stricte d'ensembles et toute k -contraction stricte d'ensembles est condensante. De plus, on a :

- f est condensante $\Rightarrow f$ est une 1-contraction d'ensembles ;
- f est complètement continue $\Leftrightarrow f$ est une 0-contraction d'ensembles.

Lemme 1.2 Soit D un sous-ensemble borné d'un espace de Banach X . Si $f : X \rightarrow X$ est une application de la forme $L + T$, où L est une application linéaire et T est complètement continue. Alors,

$$\alpha(f(D)) = \alpha[f(\text{conv}(D \cup \{\theta\}))].$$

Lemme 1.3 Soit C un sous-ensemble borné, fermé et convexe dans l'espace de Banach $C(J, E)$. Pour tout V de C borné et équicontinu, on a $\alpha(V(x))$ est continu et que

$$\alpha\left(\int_J V(x) dx\right) \leq \int_J \alpha(V(x)) dx.$$

Lemme 1.4 Si $V \subset C(J, E)$ est un ensemble borné et équicontinu, alors :

1. la fonction $v : t \mapsto \alpha(V(t))$ est continue sur J , et $\|v\| = \sup_{0 \leq t \leq T} \alpha(V(t))$;
- 2.

$$\alpha\left(\int_0^T x(s) ds : x \in V\right) \leq \int_0^T \alpha(V(s)) ds, \text{ où } V(s) = \{x(s) : x \in V\}, s \in J.$$

Lemme 1.5 Soit D un sous-ensemble borné, fermé et convexe de l'espace de Banach $C(J, X)$, G une fonction continue sur $J \times J$ et f une fonction de $J \times X \rightarrow X$ qui satisfait les conditions de Carathéodory. Supposons qu'il existe $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ tel que, pour chaque $t \in J$ et chaque ensemble borné $B \subset X$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mu(f(J_{t,h} \times B)) \leq p(t)\mu(B); \text{ ici } J_{t,h} = [t-h, t] \cap J.$$

Si V est un sous-ensemble équicontinu de D , alors

$$\mu\left(\left\{\int_J K(s, t)f(s, y(s)) ds : y \in V\right\}\right) \leq \int_J \|K(t, s)\|p(s)\mu(V(s)) ds.$$

Proposition 1.14 *Si $W \subset C(J, X)$ est borné et équicontinu, alors $\overline{\text{co}}W \subset C(J, X)$ est également borné et équicontinu.*

Proposition 1.15 *(Lakshmikantham, 1996), [6]. Si $W \subset C(J, X)$ est borné et équicontinu, alors $t \mapsto \alpha(W(t))$ est continue sur J , et*

$$\alpha(W) = \max_{t \in J} \alpha(W(t)), \quad \alpha \left(\int_0^t W(s) ds \right) \leq \int_0^t \alpha(W(s)) ds \quad \text{pour } t \in [0, a].$$

Proposition 1.16 *(Bothe, 1998) [11]. Si W est borné, alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(u_n)_{n \geq 1} \subset W$, telle que*

$$\alpha(W) \leq 2\alpha((u_n)_{n \geq 1}) + \varepsilon.$$

Proposition 1.17 *(Mönch, 1980)[11]. Soit $J = [0, a], a \in \mathbb{R}^+$. For any $WC(J, X)$, $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions Bochner intégrables de J dans X , avec $|u_n(t)| \leq m(t), t \in J, n \geq 1$, où $m \in L(J, \mathbb{R}^+)$. Alors la fonction $\phi(t) = \alpha((u_n)_{n \geq 1})$ appartient à l'espace $L(J, \mathbb{R}^+)$ et elle vérifie :*

$$\alpha \left(\int_0^t u_n(s) ds, n \geq 1 \right) \leq 2 \int_0^t \phi(s) ds.$$

1.8 Théorèmes fondamentaux du point fixe

Voir [1] et [14].

Définition 1.39 (Point fixe) *Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ une application. On dit que $x \in X$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.*

Théorème 1.18 (Théorème du point fixe de Banach) *Soit $M \subseteq E$ un sous ensemble fermé non vide de l'espace métrique complet (E, d) et $f : M \rightarrow M$ une application k -contractante, i.e : il existe $0 < k < 1$, tel que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$, pour tout $x, y \in M$. Alors f possède un unique point fixe dans M .*

Théorème 1.19 (Théorème du point fixe de Brouwer) *Soit C un ensemble non vide, fermé, borné et convexe de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, et $f : C \rightarrow C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C .*

Théorème 1.20 (Théorème du point fixe de Darbo-Sadovskii) *Soit E un espace vectoriel normé, C un convexe fermé non vide de E , et $T : C \rightarrow C$ une application continue. Si la mesure de non-compacté de $T(C)$ est inférieure à celle de C , alors T admet au moins un point fixe.*

Théorème 1.21 (Théorème du point fixe de Schauder) *Soit C un ensemble non vide compact et convexe d'un espace de Banach E et $f : C \rightarrow C$ une application continue. Alors f possède, au moins un point fixe.*

Théorème 1.22 (Théorème du point fixe d'O'Regan) *Soit U un ensemble ouvert dans un ensemble fermé et convexe C de X . On suppose que $0 \in U$, que $T(\overline{U})$ est borné et que $T : \overline{U} \rightarrow C$ est définie par $T = T_1 + T_2$, où $T_1 : \overline{U} \rightarrow X$ est complètement continue, et $T_2 : \overline{U} \rightarrow X$ est une contraction non linéaire. Alors, soit :*

- (i) *T admet un point fixe dans $\overline{U}$, ou bien*
- (ii) *il existe un point $x \in \partial U$ et $\lambda \in (0, 1)$ tels que $x = \lambda T(x)$.*

Chapitre 2

Problème de Cauchy autonome pour une équation d'évolution d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville

2.1 Équation d'évolution abstraite avec dérivée de Riemann-Liouville

2.1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de Cauchy non local pour les équations d'évolution fractionnaires avec dérivée de Riemann-Liouville en considérant une équation intégrale donnée en termes de densité de probabilité. En utilisant la théorie de la mesure de non-compacité de Hausdorff, nous établissons divers théorèmes d'existence de solutions intégrales pour le problème de Cauchy (2.1) dans deux cas différents où le C_0 -semigroupe est compact ou non compact. Cette étude est basée sur un problème présenté dans [17].

2.1.2 Le problème posé

Supposons que X est un espace de Banach avec la norme $|\cdot|$. Soient $a \in \mathbb{R}^+$, $J = [0, a]$ et $J' = (0, a]$. On note $C(J, X)$ l'espace de Banach des fonctions continues de J dans X avec la norme

$$\|x\| = \sup_{t \in [0, a]} |x(t)|,$$

où $x \in C(J, X)$, et $B(X)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés de X dans X avec la norme $\|Q\|_{B(X)} = \sup\{|Q(x)| : |x| = 1\}$, où $Q \in B(X)$ et $x \in X$. Considérons le problème de Cauchy non local suivant, pour une équation d'évolution fractionnaire avec dérivée de Riemann-Liouville :

$$\begin{cases} {}^{RL}D_0^q x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \text{ p.p. } t \in [0, a], \\ {}^{RL}D_0^{q-1} x(0) + g(x) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où ${}^{RL}D_0^q$ est la dérivée de Riemann-Liouville d'ordre q , ${}^{RL}D_0^{q-1}$ est l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $1-q$, $0 < q < 1$, A est le générateur infinitésimal d'un semigroupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés (c'est-à-dire un C_0 -semigroupe) $\{Q(t)\}_{t \geq 0}$ dans l'espace de Banach X , $f : J \times X \rightarrow X$ est une fonction donnée, $g : C(J, X) \rightarrow L(J, X)$ est un opérateur donné satisfaisant certaines hypothèses, et x_0 est un élément de l'espace de Banach X . L'équation de diffusion fractionnaire en temps est obtenue à partir de l'équation de diffusion standard en remplaçant la dérivée première en temps par une dérivée fractionnaire d'ordre $q \in (0, 1)$, à savoir

$$\partial_t^q u(z, t) = Au(z, t), \quad t \geq 0, \quad z \in \mathbb{R}.$$

On peut prendre $A = \partial_z^{\beta_1}$, pour $\beta_1 \in (0, 1]$, ou $A = \partial_z + \partial_z^{\beta_2}$ pour $\beta_2 \in (1, 2]$, où $\partial_t^q, \partial_z^{\beta_1}, \partial_z^{\beta_2}$ sont les dérivées fractionnaires d'ordre q, β_1, β_2 respectivement. Les conditions non locales ${}^{RL}D_0^{q-1} x(0) + g(x) = x_0$ et $x(0) + g(x) = x_0$ peuvent être appliquées en physique avec un meilleur effet que les conditions initiales classiques ${}^{RL}D_0^{q-1} x(0) = x_0$ et $x(0) = x_0$ respectivement, Voir [1], [2]. Par exemple, $g(x)$ peut être donné par

$$g(x) = \sum_{i=1}^m c_i x(t_i),$$

où c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont des constantes données et $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq a$. Les conditions non locales ont été initiées par Byszewski, 1991, qui a prouvé l'existence et l'unicité des solutions intégrales et classiques pour les problèmes de Cauchy non locaux. Comme le remarquent Byszewski et Lakshmikantham, 1991, la condition non locale peut être plus utile que la condition initiale pour décrire certains phénomènes physiques. Les définitions et lemmes suivantes sont nécessaires pour notre travail.

Définition 2.1 [11]. La fonction de Wright $M_q(\varrho)$ est définie par

$$M_q(\varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varrho)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(1-qn)}, \quad 0 < q < 1, \quad \varrho \in \mathbb{C}.$$

Il est connu que $M_q(\varrho)$ satisfait l'égalité suivante (voir Monch, 1980) :

$$\int_0^\infty \theta^\delta M_q(\theta) d\theta = \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+q\delta)}, \quad \text{pour } \delta \geq 0.$$

Lemme 2.1 [11]

(i) Soient $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ tels que $\eta > -1$. Si $t > 0$, alors

$${}^{RL}D_0^{-\xi} \frac{t^\eta}{\Gamma(\eta+1)} = \begin{cases} \frac{t^{\xi+\eta}}{\Gamma(\xi+\eta+1)}, & \text{si } \xi + \eta \neq -n \\ 0, & \text{si } \xi + \eta = -n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(ii) Soient $\xi > 0$ et $\varphi \in L((0, a), X)$. Définissons

$$G_\xi(t) = {}^{RL}D_0^{-\xi} \varphi, \quad \text{pour } t \in (0, a),$$

alors

$${}^{RL}D_0^{-\eta} G_\xi(t) = {}^{RL}D_0^{-(\xi+\eta)} \varphi(t), \quad \eta > 0, \quad \text{presque partout } t \in [0, a].$$

Lemme 2.2 Le problème de Cauchy non local (2.1) est équivalent à l'équation intégrale

$$x(t) = \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)} (x_0 - g(x)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} [Ax(s) + f(s, x(s))] ds, \quad \text{pour } t \in (0, a]. \quad (2.2)$$

à condition que l'intégrale dans (2.2) existe.

Preuve. Supposons que (2.2) est vraie, alors

$${}^{RL}D_0^{q-1} x(t) = {}^{RL}D_0^{q-1} x(t)^{q-1} \left(\frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)} (x_0 - g(x)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} [Ax(\tau) + f(\tau, x(\tau))] d\tau \right),$$

en appliquant le Lemme ??, nous obtenons que

$${}^{RL}D_0^{q-1} x(t) = x_0 - g(x) + \int_0^t [Ax(s) + f(s, x(s))] ds, \quad \text{presque partout } t \in [0, a],$$

et cela prouve que ${}^{RL}D_0^{q-1} x(t)$ est absolument continue sur $[0, a]$. Alors nous obtenons

$${}^{RL}D_0^q x(t) = \frac{d}{dt} {}^{RL}D_0^{q-1} x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad \text{presque partout } t \in [0, a]$$

et

$${}^{RL}D_0^{q-1} x(0) + g(x) = x_0.$$

Réciproquement, supposons que (2.1) est vraie, alors

$${}^{RL}D_0^{-q}({}^{RL}D_0^q x(t)) = {}^{RL}D_0^{-q}(Ax(t) + f(t, x(t))).$$

Puisque

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_0^{-q}({}^{RL}D_0^q x(t)) &= x(t) - \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)} {}^{RL}D_0^{q-1}x(0) \\ &= x(t) - \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)}(x_0 - g(x)), \text{ pour } t \in (0, a], \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)}(x_0 - g(x)) + {}^{RL}D_0^{-q}(Ax(t) + f(t, x(t))) \\ &= \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)}(x_0 - g(x)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} [Ax(s) + f(s, x(s))] ds, \text{ pour } t \in (0, a]. \end{aligned}$$

■ Avant de donner la définition de la solution intégrale de (2.1), d'abord nous prouvons le résultat suivant.

Lemme 2.3 *Si*

$$x(t) = \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)}(x_0 - g(x)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} [Ax(s) + f(s, x(s))] ds, \text{ pour } t > 0 \quad (2.3)$$

est vérifiée, alors nous avons

$$x(t) = t^{q-1} P_q(t)(x_0 - g(x)) + \int_0^t (t-s)^{q-1} P_q(t-s) f(s, x(s)) ds, \text{ pour } t > 0, \quad (2.4)$$

où

$$P_q(t) = \int_0^\infty q\theta M_q(\theta) Q(t^q\theta) d\theta.$$

Preuve. Soit $\lambda > 0$. En appliquant la transformée de Laplace

$$\nu(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} x(s) ds \quad \text{et} \quad \omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(s, x(s)) ds, \quad \text{pour } \lambda > 0$$

à (2.3), nous avons

$$\begin{aligned} \nu(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^q}(x_0 - g(x)) + \frac{1}{\lambda^q} A\nu(\lambda) + \frac{1}{\lambda^q} \omega(\lambda) \\ &= (\lambda^q I - A)^{-1}(x_0 - g(x)) + (\lambda^q I - A)^{-1} \omega(\lambda) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} Q(s)(x_0 - g(x)) ds + \int_0^\infty e^{-\lambda s} Q(s) \omega(\lambda) ds, \end{aligned} \quad (2.5)$$

à condition que les intégrales dans (2.5) existent, où I est l'opérateur identité défini sur X .
Posons

$$\psi_q(\theta) = \frac{q}{\theta^{q+1}} M_q(\theta^{-q}),$$

dont la transformée de Laplace est donnée par

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\theta} \psi_q(\theta) d\theta = e^{-\lambda^q}, \quad \text{où } q \in (0, 1). \quad (2.6)$$

En utilisant (2.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda^q s} Q(s)(x_0 - g(x)) ds &= \int_0^\infty q t^{q-1} e^{-(\lambda t)^q} Q(t^q)(x_0 - g(x)) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty q \psi_q(\theta) e^{-(\lambda t \theta)} Q(t^q) t^{q-1} (x_0 - g(x)) d\theta dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty q \psi_q(\theta) e^{-\lambda t} Q\left(\frac{t^q}{\theta^q}\right) \frac{t^{q-1}}{\theta^q} (x_0 - g(x)) d\theta dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[q \int_0^\infty \psi_q(\theta) Q\left(\frac{t^q}{\theta^q}\right) \frac{t^{q-1}}{\theta^q} (x_0 - g(x)) d\theta \right] dt, \end{aligned} \quad (2.7)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda^q s} Q(s) \omega(\lambda) ds &= \int_0^\infty \int_0^\infty q t^{q-1} e^{-(\lambda t)^q} Q(t^q) e^{-\lambda s} f(s, x(s)) ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q \psi_q(\theta) e^{-(\lambda t \theta)} Q(t^q) e^{-\lambda s} t^{q-1} f(s, x(s)) d\theta ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q \psi_q(\theta) e^{-\lambda(t+s)} Q\left(\frac{t^q}{\theta^q}\right) \frac{t^{q-1}}{\theta^q} f(s, x(s)) d\theta ds dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[q \int_0^t \int_0^\infty \psi_q(\theta) Q\left(\frac{(t-s)^q}{\theta^q}\right) \frac{(t-s)^{q-1}}{\theta^q} f(s, x(s)) d\theta ds \right] dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

D'après (2.7) et (2.8), nous avons

$$\begin{aligned} \nu(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[q \int_0^\infty \psi_q(\theta) Q\left(\frac{t^q}{\theta^q}\right) \frac{t^{q-1}}{\theta^q} (x_0 - g(x)) d\theta \right. \\ &\quad \left. + q \int_0^t \int_0^\infty \psi_q(\theta) Q\left(\frac{(t-s)^q}{\theta^q}\right) \frac{(t-s)^{q-1}}{\theta^q} f(s, x(s)) d\theta ds \right] dt. \end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons inverser la dernière transformée de Laplace pour obtenir

$$\begin{aligned} x(t) &= q \int_0^\infty \theta t^{q-1} M_q(\theta) Q(t^q \theta) (x_0 - g(x)) d\theta + q \int_0^t \int_0^\infty \theta (t-s)^{q-1} M_q(\theta) Q((t-s)^q \theta) f(s, x(s)) d\theta ds \\ &= t^{q-1} P_q(t)(x_0 - g(x)) + \int_0^t (t-s)^{q-1} P_q(t-s) f(s, x(s)) ds. \end{aligned}$$

■

D'après le lemme 2.3, nous avons la définition suivante de la solution intégrale de (2.1).

Définition 2.2 On appelle solution intégrale du problème de Cauchy non local (2.1), toute fonction $x \in C(J', X)$ vérifiant

$$x(t) = t^{q-1} P_q(t)(x_0 - g(x)) + \int_0^t (t-s)^{q-1} P_q(t-s) f(s, x(s)) ds, \text{ pour } t \in (0, a].$$

Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{Q(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires uniformément bornés sur l'espace de Banach X . Alors il existe $M > 1$ tel que

$$M = \sup_{t \in [0, \infty)} \|Q(t)\|_{B(X)} < \infty.$$

Proposition 2.1 [18]. Pour tout $t > 0$ fixé, $P_q(t)$ est un opérateur linéaire borné, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$,

$$|P_q(t)x| \leq \frac{M}{\Gamma(q)} |x|.$$

Proposition 2.2 [18]. L'opérateur $\{P_q(t)\}_{t > 0}$ est fortement continu, ce qui signifie que, pour tout $x \in X$ et $0 < t' < t'' \leq a$, nous avons

$$|P_q(t'')x - P_q(t')x| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t'' \rightarrow t'.$$

Proposition 2.3 Supposons que $\{Q(t)\}_{t > 0}$ est un opérateur compact. Alors $\{P_q(t)\}_{t > 0}$ est également un opérateur compact.

Proposition 2.4 Supposons que $\{Q(t)\}_{t > 0}$ est un opérateur compact. Alors $\{Q(t)\}_{t > 0}$ est équicontinu.

Avant de donner les hypothèses de notre travail, nous définissons

$$X^{(q)}(J') = \left\{ x \in C(J', X) : \lim_{t \rightarrow 0+} t^{1-q} x(t) \text{ existe et est fini} \right\}.$$

Pour tout $x \in X^{(q)}(J')$, soit la norme $\|\cdot\|_q$ définie par

$$\|x\|_q = \sup_{t \in (0, a]} \{t^{1-q} |x(t)|\}.$$

Alors $(X^{(q)}(J'), \|\cdot\|_q)$ est un espace de Banach. Pour $r > 0$, définissons un sous-ensemble fermé $B_r^{(q)}(J') \subset X^{(q)}(J')$ comme suit

$$B_r^{(q)}(J') = \{x \in X^{(q)}(J') : \|x\|_q \leq r\}.$$

Alors, $B_r^{(q)}(J')$ est un sous-ensemble borné, fermé et convexe de $X^{(q)}(J')$. Soit $B(J)$ la boule fermée de l'espace $C(J, X)$ de rayon r et centrée en 0, c'est-à-dire :

$$B(J) = \{y \in C(J, X) : \|y\| \leq r\}.$$

Ainsi, $B(J)$ est un sous-ensemble borné, fermé et convexe de $C(J, X)$.

Nous introduisons **les hypothèses suivantes** :

(H0) $Q(t)(t > 0)$ est équicontinu, c'est-à-dire que $Q(t)$ est continu dans la topologie uniforme des opérateurs pour $t > 0$;

(H1) pour chaque $t \in J'$, la fonction $f(t, \cdot) : X \rightarrow X$ est continue et pour chaque $x \in X$, la fonction $f(\cdot, x) : J' \rightarrow X$ est fortement mesurable ;

(H2) il existe une fonction $m \in L(J', \mathbb{R}^+)$ telle que :

$${}^{RL}D_0^{-q}m \in C(J', \mathbb{R}^+), \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-q}({}^{RL}D_0^{-q}m(t)) = 0,$$

et

$$|f(t, x)| \leq m(t) \text{ pour tout } x \in B_r^{(q)}(J') \text{ et presque tout } t \in [0, a];$$

(H3) il existe une constante $L \in (0, \frac{\Gamma(q)}{M})$ telle que l'opérateur $g : C(J', X) \rightarrow L(J', X)$ satisfait :

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq L\|x_1 - x_2\|_q, \text{ pour } x_1, x_2 \in B_r^{(q)}(J');$$

(H4) il existe une constante $r > 0$ telle que :

$$\frac{M}{\Gamma(q) - ML} \left(|x_0| + |g(0)| + \sup_{t \in (0, a]} \left\{ t^{1-q} \int_0^t (t-s)^{q-1} m(s) ds \right\} \right) \leq r;$$

(H3)' l'opérateur $g : C(J', X) \rightarrow L(J', X)$ est une application continue et compacte, et il existe des constantes positives L_1, L_2 telles que $L_1 \in (0, \frac{\Gamma(q)}{M})$ et $|g(x)| \leq L_1\|x\|_q + L_2$ pour tout $x \in B_r^{(q)}(J')$;

(H4)' il existe une constante $r > 0$ telle que :

$$\frac{M}{\Gamma(q) - ML_1} \left(|x_0| + L_2 + \sup_{t \in (0, a]} \left\{ t^{1-q} \int_0^t (t-s)^{q-1} m(s) ds \right\} \right) \leq r.$$

2.2 Résultats principaux d'existence des solutions

Avant de montrer les résultats d'existence des solutions du problème de Cauchy, nous présentons quelques lemmes de base.

2.2.1 Lemmes préliminaires

Pour tout $x \in B_r^{(q)}(J')$, définissons un opérateur T comme suit :

$$(Tx)(t) = (T_1x)(t) + (T_2x)(t),$$

où

$$\begin{aligned} (T_1x)(t) &= t^{q-1}P_q(t)(x_0 - g(x)), \text{ pour } t \in (0, a], \\ (T_2x)(t) &= \int_0^t (t-s)^{q-1}P_q(t-s)f(s, x(s))ds, \text{ pour } t \in (0, a]. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$\lim_{t \rightarrow 0+} t^{1-q}(Tx)(t) = \frac{x_0 - g(x)}{\Gamma(q)}.$$

Pour tout $y \in B(J)$, posons :

$$x(t) = t^{q-1}y(t), \text{ pour } t \in (0, a].$$

Alors, $x \in B_r^{(q)}(J')$. Définissons l'opérateur Ψ comme suit :

$$(\Psi y)(t) = (\Psi_1y)(t) + (\Psi_2y)(t),$$

où

$$\begin{aligned} (\Psi_1y)(t) &= \begin{cases} t^{1-q}(T_1x)(t), & \text{pour } t \in (0, a], \\ \frac{x_0 - g(x)}{\Gamma(q)}, & \text{pour } t = 0, \end{cases} \\ (\Psi_2y)(t) &= \begin{cases} t^{1-q}(T_2x)(t), & \text{pour } t \in (0, a], \\ 0, & \text{pour } t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Évidemment, x est une solution integrale de (2.1) dans $B_r^{(q)}(J')$ si et seulement si l'équation d'opérateur $x = Tx$ a une solution $x \in B_r^{(q)}(J')$. Avant de donner les résultats principaux, nous démontrons les lemmes suivants nécessaires pour notre travail.

Lemme 2.4 *Si les hypothèses (H0)-(H4) sont satisfaites, alors l'ensemble $\{\Psi y : y \in B(J)\}$ est équicontinu.*

Preuve. Étape I. Montrons que l'ensemble $\{\Psi_1y : y \in B(J)\}$ est équicontinu.

Pour tout $y \in B(J)$, soit $x(t) = t^{q-1}y(t)$, $t \in (0, a]$. Alors $x \in B_r^{(q)}(J')$.

Pour $t_1 = 0$, $0 < t_2 \leq a$, nous obtenons :

$$|(\Psi_1y)(t_2) - (\Psi_1y)(0)| \leq \left| P_q(t_2)(x_0 - g(x)) - \frac{x_0 - g(x)}{\Gamma(q)} \right|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left| \left(P_q(t_2) - \frac{1}{\Gamma(q)} \right) (x_0 - g(x)) \right| \\
 &\leq \left| \left(P_q(t_2) - \frac{1}{\Gamma(q)} \right) \right| (|x_0| + L\|x\|_q + |g(0)|) \\
 &\leq \left| \left(P_q(t_2) - \frac{1}{\Gamma(q)} \right) \right| (|x_0| + Lr + |g(0)|) \\
 &\rightarrow 0, \text{ quand } t_2 \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Pour $0 < t_1 < t_2 \leq a$, nous avons

$$\begin{aligned}
 |(\Psi_1 y)(t_2) - (\Psi_1 y)(t_1)| &\leq |P_q(t_2)(x_0 - g(x)) - P_q(t_1)(x_0 - g(x))| \\
 &\leq |(P_q(t_2) - P_q(t_1))(x_0 - g(x))| \\
 &\leq |(P_q(t_2) - P_q(t_1))| (|x_0| + L\|x\|_q + |g(0)|) \\
 &\leq |(P_q(t_2) - P_q(t_1))| (|x_0| + Lr + |g(0)|) \\
 &\rightarrow 0, \text{ quand } t_2 \rightarrow t_1.
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble $\{\Psi_1 y : y \in B(J)\}$ est équicontinu.

Étape II. Montrons que l'ensemble $\{\Psi_2 y : y \in B(J)\}$ est équicontinu.

Pour tout $y \in B(J)$, soit $x(t) = t^{q-1}y(t)$, $t \in (0, a]$. Alors $x \in B_r^{(q)}(J')$.

Pour $t_1 = 0$, $0 < t_2 \leq a$, nous avons

$$\begin{aligned}
 |(\Psi_2 y)(t_2) - (\Psi_2 y)(0)| &= \left| t_2^{1-q} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} P_q(t_2 - s) f(s, x(s)) ds \right| \\
 &\leq \frac{M}{\Gamma(q)} t_2^{1-q} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} m(s) ds \rightarrow 0, \text{ quand } t_2 \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Pour $0 < t_1 < t_2 \leq a$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 |(\Psi_2 y)(t_2) - (\Psi_2 y)(t_1)| &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} t_2^{1-q} (t_2 - s)^{q-1} P_q(t_2 - s) f(s, x(s)) ds \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^{t_1} t_2^{1-q} (t_2 - s)^{q-1} P_q(t_2 - s) f(s, x(s)) ds \right| \\
 &\quad - \left| \int_0^{t_1} t_1^{1-q} (t_1 - s)^{q-1} P_q(t_2 - s) f(s, x(s)) ds \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^{t_1} t_1^{1-q} (t_1 - s)^{q-1} P_q(t_2 - s) f(s, x(s)) ds \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left| \int_0^{t_1} t_1^{1-q} (t_1 - s)^{q-1} P_q(t_1 - s) f(s, x(s)) ds \right| \\
 & \leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left| \int_{t_1}^{t_2} t_2^{1-q} (t_2 - s)^{q-1} m(s) ds \right| \\
 & + \frac{M}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} [t_1^{1-q} (t_1 - s)^{q-1} - t_2^{1-q} (t_2 - s)^{q-1}] m(s) ds \\
 & + \left| \int_0^{t_1} t_1^{1-q} (t_1 - s)^{q-1} [P_q(t_2 - s) f(s, x(s)) - P_q(t_1 - s) f(s, x(s))] ds \right| \\
 & \leq I_1 + I_2 + I_3,
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{M}{\Gamma(q)} \left| \int_0^{t_2} t_2^{1-q} (t_2 - s)^{q-1} m(s) ds - \int_0^{t_1} t_1^{1-q} (t_1 - s)^{q-1} m(s) ds \right|, \\
 I_2 &= \frac{2M}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} [t_1^{1-q} (t_1 - s)^{q-1} - t_2^{1-q} (t_2 - s)^{q-1}] m(s) ds, \\
 I_3 &= \left| \int_0^{t_1} t_1^{1-q} (t_1 - s)^{q-1} [P_q(t_2 - s) - P_q(t_1 - s)] f(s, x(s)) ds \right|.
 \end{aligned}$$

On peut déduire que $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} I_1 = 0$, puisque ${}^{RL}D_0^{-q}m \in C(J', \mathbb{R}^+)$.

En notant que :

$$[t_1^{1-q} (t_1 - s)^{q-1} - t_2^{1-q} (t_2 - s)^{q-1}] m(s) \leq t_1^{1-q} (t_1 - s)^{q-1} m(s),$$

et que $\int_0^{t_1} t_1^{1-q} (t_1 - s)^{q-1} m(s) ds$ existe ($s \in [0, t_1]$), alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons :

$$\int_0^{t_1} [t_1^{1-q} (t_1 - s)^{q-1} - t_2^{1-q} (t_2 - s)^{q-1}] m(s) ds \rightarrow 0, \text{ quand } t_2 \rightarrow t_1.$$

Nous déduisons que $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} I_2 = 0$.

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, nous avons

$$\begin{aligned}
 I_3 &\leq \int_0^{t_1-\varepsilon} t_1^{1-q}(t_1-s)^{q-1} \|P_q(t_2-s) - P_q(t_1-s)\|_{B(X)} |f(s, x(s))| ds \\
 &\quad + \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} t_1^{1-q}(t_1-s)^{q-1} \|P_q(t_2-s) - P_q(t_1-s)\|_{B(X)} |f(s, x(s))| ds \\
 &\leq t_1^{1-q} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{q-1} m(s) ds \sup_{s \in [0, t_1-\varepsilon]} \|P_q(t_2-s) - P_q(t_1-s)\|_{B(X)} \\
 &\quad + \frac{2M}{\Gamma(q)} \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} t_1^{1-q}(t_1-s)^{q-1} m(s) ds \\
 &\leq I_{31} + I_{32} + I_{33},
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 I_{31} &= \frac{r\Gamma(q)}{M} \sup_{s \in [0, t_1-\varepsilon]} \|P_q(t_2-s) - P_q(t_1-s)\|_{B(X)}, \\
 I_{32} &= \frac{2M}{\Gamma(q)} \left| \int_0^{t_1} t_1^{1-q}(t_1-s)^{q-1} m(s) ds - \int_0^{t_1-\varepsilon} (t_1-\varepsilon)^{1-q}(t_1-\varepsilon-s)^{q-1} m(s) ds \right|, \\
 I_{33} &= \frac{2M}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1-\varepsilon} [(t_1-\varepsilon)^{1-q}(t_1-\varepsilon-s)^{q-1} - t_1^{1-q}(t_1-s)^{q-1}] m(s) ds.
 \end{aligned}$$

D'après **(H0)**, il résulte $I_{31} \rightarrow 0$ lorsque $t_2 \rightarrow t_1$. De manière similaire à la preuve que I_1, I_2 tendent vers zéro, nous obtenons $I_{32} \rightarrow 0$ et $I_{33} \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Ainsi, I_3 tend vers zéro indépendamment de $y \in B(J)$ lorsque $t_2 \rightarrow t_1$ et $\varepsilon \rightarrow 0$. Par conséquent, $|\Psi_{2y}(t_2) - (\Psi_{2y})(t_1)|$ tend vers zéro indépendamment de $y \in B(J)$ lorsque $t_2 \rightarrow t_1$, ce qui signifie que $\Psi_y : y \in B(J)\}$ est équicontinu. Ainsi, $\Psi_y : y \in B(J)\}$ est équicontinu. 1 ■

Lemme 2.5 *Supposons que **(H1)**-**(H4)** soient vérifiées. Alors Ψ envoie $B(J)$ dans $B(J)$, et Ψ est continu dans $B(J)$.*

Preuve. Étape I. Ψ envoie $B(J)$ dans $B(J)$. Pour tout $y \in B(J)$, posons $x(t) = t^{q-1}y(t)$. Alors $x \in B_r^{(q)}(J')$. Pour $t \in [0, a]$, en utilisant **(H1)**-**(H4)**, nous avons

$$\begin{aligned}
 |(\Psi y)(t)| &\leq |P_q(t)(x_0 - g(x))| + t^{1-q} \left| \int_0^t (t-s)^{q-1} P_q(t-s) f(s, x(s)) ds \right| \\
 &\leq \frac{M}{\Gamma(q)} (|x_0| + L\|x\|_q + |g(0)|) + \frac{Mt^{1-q}}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} |f(s, x(s))| ds \\
 &\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left(|x_0| + Lr + |g(0)| + \sup_{t \in [0, a]} \left\{ t^{1-q} \int_0^t (t-s)^{q-1} m(s) ds \right\} \right) \leq r.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\|\Psi y\| \leq r$ pour tout $y \in B(J)$.

Étape II. Ψ est continu dans $B(J)$.

Pour tout $y_m, y \in B(J)$, $m = 1, 2, \dots$, avec $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = y$, nous avons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t) = y(t) \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} t^{q-1} y_m(t) = t^{q-1} y(t), \quad \text{pour } t \in (0, a].$$

Alors, par (H1), nous avons

$$f(t, x_m(t)) = f(t, t^{q-1} y_m(t)) \rightarrow f(t, t^{q-1} y(t)) = f(t, x(t)), \quad \text{lorsque } m \rightarrow \infty,$$

où $x_m(t) = t^{q-1} y_m(t)$ et $x(t) = t^{q-1} y(t)$.

D'une part, en utilisant **(H2)**, nous obtenons pour chaque $t \in J'$,

$$(t-s)^{q-1} |f(s, x_m(s)) - f(s, x(s))| \leq (t-s)^{q-1} 2m(s), \quad \text{presque partout dans } [0, t].$$

D'autre part, la fonction $s \mapsto (t-s)^{q-1} 2m(s)$ est intégrable pour $s \in [0, t]$ et $t \in J$.

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue, permet d'obtenir

$$\int_0^t (t-s)^{q-1} |f(s, x_m(s)) - f(s, x(s))| ds \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } m \rightarrow \infty.$$

Pour $t \in [0, a]$,

$$\begin{aligned} |(\Psi y_m)(t) - (\Psi y)(t)| &= |t^{1-q}(Tx_m(t) - Tx(t))| \\ &\leq |P_q(t)(g(x_m) - g(x))| \\ &\quad + t^{1-q} \left| \int_0^t (t-s)^{q-1} P_q(t-s)(f(s, x_m(s)) - f(s, x(s))) ds \right| \\ &\leq \frac{ML}{\Gamma(q)} \|x_m - x\|_q + \frac{Mt^{1-q}}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} |f(s, x_m(s)) - f(s, x(s))| ds \\ &\leq \frac{ML}{\Gamma(q)} \|y_m - y\| + \frac{Mt^{1-q}}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} |f(s, x_m(s)) - f(s, x(s))| ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\Psi y_m \rightarrow \Psi y$ sur J lorsque $m \rightarrow \infty$. D'après le lemme 2.5, cela implique que $\Psi y_m \rightarrow \Psi y$ uniformément sur J lorsque $m \rightarrow \infty$, et donc Ψ est continu. ■

Lemme 2.6 *Supposons que **(H0)**-**(H2)**, **(H3)'** et **(H4)'** soient vérifiées. Alors l'ensemble $\{\Psi y : y \in B(J)\}$ est équicontinu.*

Preuve. Pour tout $y \in B(J)$, si $t_1 = 0$ et $0 < t_2 \leq a$, alors

$$\begin{aligned} |(\Psi y)(t_2) - (\Psi y)(0)| &\leq \left| P_q(t_2)(x_0 - g(x)) - \frac{x_0 - g(x)}{\Gamma(q)} \right| + \left| t_2^{1-q} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{q-1} P_q(t_2-s) f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \left| P_q(t_2)(x_0 - g(x)) - \frac{x_0 - g(x)}{\Gamma(q)} \right| + \frac{M}{\Gamma(q)} t_2^{1-q} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{q-1} m(s) ds \rightarrow 0, \end{aligned}$$

lorsque $t_2 \rightarrow 0$.

Pour tout $y \in B(J)$ et $0 < t_1 < t_2 \leq a$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |(\Psi y)(t_2) - (\Psi y)(t_1)| &\leq |(\Psi y)(t_2) - (\Psi_1 y)(t_1)| + |(\Psi_2 y)(t_2) - (\Psi_2 y)(t_1)| \\ &\leq |(P_q(t_2) - P_q(t_1))(x_0 - g(x))| + I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

où I_1, I_2 et I_3 sont définis comme dans la preuve du Lemme 2.5. D'après la Proposition 2.2, nous savons que $|(\Psi y)(t_2) - (\Psi y)(t_1)|$ tend vers zéro indépendamment de $y \in B(J)$ lorsque $t_2 \rightarrow t_1$. Donc $\{\Psi y : y \in B(J)\}$ est équicontinu. ■

Lemme 2.7 *Supposons que (H1), (H2), (H3)' et (H4)' soient vérifiées. Alors Ψ envoie $B(J)$ dans $B(J)$, et Ψ est continu dans $B(J)$.*

Preuve. Pour tout $y \in B(J)$, nous avons

$$|(\Psi y)(t)| \leq \frac{|x_0| + L_1 r + L_2}{\Gamma(q)} \leq r, \quad \text{pour } t = 0$$

et

$$|(\Psi y)(t)| = t^{1-q} |(Tx)(t)| \leq r, \quad \text{pour } t \in (0, a].$$

Ainsi, $\|\Psi y\|_B \leq r$ pour tout $y \in B(J)$. Par un argument similaire à celui de la preuve du Lemme 2.5, nous montrons que Ψ est continu dans $B(J)$. ■

Pour montrer les résultats d'existence des solutions, nous considérons **deux cas possibles** :

2.2.2 Cas du semi-groupe compact

Nous supposons que l'opérateur A génère un C_0 -semi-groupe compact $\{Q(t)\}_{t \geq 0}$ sur X , c'est-à-dire que pour tout $t > 0$, l'opérateur $Q(t)$ est compact.

Théorème 2.1 *Supposons que $Q(t)$ ($t > 0$) soit compact. De plus, supposons que (H1)-(H4) soient vérifiées. Alors le problème de Cauchy non local (2.1) admet au moins une solution intégrale dans $B_r^{(q)}(J')$.*

Démonstration. Il est clair que x est une solution intégrale de (2.1) dans $B_r^{(q)}(J')$ si et seulement si y est un point fixe de $y = \Psi y$ dans $B(J)$, où $x(t) = t^{q-1}y(t)$. Il suffit donc de prouver que $y = \Psi y$ admet un point fixe dans $B(J)$. Pour tout $y_1, y_2 \in B(J)$, d'après (H3),

nous avons

$$\begin{aligned}
 |\Psi_1 y_1(t) - \Psi_1 y_2(t)| &= t^{1-q} |(T_1 x_1)(t) - (T_1 x_2)(t)| \\
 &\leq \frac{M}{\Gamma(q)} |g(x_1) - g(x_2)| \\
 &\leq \frac{ML}{\Gamma(q)} \|x_1 - x_2\|_q \\
 &= \frac{ML}{\Gamma(q)} \|y_1 - y_2\|,
 \end{aligned}$$

ce qui implique que $\|\Psi_1 y_1 - \Psi_1 y_2\| \leq \frac{ML}{\Gamma(q)} \|y_1 - y_2\|$. Ainsi, nous obtenons

$$\alpha(\Psi_1(B(J))) \leq \frac{ML}{\Gamma(q)} \alpha(B(J)). \quad (2.9)$$

Ensuite, nous montrerons que pour tout $t \in [0, a]$, $V(t) = \{(\Psi_2 y)(t), y \in B(J)\}$ est relativement compact dans X . Evidemment, $V(0)$ est relativement compact dans X . Soit $t \in (0, a]$ fixé. Pour tout $\varepsilon \in (0, t)$ et tout $\delta > 0$, définissons un opérateur $\Psi_{\varepsilon, \delta}$ sur $B(J)$ par la formule

$$\begin{aligned}
 (\Psi_{\varepsilon, \delta} y)(t) &= qt^{1-q} \int_0^{t-\varepsilon} \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{q-1} M_q(\theta) Q((t-s)^q \theta) f(s, x(s)) d\theta ds \\
 &= qt^{1-q} Q(\varepsilon^q \delta) \int_0^{t-\varepsilon} \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{q-1} M_q(\theta) Q((t-s)^q \theta - \varepsilon^q \delta) f(s, x(s)) d\theta ds.
 \end{aligned}$$

où $x \in B_r^{(\delta)}(J')$. Alors, grâce à la compacité de $Q(\varepsilon^\beta \delta)$ ($\varepsilon^\beta \delta > 0$), nous obtenons que l'ensemble $V_{\varepsilon, \delta}(t) = \Psi_{\varepsilon, \delta} y(t)$, $y \in B(J)$ est relativement compact dans X pour $\forall \varepsilon \in (0, t)$ et $\forall \delta > 0$. De plus, pour tout $y \in B(J)$, nous avons

$$\begin{aligned}
 |(\Psi_2 y)(t) - (\Psi_{\varepsilon, \delta} y)(t)| &\leq |qt^{1-q} \int_0^t \int_0^\delta \theta(t-s)^{q-1} M_q(\theta) Q((t-s)^q \theta) f(s, x(s)) d\theta ds \\
 &\quad + |qt^{1-q} \int_{t-\varepsilon}^\varepsilon \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{q-1} M_q(\theta) Q((t-s)^q \theta) f(s, x(s)) d\theta ds| \\
 &\leq qMt^{1-q} \int_0^t (t-s)^{q-1} m(s) ds \int_0^\delta \theta M_q(\theta) d\theta \\
 &\quad + qMt^{1-q} \int_{t-\varepsilon}^\varepsilon (t-s)^{q-1} m(s) ds \int_0^\infty \theta M_q(\theta) d\theta \\
 &\leq qMt^{1-q} \int_0^t (t-s)^{q-1} m(s) ds \int_0^\delta \theta M_q(\theta) d\theta \\
 &\quad + \frac{M}{\Gamma(q)} t^{1-q} \int_{t-\varepsilon}^\varepsilon (t-s)^{q-1} m(s) ds \rightarrow 0, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe des ensembles relativement compacts arbitrairement proches de l'ensemble $V(t)$, $t > 0$. Ainsi, l'ensemble $V(t)$, $t > 0$ est également relativement compact

dans X . Par conséquent, $\{(\Psi_2 y)(t), y \in B(J)\}$ est relativement compact d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà. Ainsi, nous avons $\alpha(T_2(B_r^{(\delta)}(J'))) = 0$. D'après (2.9), nous avons

$$\alpha(\Psi(B(J))) \leq \alpha(\Psi_1(B(J))) + \alpha(\Psi_2(B(J))) \leq \frac{ML}{\Gamma(q)} \alpha(B(J)).$$

Donc l'opérateur Ψ est une α -contraction dans $B(J)$. D'après le lemme 2.5, nous savons que Ψ est continu. Par conséquent, le théorème du point fixe d'O'Regan, montre que Ψ admet un point fixe $y^* \in B(J)$. Posons $x^*(t) = t^{q-1}y^*(t)$. Alors x^* est une solution intégrale de (2.1). $\square$

Théorème 2.2 *Supposons que $Q(t)(t > 0)$ est compact. De plus, supposons que (H1), (H2), (H3)' et (H4)' sont satisfaites. Alors le problème de Cauchy non local (2.1) admet au moins une solution intégrale dans $B_r^{(\delta)}(J')$.*

Démonstration. D'après la proposition 2.4, $Q(t)(t > 0)$ est équicontinu, ce qui implique que (H0) est satisfaite. Ensuite, d'après les lemmes 2.4 et 2.5, nous savons que $\Psi : B(J) \rightarrow B(J)$ est borné, continu et $\{\Psi_y : y \in B(J)\}$ est équicontinu. D'après l'argument du théorème 2.5, il suffit de prouver que pour tout $t \in J$, l'ensemble $V_1(t) = \{(\Psi_1 y)(t), y \in B(J)\}$ est relativement compact dans X . Evidemment, $V_1(0)$ est relativement compact dans X . Soit $0 < t \leq a$ fixé. Pour $\forall \delta > 0$, définissons un opérateur Ψ_1^δ sur $B(J)$ par la formule

$$(\Psi_1^\delta y)(t) = q \int_\delta^\infty \theta M_q(\theta) Q(t^q \theta) (x_0 - g(x)) d\theta = q Q(t^q \delta) \int_\delta^\infty \theta M_q(\theta) Q(t^q \theta - t^q \delta) (x_0 - g(x)) d\theta,$$

où $x(t) = t^{q-1}y(t)$, $t \in (0, a]$. Grâce à la compacité de $Q(t^q \delta)$ ($t^q \delta > 0$), nous obtenons que l'ensemble $V_1^\delta(t) = \{(\Psi_1^\delta y)(t), y \in B(J)\}$ est relativement compact dans X pour $\forall \delta > 0$. De plus, pour tout $y \in B(J)$, nous avons

$$\begin{aligned} |(\Psi_1 y)(t) - (\Psi_1^\delta y)(t)| &= \left| q \int_0^\delta \theta M_q(\theta) Q(t^q \theta) (x_0 - g(x)) d\theta \right| \\ &\leq qM(|x_0| + L_1 r + L_2) \int_0^\delta \theta M_q(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe des ensembles relativement compacts arbitrairement proches de l'ensemble $V_1(t)$, $t > 0$. Ainsi, l'ensemble $V_1(t)$, $t > 0$ est également relativement compact dans X . De plus, $\{\Psi_y : y \in B(J)\}$ est uniformément borné d'après les lemmes 2.7. Par conséquent, $\{(\Psi_y)(t), y \in B(J)\}$ est relativement compact d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà. Ainsi, le théorème du point fixe d'O'Regan montre que Ψ admet un point fixe $y^* \in B(J)$. Posons $x^*(t) = t^{q-1}y^*(t)$. Alors x^* est une solution intégrale du problème (2.1). $\square$

Remarque 2.3 La condition **(H2)** des théorèmes 2.1 et 2.2 peut être remplacée par la condition suivante.

(H2)' Il existe une constante $q_1 \in (0, q)$ et $m \in L^{\frac{1}{q_1}}(J, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$|f(t, x)| \leq m(t) \text{ pour tout } x \in B_r^{(q)}(J') \text{ et presque tout } t \in [0, a].$$

En effet, si **(H2)'** est satisfaite, alors d'après l'inégalité de Holder, pour tout $t_1, t_2 \in J'$ et $t_1 < t_2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |{}^{RL}D_0^{-q}m(t_2) - {}^{RL}D_0^{-q}m(t_1)| &= \frac{1}{\Gamma(q)} \left| \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1})m(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1}m(s)ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1})^{\frac{1}{1-q_1}} ds \right)^{1-q_1} \left(\int_0^{t_1} (m(s))^{\frac{1}{q_1}} ds \right)^{q_1} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_1}^{t_2} ((t_2 - s)^{q-1})^{\frac{1}{1-q_1}} ds \right)^{1-q_1} \left(\int_{t_1}^{t_2} (m(s))^{\frac{1}{q_1}} ds \right)^{q_1} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\frac{q-1}{1-q_1}} - (t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-q_1}}) ds \right)^{1-q_1} \|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-q_1}} ds \right)^{1-q_1} \|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}} \\ &\leq \frac{\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-q_1}{q-q_1} \right)^{1-q_1} \left(t_1^{\frac{q-q_1}{1-q_1}} + (t_2 - t_1)^{\frac{q-q_1}{1-q_1}} - t_2^{\frac{q-q_1}{1-q_1}} \right)^{1-q_1} \\ &\quad + \frac{\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-q_1}{q-q_1} \right)^{1-q_1} \left((t_2 - t_1)^{\frac{q-q_1}{1-q_1}} \right)^{1-q_1} \\ &\leq \frac{2\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}}}{\Gamma(q)} \left(\frac{1-q_1}{q-q_1} \right)^{1-q_1} (t_2 - t_1)^{q-q_1} \rightarrow 0, \text{ quand } t_2 \rightarrow t_1, \end{aligned} \tag{2.10}$$

où

$$\|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}} = \left(\int_0^a (m(t))^{\frac{1}{q_1}} dt \right)^{q_1}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} t^{1-q} \int_0^t (t-s)^{q-1}m(s)ds &\leq t^{1-q} \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{q-1}{1-q_1}} ds \right)^{1-q_1} \left(\int_0^t (m(s))^{\frac{1}{q_1}} ds \right)^{q_1} \\ &\leq \left(\frac{1-q_1}{q-q_1} \right)^{1-q_1} t^{1-q_1} \|m\|_{L^{\frac{1}{q_1}}} \rightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ainsi, (2.10) et (2.11) signifient que ${}^{RL}D_0^{-q}m \in C(J', \mathbb{R}^+)$, et $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-q}({}^{RL}D_0^{-q}m)(t) = 0$. Donc **(H2)** est vérifiée.

Exemple 2.4 Soit $X = L^2([0, \pi], \mathbb{R})$. Considérons l'équation aux dérivées partielles fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} \partial_t^q u(t, z) = \partial_z^2 u(t, z) + \partial_z G(t, u(t, z)), & z \in [0, \pi], t \in (0, a], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \in (0, a], \\ u(0, z) + \sum_{i=0}^{\pi} \int_0^{\pi} k(z, y) u(t_i, y) dy = u_0(z), & z \in [0, \pi], \end{cases} \quad (2.12)$$

où ∂_t^q est la dérivée partielle fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $0 < q < 1$, $a > 0$, G est une fonction donnée, n est un entier positif, $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq a$, $u_0(z) \in X$, $k(z, y) \in L^2([0, \pi] \times [0, \pi], \mathbb{R}^+)$. Soit un opérateur A défini par $Av = v''$ avec le domaine

$$D(A) = \{v(\cdot) \in X : v, v' \text{ absolument continues}, v'' \in X, v(0) = v(\pi) = 0\}.$$

Alors A génère un semi-groupe fortement continu $\{Q(t)\}_{t \geq 0}$ qui est compact, analytique et auto-adjoint. le problème de Cauchy non local (2.1) et (H1) sont vérifiées. Le système (2.12) peut être réécrit, dans l'espace X , sous la forme du problème de Cauchy non local abstrait suivant, :

$$\begin{cases} {}^{RL}D_0^q x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), & \text{presque tout } t \in [0, a], \\ {}^{RL}D_0^{q-1} x(0) + g(x) = x_0, \end{cases}$$

où $x(t) = u(t, \cdot)$, c'est-à-dire $x(t)(z) = u(t, z)$, $t \in (0, a]$, $z \in [0, \pi]$.

La fonction $f : J' \times X \rightarrow X$ est donnée par :

$$f(t, x(t))(z) = \partial_z G(t, u(t, z)),$$

et l'opérateur $g : C(J', X) \rightarrow L(J', X)$ est défini par :

$$g(x)(z) = \sum_{i=0}^n K_g x(t_i)(z),$$

où $K_g v(z) = \int_0^{\pi} k(z, y) v(y) dy$, pour $v \in X = L^2([0, \pi], \mathbb{R})$, $z \in [0, \pi]$. On peut choisir $q = 1/3$ et $f(t, x(t)) = t^{-1/4} \sin x(t)$, et définir :

$$m(t) = t^{-1/4}, \quad L = (n+1) \left(\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} k^2(z, y) dy dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$r = \frac{M}{\Gamma(\frac{1}{3}) - ML} \left(|x_0| + g(0) + \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{12}{13})} a^{\frac{3}{4}} \right).$$

Alors, les hypothèses (H1)-(H4) sont satisfaites (en notant que $K_g : X \rightarrow X$ est complètement continu). D'après le Théorème 2.1, le système (2.12) admet une solution intégrale dans $B_r^{(1/3)}((0, a])$ sous la condition que $\frac{ML}{\Gamma(1/3)} < 1$.

2.2.3 Cas du semi-groupe non compact

Si $Q(t)$ est non compact, on fait l'hypothèse suivante :

(H5) Il existe une constante $\ell > 0$ telle que pour tout ensemble borné $D \subset X$,

$$\alpha(f(t, D)) \leq \ell \alpha(D).$$

Théorème 2.5 *Supposons que (H0)-(H5) soient vérifiées. Alors, le problème de Cauchy non local (2.1) admet au moins une solution intégrale dans $B_r^{(q)}(J')$.*

Démonstration. D'après les Lemmes 2.5 et 2.6, on sait que $\Psi_2 : B(J) \rightarrow B(J)$ est borné, continu et que $\{\Psi_2 y : y \in B(J)\}$ est équicontinu. Ensuite, nous montrerons que Ψ_2 est compact dans un sous-ensemble de $B(J)$. Pour tout sous-ensemble borné $B_0 \subset B(J)$, on pose :

$$\Psi^1(B_0) = \Psi_2(B_0), \quad \Psi^n(B_0) = \Psi_2(\bar{\omega}(\Psi^{n-1}(B_0))), \quad n = 2, 3, \dots$$

Alors, d'après les propositions 1.18 et 1.19, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $\{y_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty \subset B_0$ telle que

$$\begin{aligned} \alpha(\Psi^1(B_0(t))) &= \alpha(\Psi_2(B_0(t))) \leq 2\alpha\left(t^{1-q} \int_0^t (t-s)^{q-1} P_q(t-s) f(s, \{s^{q-1} y_n^{(1)}(s)\}_{n=1}^\infty) ds\right) + \varepsilon \\ &\leq \frac{4M}{\Gamma(q)} t^{1-q} \int_0^t (t-s)^{q-1} \alpha(f(s, \{s^{q-1} y_n^{(1)}(s)\}_{n=1}^\infty)) ds + \varepsilon \\ &\leq \frac{4M}{\Gamma(q)} t^{1-q} \int_0^t (t-s)^{q-1} \alpha(\{s^{q-1} y_n^{(1)}(s)\}_{n=1}^\infty) ds + \varepsilon \\ &\leq \frac{4M\ell\alpha(B_0)}{\Gamma(q)} t^{1-q} \int_0^t (t-s)^{q-1} s^{q-1} ds + \varepsilon \\ &\leq \frac{4M\ell\Gamma(q)t^q\alpha(B_0)}{\Gamma(2q)} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a

$$\alpha(\Psi^1(B_0(t))) \leq \frac{4M\ell\Gamma(q)t^q}{\Gamma(2q)} \alpha(B_0).$$

D'après les Propositions 1.14 et 1.15, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $\{y_n^{(2)}\}_{n=1}^\infty \subset \bar{\omega}(\Psi^1(B_0))$ telle que

$$\begin{aligned}
 \alpha(\Psi^2(B_0(t))) &= \alpha(\Psi_2(\bar{\omega}(\Psi^1(B_0(t))))) \leq 2\alpha\left(t^{1-q} \int_0^t (t-s)^{q-1} P_q(t-s) f(s, \{s^{q-1} y_n^{(2)}(s)\}_{n=1}^\infty) ds\right) + \varepsilon \\
 &\leq \frac{4Mt^{1-q}}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \alpha\left((f(s, \{s^{q-1} y_n^{(2)}(s)\}_{n=1}^\infty) ds + \varepsilon)\right) \\
 &\leq \frac{4M\ell t^{1-q}}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \alpha(\{s^{q-1} y_n^{(2)}(s)\}_{n=1}^\infty) ds + \varepsilon \\
 &\leq \frac{4M\ell t^{1-q}}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} s^{q-1} \alpha(\{y_n^{(2)}(s)\}_{n=1}^\infty) ds + \varepsilon \\
 &\leq \frac{(4M\ell)^2 t^{1-q}}{\Gamma(2q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} s^{2q-1} ds + \varepsilon \\
 &= \frac{(4M\ell)^2 \Gamma(q)}{\Gamma(3q)} t^{2q} \alpha(B_0) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Par induction mathématique, on peut montrer que pour tout $\bar{n} \in \mathbb{N}$,

$$\alpha(\Psi^{\bar{n}}(B_0(t))) \leq \frac{(4M\ell)^{\bar{n}} \Gamma(q)}{\Gamma((\bar{n}+1)q)} t^{\bar{n}q} \alpha(B_0).$$

Comme

$$\lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} \frac{(4M\ell a^q)^{\bar{n}} \Gamma(q)}{\Gamma((\bar{n}+1)q)} = 0,$$

il existe un entier positif $\hat{n}$ tel que

$$\frac{(4M\ell)^{\hat{n}} \Gamma(q)}{\Gamma((\hat{n}+1)q)} t^{\hat{n}q} \leq \frac{(4M\ell a^q)^{\hat{n}} \Gamma(q)}{\Gamma((\hat{n}+1)q)} = k < 1.$$

Alors

$$\alpha(\Psi^{\hat{n}}(B_0(t))) \leq k\alpha(B_0).$$

D'après la Proposition 1.16 de [17], $\Psi^{\hat{n}}(B_0(t))$ est borné et équicontinu. Ensuite, d'après la Proposition 1.15 de [17], on a

$$\alpha(\Psi^{\hat{n}}(B_0)) = \max_{t \in [0, a]} \alpha(\Psi^{\hat{n}}(B_0(t))).$$

Ainsi

$$\alpha(\Psi^{\hat{n}}(B_0)) \leq k\alpha(B_0).$$

Posons

$$D_0 = B(J), \quad D_1 = \overline{cov}(\Psi^{\hat{n}}(D)), \dots, \quad D_n = \overline{cov}(\Psi^{\hat{n}}(D_{n-1})), \quad n = 2, 3, \dots$$

Alors, on obtient

- (i) $D_0 \supset D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_{n-1} \supset D_n \supset \cdots$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(D_n) = 0$.

Ainsi, $\hat{D} = \bigcap_{n=0}^{\infty} D_n$ est un sous-ensemble non vide, compact et convexe dans $B(J)$. Nous allons montrer que $\Psi_2(\hat{D}) \subset \hat{D}$. Tout d'abord, nous prouvons :

$$\Psi_2(D_n) \subset D_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

De $\Psi^1(D_0) = \Psi_2(D_0) \subset D_0$, on déduit que $\overline{\text{cov}}(\Psi^1(D_0)) \subset D_0$. Par conséquent,

$$\Psi^2(D_0) = \Psi_2(\overline{\text{cov}}(\Psi^1(D_0))) \subset \Psi_2(D_0) = \Psi^1(D_0),$$

$$\Psi^3(D_0) = \Psi_2(\overline{\text{cov}}(\Psi^2(D_0))) \subset \Psi_2(\overline{\text{cov}}(\Psi^1(D_0))) = \Psi^2(D_0),$$

...

$$\Psi^{\hat{n}}(D_0) = \Psi_2(\overline{\text{cov}}(\Psi^{\hat{n}-1}(D_0))) \subset \Psi_2(\overline{\text{cov}}(\Psi^{\hat{n}-2}(D_0))) = \Psi^{\hat{n}-1}(D_0).$$

Ainsi

$$D_1 = \overline{\text{cov}}(\Psi^{\hat{n}}(D_0)) \subset \overline{\text{cov}}(\Psi^{\hat{n}-1}(D_0)).$$

Donc

$$\Psi(D_1) \subset \Psi(\overline{\text{cov}}(\Psi^{\hat{n}-1}(D_0))) = \Psi^{\hat{n}}(D_0) \subset \overline{\text{cov}}(\Psi^{\hat{n}}(D_0)) = D_1.$$

En utilisant la même méthode, on peut montrer que

$$\Psi_2(D_n) \subset D_n \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

alors $\Psi_2(\hat{D}) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \Psi_2(D_n) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} D_n = \hat{D}$.

Ainsi, $\Psi_2(\hat{D})$ est compact. Par conséquent, $\alpha(\Psi_2(\hat{D})) = 0$.

D'autre part, pour tout $y_1, y_2 \in \hat{D}$ et $t \in (0, a]$, selon **(H3)**, on a :

$$\begin{aligned} |\Psi_1 y_1(t) - \Psi_1 y_2(t)| &= t^{1-q} |(T_1 x_1)(t) - (T_1 x_2)(t)| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(q)} |g(x_1) - g(x_2)| \\ &\leq \frac{ML}{\Gamma(q)} \|x_1 - x_2\|_q \\ &= \frac{ML}{\Gamma(q)} \|y_1 - y_2\|. \end{aligned} \quad (2.14)$$

D'où

$\|\Psi_1 y_1 - \Psi_1 y_2\| \leq \frac{ML}{\Gamma(q)} \|y_1 - y_2\|$. Ainsi, nous obtenons que

$$\alpha(\Psi_1(\hat{D})) \leq \frac{ML}{\Gamma(q)} \alpha(\hat{D}). \quad (2.15)$$

D'après (2.15), nous avons

$$\alpha(\Psi(\hat{D})) \leq \alpha(\Psi_1(\hat{D})) + \alpha(\Psi_2(\hat{D})) \leq \frac{ML}{\Gamma(q)}\alpha(\hat{D}).$$

Alors, l'opérateur Ψ est une α -contraction dans $\hat{D}$. D'après le Lemme 2.5, l'opérateur Ψ est continu. Par conséquent, le théorème d'ORegan montre que Ψ admet un point fixe $y^* \in B(J)$. Posons $x^*(t) = t^{q-1}y^*(t)$. Alors x^* est une solution intégrale du problème (2.1). $\square$

Théorème 2.6 *Supposons que (H0)-(H2), (H3)', (H4)' et (H5) sont vérifiées, alors le problème de Cauchy non local (2.1) admet au moins une solution intégrale dans $B_r^{(q)}(J')$.*

Démonstration. Puisque $g(x)$ est compact et $P_q(t)$ est borné, pour tout $t > 0$, $\{(\Psi_1 y)(t), y \in B(J)\}$ est relativement compact. Ainsi, nous avons $\alpha(\Psi_1(B(J))) = 0$. D'après la preuve du Théorème 2.5, il existe un $\hat{D} \subset B(J)$ tel que $\Psi_2(\hat{D})$ est relativement compact, c'est-à-dire $\alpha(\Psi_2(\hat{D})) = 0$. Par conséquent, nous avons

$$\alpha(\Psi(\hat{D})) \leq \alpha(\Psi_1(\hat{D})) + \alpha(\Psi_2(\hat{D})) = 0.$$

Ainsi, le Théorème d'ORegan montre que Ψ admet un point fixe $y^* \in B(J)$. Posons $x^*(t) = t^{q-1}y^*(t)$. Alors x^* est une solution intégrale d problème (2.1). $\square$

Chapitre 3

Problème de Cauchy non autonome pour une équation d'évolution intégrro-différentielle d'ordre fractionnaire de Caputo

3.1 Équation d'évolution intégrro-différentielle abstraite avec dérivée de Caputo

3.1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence des solutions intégrales (mild solutions) d'une équation d'évolution intégrro-différentielle abstraite avec dérivée de Caputo. Ici, nous présentons une synthèse de l'article de Pengyu Chen, Xuping Zhang et Yongxiang Li, intitulé *Cauchy Problem for Fractional Non-Autonomous Evolution Equations* . Voir[11].

3.1.2 Le problème posé

Nous allons étudier le problème de Cauchy suivant, pour une équation d'évolution intégrro-différentielle non autonome fractionnaire de type mixte, dans un espace de Banach E :

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u(t) + A(t)u(t) = f(t, u(t), (Tu)(t), (Su)(t)), & t \in I, \\ u(0) = A^{-1}(0)u_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où ${}^C D_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire standard de Caputo en temps d'ordre $0 < \alpha \leq 1$, $I = [0, a]$, $a > 0$ est une constante, $A(t)$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés définis sur un domaine dense $D(A)$ dans l'espace de Banach E à valeurs dans E tel que $D(A)$ est indépendant de t , $f : I \times E \times E \times E \rightarrow E$ est une fonction de type Carathéodory, $u_0 \in E$, T est l'opérateur intégral de Volterra défini par

$$(Tu)(t) = \int_0^t K(t, s)u(s) ds,$$

avec noyau intégral $K \in C(\Delta, \mathbb{R})$, $\Delta = \{(t, s) \mid 0 \leq s \leq t \leq a\}$ et S est l'opérateur intégral de Fredholm défini par

$$(Su)(t) = \int_0^a H(t, s)u(s) ds,$$

Soit $\mathcal{L}(E)$ l'espace de Banach de tous les opérateurs linéaires et bornés dans E muni de la topologie définie par la norme opérateur. Tout au long de cet chapitre, nous supposons que l'opérateur linéaire $-A(t)$ vérifie les conditions suivantes :

(A1) Pour tout λ avec $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, l'opérateur $\lambda I + A(t)$ admet un opérateur inverse borné $[\lambda I + A(t)]^{-1}$ dans $\mathcal{L}(E)$ et

$$\|[\lambda I + A(t)]^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda| + 1},$$

où C est une constante positive indépendante de t et λ ;

(A2) Pour tout $t, \tau, s \in I$, il existe une constante $\gamma \in (0, 1]$ telle que

$$\|[A(t) - A(\tau)]A^{-1}(s)\| \leq C|t - \tau|^\gamma,$$

où les constantes γ et $C > 0$ sont indépendantes de t , τ et s .

Remarque 1. D'après Henry [4], Pazy [10] et Temam [15], l'hypothèse **(A1)** signifie que pour chaque $s \in J$, l'opérateur $-A(s)$ génère un semi-groupe analytique $e^{-tA(s)}$ ($t > 0$), et il existe une constante positive C indépendante de t et s telle que

$$\|A^n(s)e^{-tA(s)}\| \leq \frac{C}{t^n},$$

où $n = 0, 1$, $t > 0$, $s \in J$.

Remarque 2. Dans l'hypothèse **(A1)**, si nous choisissons $\lambda = 0$ et $t = 0$, alors il existe une constante positive C indépendante de t et λ telle que

$$\|A^{-1}(0)\| \leq C.$$

Afin de montrer l'existence de solutions intégrales pour le problème de valeur initiale relatif à l'équation d'évolution intégral-différentielle non autonome fractionnaire en temps non linéaire.

Pour l'équation de type mixte (3.1), il suffit d'imposer certaines conditions de croissance naturelles et une condition de mesure de non-compactité sur la fonction non linéaire f .

(F1) Pour un certain $r > 0$, il existe des constantes $0 \leq \beta < \min\{\alpha, \gamma\}$, $\rho_1 > 0$ et des fonctions $\psi_r \in L^{\frac{1}{\beta}}(J, \mathbb{R}^+)$ telles que pour presque tout $t \in I$ et tout $u \in E$ satisfaisant $\|u\| \leq r$,

$$\|f(t, u, Tu, Su)\| \leq \psi_r(t) \quad \text{et} \quad \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\|\psi_r\|_{L^{\frac{1}{\beta}}[0, a]}}{r} := \rho < +\infty.$$

(F2) Il existe des constantes positives L_1, L_2 et L_3 telles que pour tout ensemble borné et dénombrable $D_1, D_2, D_3 \subset E$ et presque tout $t \in I$,

$$\mu(f(t, D_1, D_2, D_3)) \leq L_1\mu(D_1) + L_2\mu(D_2) + L_3\mu(D_3).$$

Posons

$$\delta_1 = \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right)^{1-\beta} + C\mathbf{B}(\alpha, \gamma)a^\gamma \left(\frac{1-\beta}{\alpha+\gamma-\beta}\right)^{1-\beta}$$

et

$$\delta_2 = 1 + Ca^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} + a^\gamma \mathbf{B}(\alpha, \gamma + 1)\right),$$

où

$$\mathbf{B}(\alpha, \gamma) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-1}dt$$

est la fonction Bêta.

3.2 Résultats principaux d'existence de solutions

Les lemmes suivants sont très utiles pour montrer les principaux résultats de ce chapitre, les théorème 3.2 et théorème 3.3.

3.2.1 Lemmes préliminaires

Soit $I = [0, a]$ un intervalle compact dans $\mathbb{R}$, où $a > 0$ est une constante. Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$. Nous notons par $C(I, E)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de l'intervalle I vers E équipé de la norme sup

$$\|u\|_C = \sup\{\|u(t)\|, \quad t \in I\} \quad \forall u \in C(I, E),$$

et par $\mathcal{L}(E)$ l'espace de Banach de tous les opérateurs linéaires et bornés dans E muni de la topologie définie par la norme opérateur. Soit $L^1(I, E)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions intégrables au sens de Bochner à valeurs dans E définies sur I avec la norme $\|u\|_1 = \int_0^a \|u(t)\| dt$. Pour tout $r > 0$, on note $\Omega_r = \{u \in C(I, E) : \|u(t)\| \leq r, t \in I\}$. Alors Ω_r est une boule fermée dans $C(I, E)$ de centre θ et de rayon r .

Définition 3.1 Une fonction $u \in C(I, E)$ est dite solution intégrale du problème de valeur initiale (3.1) si elle vérifie

$$\begin{aligned} u(t) = & A^{-1}(0)u_0 + \int_0^t \psi(t-\eta, \eta)U(\eta)u_0 d\eta \\ & + \int_0^t \psi(t-\eta, \eta)f(\eta, u(\eta), (Tu)(\eta), (Su)(\eta))d\eta \\ & + \int_0^t \int_0^\eta \psi(t-\eta, \eta)\varphi(\eta, s)f(s, u(s), (Tu)(s), (Su)(s))dsd\eta, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où les opérateurs $\psi(t, s)$, $\varphi(t, \eta)$ et $U(t)$ sont définis par

$$\psi(t, s) = \alpha \int_0^\infty \theta t^{\alpha-1} \xi_\alpha(\theta) e^{-t^\alpha \theta A(s)} d\theta, \quad (3.3)$$

$$\varphi(t, \eta) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(t, \eta), \quad (3.4)$$

et

$$U(t) = -A(t)A^{-1}(0) - \int_0^t \varphi(t, s)A(s)A^{-1}(0)ds, \quad (3.5)$$

ξ_α est une fonction de densité de probabilité définie sur $[0, +\infty)$ telle que sa transformée de Laplace est donnée par

$$\int_0^\infty e^{-\theta x} \xi_\alpha(\theta) d\theta = \sum_{i=0}^\infty \frac{(-x)^i}{\Gamma(1+\alpha i)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, x > 0,$$

$$\varphi_1(t, \eta) = [A(t) - A(\eta)]\psi(t-\eta, \eta),$$

et

$$\varphi_{k+1}(t, \eta) = \int_\eta^t \varphi_k(t, s)\varphi_1(s, \eta)d\eta, \quad k = 1, 2, \dots$$

Les propriétés suivantes concernant les opérateurs $\psi(t, s)$, $\varphi(t, \eta)$ et $U(t)$ seront nécessaires dans notre argumentation.

Lemme 3.1 *Les fonctions à valeurs opérateur $\psi(t - \eta, \eta)$ et $A(t)\psi(t - \eta, \eta)$ sont continues en topologie uniforme par rapport aux variables t et η , où $t \in I$, $0 \leq \eta \leq t - \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, et*

$$\|\psi(t - \eta, \eta)\| \leq C(t - \eta)^{\alpha-1}, \quad (3.6)$$

où C est une constante positive indépendante de t et η . De plus, nous avons

$$\|\varphi(t, \eta)\| \leq C(t - \eta)^{\gamma-1}. \quad (3.7)$$

et

$$\|U(t)\| \leq C(1 + t^\gamma). \quad (3.8)$$

En utilisant le Lemme 3.1 et des calculs appropriés, nous pouvons obtenir le résultat suivant.

Lemme 3.2 *L'intégrale $\int_0^t \psi(t - \eta, \eta)U(\eta)d\eta$ est uniformément continue dans la norme opérateur $\mathcal{L}(E)$ pour tout $t \in I$, et*

$$\left\| \int_0^t \psi(t - \eta, \eta)U(\eta) d\eta \right\| \leq C^2 t^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t^\gamma \mathbf{B}(\alpha, \gamma + 1) \right), \quad \forall t \in I. \quad (3.9)$$

En utilisant les propriétés de l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre fractionnaire et une transformation intégrale appropriée, nous obtenons le résultat suivant, qui sera utile pour les preuves des résultats principaux.

Lemme 3.3 *Pour tout $t \in I$ et $g \in L^1[0, a]$, nous avons*

$$\int_0^t \int_0^\eta (t - \eta)^{\alpha-1} (\eta - s)^{\gamma-1} g(s) ds d\eta = \mathbf{B}(\alpha, \gamma) \int_0^t (t - \eta)^{\alpha+\gamma-1} g(\eta) d\eta. \quad (3.10)$$

Nous introduisons aussi la définition de la mesure de non-compacité de Kuratowski, qui sera utilisée dans la preuve des résultats principaux.

Lemme 3.4 *La mesure de non-compacité de Kuratowski $\mu(\cdot)$ définie sur un ensemble borné S d'un espace de Banach E est*

$$\mu(S) := \inf\{\delta > 0 : S = \cup_{k=1}^n S_k \text{ et } \text{diam}(S_k) \leq \delta \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Les propriétés suivantes concernent la mesure de non-compacité de Kuratowski.

Lemme 3.5 *Soit E un espace de Banach et $U, V \subset E$ bornés. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. $\mu(U) \leq \mu(V)$ si $U \subset V$;

2. $\mu(U) = \mu(\overline{U}) = \mu(\text{conv } U)$, où $\text{conv } U$ désigne l'enveloppe convexe de U ;
3. $\mu(U) = 0$ si et seulement si $\overline{U}$ est compact, où $\overline{U}$ désigne l'enveloppe fermée de U ;
4. $\mu(\lambda U) = |\lambda|\mu(U)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$;
5. $\mu(U \cup V) = \max\{\mu(U), \mu(V)\}$;
6. $\mu(U + V) \leq \mu(U) + \mu(V)$, où $U + V = \{x \mid x = y + z, y \in U, z \in V\}$;
7. $\mu(U + x) = \mu(U)$, pour tout $x \in E$;
8. Si l'application $Q : D(Q) \subset E \rightarrow X$ est Lipschitzienne avec une constante k , alors $\mu(Q(S)) \leq k\mu(S)$ pour tout sous-ensemble borné $S \subset \mathcal{D}(Q)$, où X est un autre espace de Banach.

Maintenant, nous notons par $\mu(\cdot)$ et $\mu_C(\cdot)$ la mesure de non-compacité de Kuratowski sur l'ensemble borné de E et $C(I, E)$ respectivement. Pour tout $D \subset C(I, E)$ et $t \in I$, posons $D(t) = \{u(t) \mid u \in D\}$, alors $D(t) \subset E$. Si $D \subset C(I, E)$ est borné, alors $D(t)$ est borné dans E et $\mu(D(t)) \leq \mu_C(D)$. Pour plus de détails sur les propriétés de la mesure de non-compacité de Kuratowski, nous renvoyons aux monographies [2] et [9]. Les lemmes suivants sont nécessaires dans notre argumentation.

Lemme 3.6 Soit E un espace de Banach, et soit $D \subset C(I, E)$ borné et équicontinu. Alors $\mu(D(t))$ est continue sur $[0, a]$, et $\mu_C(D) = \max_{t \in [0, a]} \mu(D(t))$.

Lemme 3.7 Soit E un espace de Banach, et soit $D \subset E$ borné. Alors il existe un ensemble dénombrable $D_0 \subset D$ tel que $\mu(D) \leq 2\mu(D_0)$.

Lemme 3.8 Soit E un espace de Banach. Si $D = \{u_n\}_{n=1}^\infty \subset C([0, a], E)$ est un ensemble dénombrable et s'il existe une fonction $m \in L^1([0, a], \mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n(t)\| \leq m(t), \quad p.p. \ t \in [0, a].$$

Alors $\mu(D(t))$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, a]$ et

$$\mu\left(\left\{\int_0^a u_n(t)dt \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) \leq 2 \int_0^a \mu(D(t))dt.$$

Le théorème de point fixe suivant concernant l'opérateur condensant en puissance convexe, introduit par Sun et Zhang [14], joue un rôle clé dans la preuve de nos résultats principaux.

Définition 3.2 Soit E un espace de Banach réel. Si $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ est un opérateur continu et borné, et s'il existe $u_0 \in E$ et un entier positif n_0 tels que pour tout sous-ensemble borné et non précompact $S \subset E$,

$$\mu(\mathcal{A}^{(n_0, u_0)}(S)) < \mu(S), \quad (3.11)$$

où

$$\mathcal{A}^{(1, u_0)}(S) \equiv \mathcal{A}(S), \quad \mathcal{A}^{(n, u_0)}(S) = \mathcal{A}(\overline{\text{co}}\{Q^{(n-1, u_0)}(S), u_0\}), \quad n = 2, 3, \dots$$

Alors nous appelons $\mathcal{A}$ un opérateur condensant à puissance convexe par rapport à u_0 et n_0 .

Lemme 3.9 (*Théorème de point fixe pour un opérateur condensant à puissance convexe*, [9]) Soit E un espace de Banach réel, et soit $D \subset E$ un ensemble borné, fermé et convexe dans E . S'il existe $u_0 \in D$ et un entier positif n_0 tels que $\mathcal{A} : D \rightarrow D$ soit un opérateur condensant en puissance convexe par rapport à u_0 et n_0 , alors l'opérateur $\mathcal{A}$ admet au moins un point fixe dans D .

Remarque 3.1 Si $n_0 = 1$ dans (3.11), alors le théorème de point fixe pour un opérateur condensant en puissance convexe (voir Lemme 3.9) se réduit au célèbre théorème de point fixe de Sadovskii (voir Théorème 3.3). Notons que le Lemme 3.9 ne requiert pas que l'opérateur $\mathcal{A}$ soit condensant ou complètement continu. Par conséquent, le **théorème du point fixe** par rapport à un opérateur condensant de puissance convexe est une généralisation du célèbre **théorème du point fixe de Sadovskii**.

Théorème 3.2 Supposons que la fonction non linéaire $f : I \times E \times E \times E \rightarrow E$ est continue au sens de Carathéodory. Si les hypothèses **(F1)** et **(F2)** sont satisfaites, alors le problème (1.10) admet au moins une solution intégrale dans l'espace $C(I, E)$ à condition que

$$C\rho a^{\alpha-\beta}\delta_1 < 1. \quad (3.12)$$

Démonstration. Définissons un opérateur $\mathcal{Q}$ sur l'espace $C(I, E)$ par

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}u)(t) &= A^{-1}(0)u_0 + \int_0^t \psi(t-\eta, \eta)U(\eta)u_0 d\eta \\ &+ \int_0^t \psi(t-\eta, \eta)f(\eta, u(\eta), (Tu)(\eta), (Su)(\eta))d\eta \\ &+ \int_0^t \int_0^\eta \psi(t-\eta, \eta)\varphi(\eta, s)f(s, u(s), (Tu)(s), (Su)(s))dsd\eta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Par calcul direct et les propriétés des opérateurs $\psi(t, s)$, $\varphi(t, \eta)$ et $U(t)$, il est facile de voir que l'opérateur $\mathcal{Q}$ envoie $C(I, E)$ dans $C(I, E)$ et est bien défini. D'après la Définition 3.1, on peut

vérifier que la solution intégrale du problème de valeur initiale (3.1) est équivalente au point fixe de l'opérateur $\mathcal{Q}$ défini par (3.13). Dans ce qui suit, nous allons montrer que l'opérateur $\mathcal{Q}$ admet au moins un point fixe en appliquant le **théorème du point fixe par rapport à un opérateur condensant de puissance convexe**. D'abord, nous prouvons qu'il existe une constante positive R telle que l'opérateur $\mathcal{Q}$ défini par (3.13) envoie l'ensemble Ω_R dans Ω_R . Si ce n'était pas le cas, il existerait $t_r \in I$ et $u_r \in \Omega_r$ tels que $\|(\mathcal{Q}u_r)(t_r)\| > r$ pour chaque $r > 0$. En combinant les lemmes 3.1-3.3, l'hypothèse (F1) et l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 r &< \|(\mathcal{Q}u_r)(t_r)\| \leq \|A^{-1}(0)u_0\| + \left\| \int_0^{t_r} \psi(t_r - \eta, \eta) U(\eta) u_0 d\eta \right\| \\
 &+ \left\| \int_0^{t_r} \psi(t_r - \eta, \eta) f(\eta, u_r(\eta), (Tu_r)(\eta), (Su_r)(\eta)) d\eta \right\| \\
 &+ \left\| \int_0^{t_r} \int_0^\eta \psi(t_r - \eta, \eta) \varphi(\eta, s) f(s, u_r(s), (Tu_r)(s), (Su_r)(s)) ds d\eta \right\| \\
 &\leq C\|u_0\| + C^2 \int_0^{t_r} (t_r - \eta)^{\alpha-1} (1 + \eta^\gamma) \|u_0\| d\eta \\
 &+ C \int_0^{t_r} (t_r - \eta)^{\alpha-1} \psi_r(\eta) d\eta + C^2 \int_0^{t_r} \int_0^\eta (t_r - \eta)^{\alpha-1} (\eta - s)^{\gamma-1} \psi_r(s) ds d\eta \\
 &\leq C\|u_0\| + C^2\|u_0\|(t_r)^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} + (t_r)^\gamma \mathbf{B}(\alpha, \gamma + 1) \right) \\
 &+ C \int_0^{t_r} (t_r - \eta)^{\alpha-1} \psi_r(\eta) d\eta + C^2 \mathbf{B}(\alpha, \gamma) \int_0^{t_r} (t_r - \eta)^{\alpha+\gamma-1} \psi_r(\eta) d\eta \\
 &\leq C\|u_0\| + C^2\|u_0\| a^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} + a^\gamma \mathbf{B}(\alpha, \gamma + 1) \right) \\
 &+ C \left(\int_0^{t_r} (t_r - \eta)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}} d\eta \right)^{1-\alpha_1} \left(\int_0^{t_r} \psi_r^{\frac{1}{\beta}}(\eta) d\eta \right)^\beta \\
 &+ C^2 \mathbf{B}(\alpha, \gamma) \left(\int_0^{t_r} (t_r - \eta)^{\frac{\alpha+\gamma-1}{1-\beta}} d\eta \right)^{1-\beta} \left(\int_0^{t_r} \psi_r^{\frac{1}{\beta}}(\eta) d\eta \right)^\beta \\
 &\leq C\|u_0\| + C^2\|u_0\| a^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} + a^\gamma \mathbf{B}(\alpha, \gamma + 1) \right) \\
 &+ C a^{\alpha-\beta} \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} \|\psi_r\|_{L^{\frac{1}{\beta}}[0,a]} \\
 &+ C^2 \mathbf{B}(\alpha, \gamma) a^{\alpha+\gamma-\beta} \left(\frac{1-\beta}{\alpha+\gamma-\beta} \right)^{1-\beta} \|\psi_r\|_{L^{\frac{1}{\beta}}[0,a]}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

En divisant les deux côtés de (3.14) par r et en prenant la limite inférieure lorsque $r \rightarrow +\infty$,

combiné avec l'hypothèse (3.12), nous obtenons :

$$\begin{aligned} 1 &\leq C\rho a^{\alpha-\beta} \left[\left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} + C\mathbf{B}(\alpha, \gamma) a^\gamma \left(\frac{1-\beta}{\alpha+\gamma-\beta} \right)^{1-\beta} \right] \\ &= C\rho a^{\alpha-\beta} \delta_1 < 1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Alors (3.15) est une contradiction. Par conséquent, nous avons prouvé que $\mathcal{Q} : \Omega_R \rightarrow \Omega_R$. Ensuite, nous prouvons que l'opérateur $\mathcal{Q} : \Omega_R \rightarrow \Omega_R$ est continu. Pour ce faire, soit $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega_R$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$ dans Ω_R . Par la continuité de Carathéodory de la fonction non linéaire f , nous obtenons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(t, u_n(t), (Tu_n)(t), (Su_n)(t)) - f(t, u(t), (Tu)(t), (Su)(t))\| = 0$$

pour presque tout $t \in I$. Par (3.13) et les Lemmes 3.1-3.3 combinés avec une méthode de calcul similaire à celle utilisée dans (3.2), nous avons

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{Q}u_n)(t) - (\mathcal{Q}u)(t)\| \\ &\leq \left\| \int_0^t \psi(t-\eta, \eta) [f(\eta, u_n(\eta), (Tu_n)(\eta), (Su_n)(\eta)) - f(\eta, u(\eta), (Tu)(\eta), (Su)(\eta))] d\eta \right\| \\ &+ \left\| \int_0^t \int_0^\eta \psi(t-\eta, \eta) \varphi(\eta, s) [f(s, u_n(s), (Tu_n)(s), (Su_n)(s)) - f(s, u(s), (Tu)(s), (Su)(s))] ds d\eta \right\| \\ &\leq C \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} \|f(\eta, u_n(\eta), (Tu_n)(\eta), (Su_n)(\eta)) - f(\eta, u(\eta), (Tu)(\eta), (Su)(\eta))\| d\eta \\ &+ C^2 \int_0^t \int_0^\eta (t-\eta)^{\alpha-1} (\eta-s)^{\gamma-1} \|f(s, u_n(s), (Tu_n)(s), (Su_n)(s)) - f(s, u(s), (Tu)(s), (Su)(s))\| ds d\eta, \\ &\forall t \in I. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Par l'hypothèse (F1), nous avons pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} &(t-\eta)^{\alpha-1} \|f(\eta, u_n(\eta), (Tu_n)(\eta), (Su_n)(\eta)) - f(\eta, u(\eta), (Tu)(\eta), (Su)(\eta))\| \\ &\leq 2(t-\eta)^{\alpha-1} \psi_R(\eta) \end{aligned} \quad (3.17)$$

pour presque tout $\eta \in [0, t]$. Par l'hypothèse (F1) et le Lemme 3.3, nous obtenons que pour tout $t \in I$, $0 \leq \eta \leq t$ et presque tout $s \in [0, \eta]$,

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_0^\eta (t-\eta)^{\alpha-1} (\eta-s)^{\gamma-1} \|f(s, u_n(s), (Tu_n)(s), (Su_n)(s)) - f(s, u(s), (Tu)(s), (Su)(s))\| ds d\eta \\ &\leq 2 \int_0^t \int_0^\eta (t-\eta)^{\alpha-1} (\eta-s)^{\gamma-1} \psi_R(s) ds d\eta \\ &= 2\mathbf{B}(\alpha, \gamma) \int_0^t (t-\eta)^{\alpha+\gamma-1} \psi_R(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Du fait que les fonctions $\eta \rightarrow 2(t - \eta)^{\alpha-1}\psi_R(\eta)$ et $\eta \rightarrow 2\mathbf{B}(\alpha, \gamma)(t - \eta)^{\alpha+\gamma-1}\psi_R(\eta)$ sont intégrables au sens de Lebesgue pour presque tout $\eta \in [0, t]$ et pour tout $t \in I$, combiné avec (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous savons que

$$\|(\mathcal{Q}u_n)(t) - (\mathcal{Q}u)(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

pour tout $t \in I$. Donc

$$\|\mathcal{Q}u_n - \mathcal{Q}u\|_C \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

ce qui signifie que $\mathcal{Q} : \Omega_R \rightarrow \Omega_R$ est un opérateur continu. Maintenant, nous allons démontrer que $\mathcal{Q} : \Omega_R \rightarrow \Omega_R$ est un opérateur équicontinu. Pour tout $u \in \Omega_R$ et $0 \leq t' < t'' \leq a$, en utilisant (3.1) et l'hypothèse (F1), nous savons que

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{Q}u)(t'') - (\mathcal{Q}u)(t')\| &\leq \left\| \int_{t'}^{t''} \psi(t'' - \eta, \eta) U(\eta) u_0 d\eta \right\| + \left\| \int_0^{t'} [\psi(t'' - \eta, \eta) - \psi(t' - \eta, \eta)] U(\eta) u_0 d\eta \right\| \\ &\quad + \left\| \int_{t'}^{t''} \psi(t'' - \eta, \eta) f(\eta, u(\eta), (Tu)(\eta), (Su)(\eta)) d\eta \right\| \\ &\quad + \left\| \int_0^{t'} [\psi(t'' - \eta, \eta) - \psi(t' - \eta, \eta)] f(\eta, u(\eta), (Tu)(\eta), (Su)(\eta)) d\eta \right\| \\ &\quad + \left\| \int_{t'}^{t''} \int_0^\eta \psi(t'' - \eta, \eta) \varphi(\eta, s) f(s, u(s), (Tu)(s), (Su)(s)) ds d\eta \right\| \\ &\quad + \left\| \int_0^{t'} \int_0^\eta [\psi(t'' - \eta, \eta) - \psi(t' - \eta, \eta)] \varphi(\eta, s) \cdot f(s, u(s), (Tu)(s), (Su)(s)) ds d\eta \right\| \\ &\leq J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{t'}^{t''} \|\psi(t'' - \eta, \eta) U(\eta)\| \cdot \|u_0\| d\eta, \\ J_2 &= \int_0^{t'} \|[\psi(t'' - \eta, \eta) - \psi(t' - \eta, \eta)] U(\eta)\| \cdot \|u_0\| d\eta, \\ J_3 &= \int_{t'}^{t''} \|\psi(t'' - \eta, \eta)\| \psi_R(\eta) d\eta, \\ J_4 &= \int_0^{t'} \|\psi(t'' - \eta, \eta) - \psi(t' - \eta, \eta)\| \psi_R(\eta) d\eta, \\ J_5 &= \int_{t'}^{t''} \int_0^\eta \|\psi(t'' - \eta, \eta) \varphi(\eta, s)\| \psi_R(s) ds d\eta, \\ J_6 &= \int_0^{t'} \int_0^\eta \|[\psi(t'' - \eta, \eta) - \psi(t' - \eta, \eta)] \varphi(\eta, s)\| \psi_R(s) ds d\eta. \end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de prouver que $J_k \rightarrow 0$ indépendamment de $u \in \Omega_R$ lorsque $t'' - t' \rightarrow 0$ pour $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Pour J_1 , d'après le Lemme 3.1, nous savons que

$$J_1 \leq C^2 \|u_0\| \int_{t'}^{t''} (t'' - \eta)^{\alpha-1} (1 + \eta^\gamma) d\eta \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad t'' - t' \rightarrow 0.$$

Pour $t' = 0$ et $0 < t'' \leq a$, il est facile de voir que $J_2 = 0$. Pour $t' > 0$ et $\epsilon > 0$ suffisamment petit, en utilisant le Lemme 3.1 et le fait que la fonction $\psi(t - \eta, \eta)$ est continue en topologie uniforme par rapport aux variables t et η pour $0 \leq t \leq a$ et $0 \leq \eta \leq t - \epsilon$, nous avons

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \sup_{\eta \in [0, t' - \epsilon]} \|\psi(t'' - \eta, \eta) - \psi(t' - \eta, \eta)\| \cdot C \|u_0\| \int_0^{t' - \epsilon} (1 + \eta^\gamma) d\eta \\ &\quad + C^2 \|u_0\| \int_{t' - \epsilon}^{t'} [(t'' - \eta)^{\alpha-1} + (t' - \eta)^{\alpha-1}] (1 + \eta^\gamma) d\eta \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad t'' - t' \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pour J_3 , en utilisant le Lemme 3.1, l'hypothèse (F1) et l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned} J_3 &\leq C \int_{t'}^{t''} (t'' - \eta)^{\alpha-1} \psi_R(\eta) d\eta \\ &\leq C \left(\int_{t'}^{t''} (t'' - \eta)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}} d\eta \right)^{1-\beta} \left(\int_{t'}^{t''} \psi_R^{\frac{1}{\beta}}(\eta) d\eta \right)^{\beta} \\ &\leq C \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{1-\beta} \|\psi_R\|_{L^{\frac{1}{\beta}}[0, a]} (t'' - t')^{\alpha-\beta} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad t'' - t' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pour $t' = 0$ et $0 < t'' \leq a$, il est facile de voir que $J_4 = 0$. Pour $t' > 0$ et $\epsilon > 0$ suffisamment petit, en utilisant le Lemme 2.6 et le fait que la fonction $\psi(t - \eta, \eta)$ est continue en topologie uniforme par rapport aux variables t et η pour $0 \leq t \leq a$ et $0 \leq \eta \leq t - \epsilon$, nous savons que

$$\begin{aligned} J_4 &\leq (t' - \epsilon)^{1-\beta} \|\psi_R\|_{L^{\frac{1}{\beta}}[0, a]} \sup_{\eta \in [0, t' - \epsilon]} \|\psi(t'' - \eta, \eta) - \psi(t' - \eta, \eta)\| \\ &\quad + C \int_{t' - \epsilon}^{t'} [(t'' - \eta)^{\alpha-1} + (t' - \eta)^{\alpha-1}] \psi_R(\eta) d\eta \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad t'' - t' \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pour J_5 , en utilisant le Lemme 3.1, l'hypothèse (F1) et le fait que la fonction $\eta \rightarrow (t'' - \eta)^{\alpha-1} \Gamma_\eta^\gamma \psi_R(\eta)$ est intégrable au sens de Lebesgue, nous avons

$$\begin{aligned} J_5 &\leq C^2 \int_{t'}^{t''} \int_0^\eta (t'' - \eta)^{\alpha-1} (\eta - s)^{\gamma-1} \psi_R(s) ds d\eta \\ &\leq C^2 \Gamma(\gamma) \int_{t'}^{t''} (t'' - \eta)^{\alpha-1} \Gamma_\eta^\gamma \psi_R(\eta) d\eta \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad t'' - t' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pour $t' = 0$ et $0 < t'' \leq a$, nous avons $J_6 = 0$. Pour $t' > 0$ et $\epsilon > 0$ suffisamment petit, d'après le Lemme 3.1, l'hypothèse (F1), les faits que les fonctions $\eta \rightarrow (t'' - \eta)^{\alpha-1} \Gamma_\eta^\gamma \psi_R(\eta)$ et $\eta \rightarrow (t' - \eta)^{\alpha-1} \Gamma_\eta^\gamma \psi_R(\eta)$ sont intégrables au sens de Lebesgue, ainsi que la fonction $\psi(t - \eta, \eta)$ est continue en topologie uniforme par rapport aux variables t et η pour $0 \leq t \leq a$ et $0 \leq \eta \leq t - \epsilon$, nous savons que

$$\begin{aligned} J_6 &\leq \sup_{\eta \in [0, t' - \epsilon]} \|\psi(t'' - \eta, \eta) - \psi(t' - \eta, \eta)\| C \int_0^{t' - \epsilon} \int_0^\eta (\eta - s)^{\gamma-1} \psi_R(s) ds d\eta \\ &\quad + C^2 \int_{t' - \epsilon}^{t'} \int_0^\eta [(t'' - \eta)^{\alpha-1} + (t' - \eta)^{\alpha-1}] (\eta - s)^{\gamma-1} \psi_R(s) ds d\eta \\ &\leq \left(\frac{1 - \beta}{\gamma - \beta} \right)^{1-\beta} \frac{C(t')^\gamma \|\psi_R\|_{L^{\frac{1}{\beta}}[0, a]}}{\gamma} \sup_{\eta \in [0, t' - \epsilon]} \|\psi(t'' - \eta, \eta) - \psi(t' - \eta, \eta)\| \\ &\quad + C^2 \Gamma(\gamma) \int_{t' - \epsilon}^{t'} [(t'' - \eta)^{\alpha-1} \Gamma_\eta^\gamma \psi_R(\eta) + (t' - \eta)^{\alpha-1} \Gamma_\eta^\gamma \psi_R(\eta)] d\eta \rightarrow 0 \\ &\quad \text{lorsque } t'' - t' \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\|(Qu)(t'') - (Qu)(t')\| \rightarrow 0$ indépendamment de $u \in \Omega_R$ quand $t'' - t' \rightarrow 0$. D'où l'opérateur $\mathcal{Q} : \Omega_R \rightarrow \Omega_R$ est équicontinu. Ensuite, nous prouvons que $\mathcal{Q} : F \rightarrow F$ est un opérateur condensant à puissance convexe, où $F = \overline{\text{co}} \mathcal{Q}(\Omega_R)$ et $\overline{\text{co}}$ désigne l'enveloppe convexe fermée. On peut alors facilement vérifier que l'opérateur $\mathcal{Q}$ envoie F dans lui-même et que $F \subset C(I, E)$ est équicontinu. Soit $u_0 \in F$. Dans ce qui suit, nous montrerons qu'il existe un entier positif n_0 tel que pour tout sous-ensemble borné et non précompact $D \subset F$,

$$\mu_C(\mathcal{Q}^{(n_0, u_0)}(D)) < \mu_C(D). \quad (3.19)$$

Pour tout $D \subset F$ et $u_0 \in F$, par la définition de l'opérateur $\mathcal{Q}^{(n, u_0)}$ et l'équicontinuité de F , nous obtenons que $\mathcal{Q}^{(n, u_0)}(D) \subset \Omega_R$ est également équicontinu. Par conséquent, d'après le Lemme 3.6, nous avons :

$$\mu_C(\mathcal{Q}^{(n, u_0)}(D)) = \max_{t \in I} \mu(\mathcal{Q}^{(n, u_0)}(D)(t)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

D'après le Lemme 3.7, il existe un ensemble dénombrable $D_1 = \{u_n^1\} \subset D$, tel que :

$$\mu(\mathcal{Q}(D)(t)) \leq 2\mu(\mathcal{Q}(D_1)(t)). \quad (3.21)$$

En utilisant le fait que

$$\int_0^a u(s) ds \in a \overline{\text{co}} \{u(s) \mid s \in I\}, \quad \forall u \in C(I, E),$$

nous savons que

$$\mu\left(\left\{\int_0^t K(t,s)u(s)ds \mid u \in D, t \in I\right\}\right) \leq aK_0\mu(\{u(t) \mid u \in D, t \in I\}) \quad (3.22)$$

et

$$[\mu\left(\left\{\int_0^a H(t,s)u(s)ds \mid u \in D, t \in I\right\}\right) \leq aH_0\mu(\{u(t) \mid u \in D, t \in I\}). \quad (3.23)$$

où $K_0 = \max_{(t,s) \in \Delta} |K(t,s)|$, $H_0 = \max_{(t,s) \in \Delta_0} |H(t,s)|$. Par conséquent, en utilisant (3.1), (3.21), (3.22), (3.23), les Lemmes 3.1, 3.3, 3.8 et l'hypothèse **(F2)**, nous avons :

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{Q}^{(1,u_0)}(D)(t)) &= \mu(\mathcal{Q}(D)(t)) \leq 2\mu(\mathcal{Q}(D_1)(t)) \\ &\leq 2\mu\left(A^{-1}(0)u_0 + \int_0^t \psi(t-\eta, \eta)U(\eta)u_0 d\eta\right) \\ &\quad + 2\mu\left(\left\{\int_0^t \psi(t-\eta, \eta)f(\eta, u_n^1(\eta), (Tu_n^1)(\eta), (Su_n^1)(\eta))d\eta\right\}\right) \\ &\quad + 2\mu\left(\left\{\int_0^t \int_0^\eta \psi(t-\eta, \eta)\varphi(\eta, s) \cdot f(s, u_n^1(s), (Tu_n^1)(s), (Su_n^1)(s))dsd\eta\right\}\right) \\ &\leq 4C \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} [L_1\mu(D_1(\eta)) + L_2\mu((TD_1)(\eta)) + L_3\mu((SD_1)(\eta))]d\eta \\ &\quad + 8C^2 \int_0^t \int_0^\eta (t-\eta)^{\alpha-1}(\eta-s)^{\gamma-1} \cdot [L_1\mu(D_1(s)) + L_2\mu((TD_1)(s)) + L_3\mu((SD_1)(s))]dsd\eta \\ &\leq 4C \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} (L_1 + aK_0L_2 + aH_0L_3)\mu(D_1(\eta))d\eta \\ &\quad + 8C^2B(\alpha, \gamma) \int_0^t (t-\eta)^{\alpha+\gamma-1} (L_1 + aK_0L_2 + aH_0L_3)\mu(D_1(\eta))d\eta \\ &\leq \frac{4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\mu_C(D) + \frac{8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(1+\gamma+\alpha)}\mu_C(D), \end{aligned} \quad (3.24)$$

où

$$M := L_1 + aK_0L_2 + aH_0L_3. \quad (3.25)$$

Encore une fois, d'après le Lemme 3.7, il existe un ensemble dénombrable

$D_2 = \{u_n^2\} \subset \overline{\text{co}}\{\mathcal{Q}^{(1,u_0)}(D), u_0\}$, tel que :

$$\mu\left(\mathcal{Q}(\overline{\text{co}}\{\mathcal{Q}^{(1,u_0)}(D), u_0\})(t)\right) \leq 2\mu(\mathcal{Q}(D_2)(t)). \quad (3.26)$$

Par conséquent, en utilisant (3.1), (3.22), 3.23, (3.24), (3.25), (3.26), les Lemmes 3.1, 3.3, 3.5

(3.), 3.8 et l'hypothèse **(F2)**, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \mu(\mathcal{Q}^{(2,u_0)}(D)(t)) &= \mu\left(\mathcal{Q}(\overline{\text{co}}\{\mathcal{Q}^{(1,u_0)}(D), u_0\})(t)\right) \leq 2\mu(\mathcal{Q}(D_2)(t)) \\
 &\leq 2\mu\left(A^{-1}(0)u_0 + \int_0^t \psi(t-\eta, \eta)U(\eta)u_0 d\eta\right) \\
 &\quad + 2\mu\left(\left\{\int_0^t \psi(t-\eta, \eta)f(\eta, u_n^2(\eta), (Tu_n^2)(\eta), (Su_n^2)(\eta))d\eta\right\}\right) \\
 &\quad + 2\mu\left(\left\{\int_0^t \int_0^\eta \psi(t-\eta, \eta)\varphi(\eta, s)f(s, u_n^2(s), (Tu_n^2)(s), (Su_n^2)(s))dsd\eta\right\}\right) \\
 &\leq 4CM \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1}\mu(D_2(\eta))d\eta + 8C^2MB(\alpha, \gamma) \cdot \int_0^t (t-\eta)^{\alpha+\gamma-1}\mu(D_2(\eta))d\eta \\
 &\leq 4CM \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1}\mu\left(\overline{\text{co}}\{\mathcal{Q}^{(1,u_0)}(D), u_0\}(\eta)\right)d\eta \\
 &\quad + 8C^2MB(\alpha, \gamma) \int_0^t (t-\eta)^{\alpha+\gamma-1}\mu\left(\overline{\text{co}}\{\mathcal{Q}^{(1,u_0)}(D), u_0\}(\eta)\right)d\eta \\
 &\leq 4CM \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1}\left[\frac{4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(1+\gamma+\alpha)}\right]d\eta \cdot \mu_C(D) \\
 &\quad + 8C^2MB(\alpha, \gamma) \int_0^t (t-\eta)^{\alpha+\gamma-1}\left[\frac{4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(1+\gamma+\alpha)}\right]d\eta \cdot \mu_C(D) \\
 &= \frac{4CM \cdot 4CM\Gamma^2(\alpha)t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\mu_C(D) + \frac{2 \cdot 4CM \cdot 8C^2M\Gamma^2(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{2\alpha+\gamma}}{\Gamma(1+\gamma+2\alpha)}\mu_C(D) \\
 &\quad + \frac{8C^2M \cdot 8C^2M\Gamma^2(\alpha)\Gamma^2(\gamma)t^{2\alpha+2\gamma}}{\Gamma(1+2\gamma+2\alpha)}\mu_C(D).
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Pour tout $t \in I$, supposons que

$$\begin{aligned}
 &\mu\left(\mathcal{Q}^{(k,u_0)}(D)(t)\right) \\
 &\leq \frac{C_k^0(4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha)^k \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma})^0}{\Gamma(1+k\alpha)}\mu_C(D) \\
 &\quad + \frac{C_k^1(4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha)^{k-1} \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma})^1}{\Gamma(1+\gamma+k\alpha)}\mu_C(D) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \frac{C_k^{k-1}(4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha)^1 \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma})^{k-1}}{\Gamma(1+(k-1)\gamma+k\alpha)}\mu_C(D) \\
 &\quad + \frac{C_k^k(4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha)^0 \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma})^k}{\Gamma(1+k\gamma+k\alpha)}\mu_C(D).
 \end{aligned}$$

Alors, d'après le Lemme 3.7, il existe un ensemble dénombrable

$D_{k+1} = \{u_n^{k+1}\} \subset \overline{\text{co}}\{\mathcal{Q}^{(k,u_0)}(D), u_0\}$, tel que

$$\mu\left(\mathcal{Q}(\overline{\text{co}}\{\mathcal{Q}^{(k,u_0)}(D), u_0\})(t)\right) \leq 2\mu(\mathcal{Q}(D_{k+1})(t)). \quad (3.28)$$

A partir des équations (3.1), (3.22), (3.23), (3.25), (3.28), des Lemmes 3.1, 3.3, 3.5 (iii), 3.8, et de l'hypothèse **(F2)** ainsi que d'une transformation intégrale appropriée, nous obtenons que

$$\begin{aligned} & \mu(\mathcal{Q}^{(k+1,u_0)}(D)(t)) \\ &= \mu\left(\mathcal{Q}(\overline{\text{co}}\{\mathcal{Q}^{(k,u_0)}(D), u_0\})(t)\right) \leq 2\mu(\mathcal{Q}(D_{k+1})(t)) \\ &\leq 4CM \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} \mu(D_{k+1}(\eta)) d\eta \\ &\quad + 8C^2MB(\alpha, \gamma) \int_0^t (t-\eta)^{\alpha+\gamma-1} \mu(D_{k+1}(\eta)) d\eta \\ &\leq 4CM \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} \mu\left(\overline{\text{co}}\{\mathcal{Q}^{(k,u_0)}(D), u_0\}(\eta)\right) d\eta \\ &\quad + 8C^2MB(\alpha, \gamma) \int_0^t (t-\eta)^{\alpha+\gamma-1} \mu\left(\overline{\text{co}}\{\mathcal{Q}^{(k,u_0)}(D), u_0\}(\eta)\right) d\eta \\ &\leq \frac{C_{k+1}^0(4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha)^{k+1} \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma})^0}{\Gamma(1+(k+1)\alpha)} \mu_C(D) \\ &\quad + \frac{C_{k+1}^1(4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha)^k \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma})^1}{\Gamma(1+\gamma+(k+1)\alpha)} \mu_C(D) \\ &\quad \vdots + \frac{C_{k+1}^k(4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha)^1 \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma})^k}{\Gamma(1+k\gamma+(k+1)\alpha)} \mu_C(D) \\ &\quad + \frac{C_{k+1}^{k+1}(4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha)^0 \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma})^{k+1}}{\Gamma(1+(k+1)\gamma+(k+1)\alpha)} \mu_C(D). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Par conséquent, en utilisant la méthode d'induction mathématique, que pour tout entier positif n et $t \in I$,

$$\begin{aligned} & \mu\left(\mathcal{Q}^{(n,u_0)}(D)(t)\right) \\ &\leq \frac{C_n^0(4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha)^n \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma})^0}{\Gamma(1+n\alpha)} \mu_C(D) \\ &\quad + \frac{C_n^1(4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha)^{n-1} \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma})^1}{\Gamma(1+\gamma+n\alpha)} \mu_C(D) \\ &\quad \vdots + \frac{C_n^{n-1}(4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha)^1 \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma})^{n-1}}{\Gamma(1+(n-1)\gamma+n\alpha)} \mu_C(D) \\ &\quad + \frac{C_n^n(4CM\Gamma(\alpha)t^\alpha)^0 \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma})^n}{\Gamma(1+n\gamma+n\alpha)} \mu_C(D). \end{aligned} \quad (3.30)$$

D'après (3.20) et (3.30), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 \mu_C\left(\mathcal{Q}^{(n,u_0)}(D)\right) &= \max_{t \in I} \mu\left(\mathcal{Q}^{(n,u_0)}(D)(t)\right) \\
 &\leq \left[\frac{(4CM\Gamma(\alpha))^n \cdot a^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \right. \\
 &\quad + \frac{C_n^1(4CM\Gamma(\alpha))^{n-1} \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma))^1 \cdot a^{\gamma+n\alpha}}{\Gamma(1+\gamma+n\alpha)} \\
 &\quad + \dots + \frac{C_n^{n-1}(4CM\Gamma(\alpha))^1 \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma))^{n-1} \cdot a^{(n-1)\gamma+n\alpha}}{\Gamma(1+(n-1)\gamma+n\alpha)} \\
 &\quad \left. + \frac{(8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma))^n \cdot a^{n\gamma+n\alpha}}{\Gamma(1+n\gamma+n\alpha)} \right] \mu_C(D).
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Grâce à la formule bien connue de Stirling

$$\Gamma(1+s) = \sqrt{2\pi s} \left(\frac{s}{e}\right)^s e^{\frac{\theta}{12s}}, \quad s > 0, \quad 0 < \theta < 1,$$

nous obtenons que lorsque $n \rightarrow \infty$, alors

$$\begin{aligned}
 \frac{(4CM\Gamma(\alpha))^n \cdot a^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} &= \frac{(4CM\Gamma(\alpha))^n \cdot a^{n\alpha}}{\sqrt{2\pi n\alpha} \left(\frac{n\alpha}{e}\right)^{n\alpha} e^{\frac{\theta}{12n\alpha}}} \rightarrow 0, \\
 \frac{C_n^1(4CM\Gamma(\alpha))^{n-1} \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma))^1 \cdot a^{\gamma+n\alpha}}{\Gamma(1+\gamma+n\alpha)} \\
 &= \frac{C_n^1(4CM\Gamma(\alpha))^{n-1} \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma))^1 \cdot a^{\gamma+n\alpha}}{\sqrt{2\pi(\gamma+n\alpha)} \left(\frac{\gamma+n\alpha}{e}\right)^{\gamma+n\alpha} e^{\frac{\theta}{12(\gamma+n\alpha)}}} \rightarrow 0, \\
 \dots \dots \dots \\
 \frac{C_n^{n-1}(4CM\Gamma(\alpha))^1 \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma))^{n-1} \cdot a^{(n-1)\gamma+n\alpha}}{\Gamma(1+(n-1)\gamma+n\alpha)} \\
 &= \frac{C_n^{n-1}(4CM\Gamma(\alpha))^1 \cdot (8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma))^{n-1} \cdot a^{(n-1)\gamma+n\alpha}}{\sqrt{2\pi((n-1)\gamma+n\alpha)} \left(\frac{(n-1)\gamma+n\alpha}{e}\right)^{(n-1)\gamma+n\alpha} e^{\frac{\theta}{12((n-1)\gamma+n\alpha)}}} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

et

$$\frac{(8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma))^n \cdot a^{n\gamma+n\alpha}}{\Gamma(1+n\gamma+n\alpha)} = \frac{(8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma))^n \cdot a^{n\gamma+n\alpha}}{\sqrt{2\pi(n\gamma+n\alpha)} \left(\frac{n\gamma+n\alpha}{e}\right)^{n\gamma+n\alpha} e^{\frac{\theta}{12(n\gamma+n\alpha)}}} \rightarrow 0.$$

Par conséquent, il doit exister un entier positif n_0 , suffisamment grand, tel que

$$\frac{(4CM\Gamma(\alpha))^{n_0} \cdot a^{n_0\alpha}}{\Gamma(1+n_0\alpha)} + \dots + \frac{(8C^2M\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma))^{n_0} \cdot a^{n_0\gamma+n_0\alpha}}{\Gamma(1+n_0\gamma+n_0\alpha)} < 1. \tag{3.32}$$

A partir de (3.28) et (3.32), (3.19) est satisfaite, alors $\mathcal{Q} : F \rightarrow F$ est un opérateur à condensation convexe-puissance.

D'après le Lemme 3.9, l'opérateur $\mathcal{Q}$ défini par (3.1) admet au moins un point fixe $u \in F$, qui est précisément une solution intégrale du problème de valeur initiale (3.1). $\square$

Théorème 3.3 *Supposons que la fonction non linéaire $f : I \times E \times E \times E \rightarrow E$ est continue au sens de Carathéodory. Si l'hypothèse **(F2)** et les hypothèses suivantes **(F1)*** Il existe une fonction $\phi \in L^{\frac{1}{\beta}}(I, \mathbb{R}^+)$ pour $0 \leq \beta < \min\{\alpha, \gamma\}$ et une fonction continue non décroissante $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que*

$$\|f(t, u, Tu, Su)\| \leq \phi(t)\Phi(\|u\|)$$

pour presque tout $t \in I$ et tout $u \in E$, sont satisfaites, alors le problème (3.1) admet au moins une solution intégrale dans $C(I, E)$ pourvu qu'il existe une constante positive R telle que

$$\delta_1 \Phi(R) a^{\alpha-\beta} \|\phi\|_{L^{\frac{1}{\beta}}[0,a]} \leq \frac{R}{C} - \delta_2 \|u_0\|. \quad (3.33)$$

Démonstration. D'après la preuve du Théorème 3.2, nous savons que la solution intégrale du problème à valeur initiale (3.1) est équivalente au point fixe de l'opérateur $\mathcal{Q}$ défini par (3.13). Dans ce qui suit, nous montrons qu'il existe une constante positive R telle que l'opérateur $\mathcal{Q}$ envoie l'ensemble Ω_R dans Ω_R . Pour tout $u \in \Omega_R$ et presque tout $t \in I$, en

utilisant les Lemmes 3.1-3.3, l'hypothèse (F1)* et l'inégalité de Holder, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \|(\mathcal{Q}u)(t)\| &\leq \|A^{-1}(0)u_0\| + \left\| \int_0^t \psi(t-\eta, \eta) U(\eta) g(u) d\eta \right\| \\
 &+ \left\| \int_0^t \psi(t-\eta, \eta) f(\eta, u(\eta), (Tu)(\eta), (Su)(\eta)) d\eta \right\| \\
 &+ \left\| \int_0^t \int_0^\eta \psi(t-\eta, \eta) \varphi(\eta, s) f(s, u(s), (Tu)(s), (Su)(s)) ds d\eta \right\| \\
 &\leq C\|u_0\| + C^2 \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} (1+\eta^\gamma) \|u_0\| d\eta \\
 &+ C \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} \phi(\eta) \Phi(\|u\|) d\eta \\
 &+ C^2 \int_0^t \int_0^\eta (t-\eta)^{\alpha-1} (\eta-s)^{\gamma-1} \phi(s) \Phi(\|u\|) ds d\eta \\
 &\leq C\|u_0\| + C^2\|u_0\| t^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t^\gamma \mathbf{B}(\alpha, \gamma+1) \right) \\
 &+ C\Phi(R) \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1} \phi(\eta) d\eta \\
 &+ C^2\Phi(R) \mathbf{B}(\alpha, \gamma) \int_0^t (t-\eta)^{\alpha+\gamma-1} \phi(\eta) d\eta \\
 &\leq C\|u_0\| \delta_2 + C\Phi(R) \left(\int_0^t (t-\eta)^{\frac{\alpha-1}{1-\beta}} d\eta \right)^{1-\alpha_1} \left(\int_0^t \phi^{\frac{1}{\beta}}(\eta) d\eta \right)^\beta \\
 &+ C^2\Phi(R) \mathbf{B}(\alpha, \gamma) \left(\int_0^t (t-\eta)^{\frac{\alpha+\gamma-1}{1-\beta}} d\eta \right)^{1-\beta} \left(\int_0^t \phi^{\frac{1}{\beta}}(\eta) d\eta \right)^\beta \\
 &\leq C\|u_0\| \delta_2 + C\delta_1 \Phi(R) a^{\alpha-\beta} \|\phi\|_{L^{\frac{1}{\beta}}[0,a]} \leq R.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

D'après (3.34), l'opérateur $\mathcal{Q} : \Omega_R \rightarrow \Omega_R$. En appliquant une méthode similaire à celle utilisée dans la preuve du Théorème 3.2, nous pouvons montrer que $\mathcal{Q} : \Omega_R \rightarrow \Omega_R$ est continu et équicontinu, et que $\mathcal{Q} : \overline{\text{co}}\mathcal{Q}(\Omega_R) \rightarrow \overline{\text{co}}\mathcal{Q}(\Omega_R)$ est un opérateur condensant à puissance convexe. D'après le Lemme 3.9, l'opérateur $\mathcal{Q}$ défini par (3.13) admet au moins un point fixe $u \in \overline{\text{co}}\mathcal{Q}(\Omega_R)$, qui représente une solution intégrale du problème de valeur initiale (3.1).

□ Notons que dans cet chapitre, nous supposons seulement que la fonction non linéaire f est continue au sens de Carathéodory, ce qui est moins restrictif que la continuité uniforme requise dans les travaux [6], [7], [12], [11], [12] et [13].

3.2.2 Exemple d'application

Nous considérons le problème à valeur initiale suivant, pour une équation aux dérivées partielles non autonome fractionnaire avec une condition aux limites de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x, t) - \kappa(x, t) \Delta u(x, t) = \frac{\sin(\pi t)}{1+|u(x, t)|} + e^{-t} \sin \left(\int_0^t (t-s) u(x, s) ds \right) \\ + e^{-t} \cos \left(\int_0^1 e^{-|t-s|} u(x, s) ds \right), & x \in \Omega, \quad t \in I, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in I, \\ u(x, 0) = (\kappa(x, 0))^{-1} \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.35)$$

où $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ est la dérivée partielle fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo, $0 < \alpha \leq 1$, $I = [0, 1]$, Δ est l'opérateur Laplacien, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un domaine borné avec une frontière $\partial\Omega$ suffisamment lisse, le coefficient de conductivité thermique $\kappa(x, t)$ est continu sur $\Omega \times [0, 1]$ et uniformément holdérien en t , d'où que pour tout $t_1, t_2 \in I$, il existe une constante $0 < \gamma \leq 1$ et une constante positive C indépendante de t_1 et t_2 , telle que

$$|\kappa(x, t_2) - \kappa(x, t_1)| \leq C |t_2 - t_1|^\gamma, \quad x \in \Omega, \quad (3.36)$$

et $\varphi \in L^2(\Omega)$. Soit $E = L^2(\Omega)$ un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Nous définissons un opérateur $A(t)$ dans l'espace de Banach E par

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad A(t)u = -\kappa(x, t) \Delta u, \quad (3.37)$$

où $H^2(\Omega)$ est la complétion de l'espace $C^2(\Omega)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\theta| \leq 2} |D^\theta u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$C^2(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les fonctions continues définies sur Ω ayant des dérivées partielles continues d'ordre inférieur ou égal à 2, $H_0^1(\Omega)$ est la complétion de $C^1(\Omega)$ par rapport à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$, et $C_0^1(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $u \in C^1(\Omega)$ à support compact sur le domaine Ω . Il est bien connu d'après Pazy [10] que $-A(s)$ génère un semi-groupe analytique $e^{-tA(s)}$ dans E , on peut facilement vérifier que l'opérateur linéaire $-A(t)$ satisfait les hypothèses **(A1)** et **(A2)**. De plus, pour tout $t \in [0, 1]$, nous définissons :

$$u(t) = u(\cdot, t), \quad K(t, s) = t - s \quad \text{pour } 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

$$a = 1, \quad H(t, s) = e^{-|t-s|} \quad \text{pour } 0 \leq s, t \leq 1,$$

$$(Tu)(t) = \int_0^t K(t, s)u(\cdot, s) ds, \quad (Su)(t) = \int_0^1 H(t, s)u(\cdot, s) ds,$$

$$f(t, u(t), (Tu)(t), (Su)(t)) = \frac{\sin(\pi t)}{1 + |u(\cdot, t)|} + e^{-t} \sin((Tu)(t)) + e^{-t} \cos((Su)(t)),$$

$$A^{-1}(0) = (\kappa(\cdot, 0))^{-1}, \quad u_0 = \varphi(\cdot).$$

Le problème de valeur initiale pour l'équation aux dérivées partielles non autonome fractionnaire avec condition aux limites de Dirichlet homogène (3.35) peut être transformé sous la forme abstraite du problème de valeur initiale pour une équation intégral-différentielle évolutive non autonome fractionnaire de type mixte (3.1).

Théorème 3.4 *Le problème de valeur initiale pour l'équation différentielle partielle fractionnaire non autonome avec condition aux limites de Dirichlet homogène 3.35 admet au moins une solution intégrale $u \in C(\Omega \times [0, 1])$.*

Preuve. Par la définition du terme non linéaire f , on peut vérifier que l'hypothèse **(F1)** est vérifiée et

$$\psi_\tau(t) = \sqrt{\text{mes}\Omega}(\sin(\pi t) + 2e^{-t}), \quad \text{et } \beta = \rho = 0.$$

Par définition $f(t, u, v, w)$ est Lipschitzienne par rapport aux variables u, v et w avec les constantes de Lipschitz $k_u = 1, k_v = 1$ et $k_w = 1$. Alors, d'après le Lemme 3.5 (8), l'hypothèse (F2) est satisfaite avec les constantes positives

$$L_1 = L_2 = L_3 = 1.$$

Toutes les hypothèses du Théorème 3.2 sont satisfaites. Par conséquent, le problème de valeur initiale pour l'équation différentielle partielle fractionnaire non autonome avec condition aux limites de Dirichlet homogène (3.35) admet au moins une solution intégrale $u \in C(\Omega \times [0, 1])$.

Conclusion générale

Ce travail a permis d'approfondir l'étude des équations d'évolution abstraites en s'appuyant sur un cadre mathématique rigoureux, intégrant les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo dans des contextes autonomes et non autonomes.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié les équations d'évolution abstraites avec dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, en distinguant les cas où le semi-groupe est compact ou non compact. L'utilisation de la mesure de non-compactité a permis de caractériser les propriétés des opérateurs et de démontrer l'existence de solutions, en s'appuyant sur des théorèmes de point fixe et des techniques analytiques adaptées aux contextes de compacité limitée.

Le troisième chapitre s'est concentré sur le problème de Cauchy non-autonome avec dérivée fractionnaire de Caputo, intégrant une composante intégro-différentielle. Les résultats d'existence de solutions, appuyés par des lemmes préliminaires et l'application de la mesure de non-compactité, ont mis en évidence la capacité de cette approche à capturer le comportement de systèmes dynamiques complexes. L'exemple d'application présenté illustre l'efficacité de ces méthodes dans des contextes pratiques.

En somme, cette étude souligne l'importance des outils du calcul fractionnaire, des semi-groupes d'opérateurs et de la mesure de non-compactité pour analyser les équations d'évolution abstraites. La mesure de non-compactité, en particulier, a permis d'élargir l'analyse à des cadres où la compacité n'est pas garantie, renforçant ainsi la robustesse des résultats. Ces travaux ouvrent des perspectives pour approfondir l'étude de la stabilité des solutions, explorer des systèmes non linéaires plus complexes, ou appliquer ces méthodes à des problèmes issus de domaines variés tels que la physique, la biologie ou l'ingénierie. Ce travail constitue une avancée notable dans la compréhension et la modélisation mathématique des équations d'évolution abstraites.

Bibliographie

- [1] L. Byszewski, *Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 162, 2, 494–505, 1991.
- [2] L. Byszewski, *Existence, uniqueness and asymptotic stability of solutions of abstract nonlocal Cauchy problems*, Dynam. Systems Appl., 5, 4, 595–605, 1996.
- [3] H. Brézis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, New York : Springer, 2011.
- [4] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Math., vol. 840, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [5] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, In : van Mill, J. (ed.) North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
- [6] V. Lakshmikantham, S. Leela, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon Press, New York, 1981.
- [7] M. Li, C. Chen, F.B. Li, *On fractional powers of generators of fractional resolvent families*, J. Funct. Anal. 259 (2010) 2702-2726.
- [8] L. Liu, C. Wu, F. Guo, *Existence theorems of global solutions of initial value problems for nonlinear integro-differential equations of mixed type in Banach spaces and applications*, Comput. Math. Appl. 47 (2004) 13-22.
- [9] Z. Mei, J. Peng, Y. Zhang, *An operator theoretical approach to Riemann-Liouville fractional Cauchy problem*, Math. Nachr. 288 (2015) 784-797.
- [10] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

BIBLIOGRAPHIE

- [11] Pengyu Chen, Xuping Zhang, Yongxiang Li, *Cauchy problem for fractional non-autonomous evolution equations*, arXiv :1902.10321v1, [https ://doi.org/10.48550/arXiv.1902.10321](https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.10321).
- [12] H.B. Shi, W.T. Li, H.R. Sun, *Existence of mild solutions for abstract mixed type semilinear evolution equations*, Turk. J. Math. 35 (2011) 457-472.
- [13] X. Shu, Y. Shi, *A study on the mild solution of impulsive fractional evolution equations*, Appl. Math. Comput. 273 (2016) 465-476.
- [14] J. Sun, X. Zhang, *The fixed point theorem of convex-power condensing operator and applications to abstract semilinear evolution equations*, Acta Math. Sin. 48 (2005) 439-446 (en chinois).
- [15] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, seconde éd., Springer-Verlag, New York, 1997.
- [16] I.I. Vrabie, *Existence in the large for nonlinear delay evolution inclusions with nonlocal initial conditions*, J. Funct. Anal., 262 (2012) 1363-1391.
- [17] Zhou, Yong, *Basic theory of fractional differential equations*. World Scientific, 2023.
- [18] Zhou, Yong and Jiao, *Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations*, Computers & Mathematics with Applications, (2010).