

UNIVERSITE DE BLIDA 1
Institut d'Aéronautique et des Études Spatiales

THESE DE DOCTORAT

En Aéronautique
Spécialité : Aéronautique

EFFET DE LA PRESSION GÉNÉRATRICE SUR LES ONDES DE CHOC
OBLIQUES

Par
Mohammed MECHTA

Devant le jury composé de :

E. KHALI	Maitre de Conférences A, U. de Blida 1	Président
R. RENANE	Maitre de Conférences A, U. de Blida 1	Examineur
W. HAMAIDIA	Maitre de Conférences A, ESTA, Dar El Beida, Alger	Examineur
M. HAMZAOU	Maitre de Conférences A, U. de Tizi Ouzou	Examineur
A. BEKHTI	Maitre de Recherche A, CDER, Bouzareah, Alger	Examineur
Y. TOUFIK	Professeur, U.de Blida 1	Rapporteur

Blida, 2025

RESUME

Cette thèse traite des changements dans les propriétés de l'écoulement de l'air à travers une onde de choc oblique pour un gaz réel. L'écoulement traversant l'onde est étudié pour trouver une forme générale pour les ondes de choc obliques. L'objectif principal de ce travail sera le développement d'un nouvel algorithme numérique pour déterminer l'effet de la pression de stagnation sur l'écoulement supersonique pour des gaz thermiquement et caloriquement imparfaits avec un seuil de dissociation moléculaire, permettant une meilleure adéquation avec le comportement physique des ondes. Ainsi, les effets de la taille moléculaire et des forces d'attraction intermoléculaires sont utilisés pour corriger une équation d'état, souligner l'importance de la détermination de l'impact des paramètres de stagnation en amont sur les ondes de choc obliques. Il en résulte que la pression thermique spécifique ne reste pas constante et varie avec la température et la densité. À des nombres de Mach supérieurs à 2,0, l'augmentation de la température est considérable et l'augmentation de la densité est bien supérieure à celle prévue en supposant un comportement de gaz idéal. Les défauts calorifiques de l'air ont un impact significatif sur les paramètres des processus étudiés. Le calcul des erreurs entre le modèle actuel basé sur la théorie des gaz réels et un modèle de gaz parfait montre que l'influence des imperfections thermiques et caloriques associées à un gaz réel est importante et peuvent atteindre jusqu'à 16%.

Mots Clés

Écoulement Supersonique, Onde de Choc Normale, Onde de Choc Oblique, Gaz Réel, Gaz Parfait, Haute Température, Gaz Caloriquement Imparfait, Gaz Thermiquement Parfait, Rapports Thermodynamiques, Réflexion des Chocs, Coefficients Aérodynamiques.

ABSTRACT

This thesis deals with the changes in flow air properties across an oblique shock wave for a real gas. The flow is studied to determine a general form for oblique shock waves. The main objective of this work will result in the development of a new numerical algorithm to determine the effect of the stagnation pressure on supersonic flow for thermally and calorically imperfect gases with a molecular dissociation threshold, thus providing a better match with the physical behavior of the waves. So, the effects of molecular size and intermolecular attraction forces are used to correct a state equation, emphasizing the determination of the impact of upstream stagnation parameters on oblique shock waves. As a result, the specific heat at constant pressure does not remain constant and varies with the temperature and density. At Mach numbers greater than 2.0, the temperature rise considerably, is well above, that predicted assuming ideal gas behavior. It is shown that caloric imperfections in air have an appreciable effect on the parameters developed in the processes considered. Computation of errors between the present model based on real gas theory and a perfect gas model shows that the influence of the thermal and caloric imperfections associated with a real gas is important and can rise up to 16%.

Key words

Supersonic airflow, Normal shock wave, Oblique shock wave, Real gas, Perfect gas, High Temperature, Calorically Imperfect Gas, Thermally Perfect Gas, Thermodynamics Ratios, Shock Reflection, Aerodynamic Coefficients.

ملخص

تتناول هذه الأطروحة التغيرات في خصائص هواء التدفق عبر موجة صدمة مائلة لغاز حقيقي. يتم دراسة التدفق من خلال إيجاد شكل عام لموجات الصدمة المائلة. سيؤدي الهدف الرئيسي لهذا العمل إلى تطوير خوارزمية عددية جديدة لتحديد تأثير ضغط الركود على التدفق الأسرع من الصوت للغازات غير الكاملة حرارياً وحرارياً مع عتبة تفكك جزيئي، مما يعطي تقارباً أفضل مع السلوك الفيزيائي للموجات. لذا، يتم استخدام تأثيرات الحجم الجزيئي وقوى التجاذب بين الجزيئات لتصحيح معادلة الحالة، مع التركيز على تحديد تأثير معاملات الركود في المنبع على موجات الصدمة المائلة. ونتيجة لذلك، لا يظل الضغط الحراري النوعي ثابتاً ويختلف مع درجة الحرارة والكثافة. عند أعداد ماخ أكبر من 2.0، ترتفع درجة الحرارة بشكل كبير، ويكون ارتفاع الكثافة أعلى بكثير من المتوقع بافتراض سلوك الغاز المثالي. ويتضح أن العيوب الحرارية في الهواء لها تأثير ملموس على البارامترات التي تم تطويرها في العمليات التي يتم النظر فيها. يُظهر حساب الأخطاء بين النموذج الحالي المبني على نظرية الغاز الحقيقي ونموذج الغاز المثالي أن تأثير العيوب الحرارية والسرعات الحرارية المرتبطة بالغاز الحقيقي مهم ويمكن أن يرتفع إلى 16%.

كلمات المفاتيح

تدفق الهواء فوق الصوتي؛ موجة صدمة عادية؛ موجة صدمة مائلة؛ غاز حقيقي؛ غاز مثالي، درجات الحرارة المرتفعة، الغاز غير الكامل حرارياً، الغاز غير الكامل حرارياً، نسب الديناميكا الحرارية، انعكاس الصدمة، المعاملات الديناميكية الهوائية.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier infiniment mon dieu tout puissant pour l'aide qu'il m'a apporté pour la réalisation de ce modeste travail. Je remercie ma mère pour le courage et le soutien morale durant cette période de réalisation de ce travail.

Je tiens donner ma gratitude remerciement à mon directeur de thèse, monsieur **Toufik YAHIAOUI**, Professeur à l'Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de l'Université de Blida1 pour avoir assuré la direction de mon travail, et pour m'avoir apporté la rigueur scientifique nécessaire à son bon déroulement. Je le remercie encore pour sa disponibilité et son total dévouement de tous les jours malgré ces empêchements.

Monsieur, **KHALI ELHADI** Maitre de Conférences A à l'Institut d'Aéronautique et des Études Spatiales de l'Université de Blida 1, m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance

La présence de Monsieur, **RENANE RACHID** Maitre de Conférences A à l'Institut d'Aéronautique et des Études Spatiales de l'Université de Blida 1, dans mon jury, constitue un gage de confiance.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur, **HAMAIDIA WALID** Maitre de Conférences A, ESTA, Dar El Beida, Alger, pour sa confiance et d'avoir accepté d'être examinateur de mon travail.

Monsieur, **HAMZAOUI MALEK** Maitre de Conférences A, l'Université de Tizi Ouzou, j'exprime ma profonde gratitude pour son apports scientifiques et d'avoir accepté d'honorer par sa présence notre jury d'examen.

Je remercie également monsieur **BAKHTI AHMED** Maitre de Recherche A, Centre de Développement des Énergies Renouvelables, Bouzareah, Alger, pour l'acceptation d'être membre de jury de cette thèse et surtout pour les critiques que je trouve à la hauteur.

Mes vifs remerciements s'adressent à mon très cher ami Monsieur, **DAHIA AHMED** Docteur au du Centre de Recherche Nucléaire de Birine /COMENA qui m'a beaucoup aidé durant la période de réalisation de ce projet de thèse ; son aide est très appréciée.

Mes remerciements vont enfin à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

RESUME	1
REMERCIEMENTS	4
TABLE DES MATIERES	5
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	7
INTRODUCTION	10
1. ETAT DE L'ART	15
1.1. Étude bibliographique	16
1.2. Le problème en relation avec la littérature	25
1.3. Objectifs de l'étude	26
1.4. Motivation	26
2. PARAMÈTRES THERMODYNAMIQUES D'UN ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE D'UN GAZ RÉEL	28
2.1. Introduction	28
2.2. Présupposés fondamentaux	29
2.3. Équations régissantes	29
2.3.1. L'équation de la conservation d'énergie	30
2.3.2. Détermination de la différentielle dP en fonction de dp	32
2.3.3. Détermination de la différentielle dp/ρ	33
2.3.4. Détermination des paramètres thermodynamiques pour les gaz réels	34
2.3.4.1. L'état générateur	37
2.3.4.2. La forme intégrale de l'équation de l'énergie selon le modèle de Berthelot	37
2.4. Détermination du nombre de Mach	39
2.4.1. Calcul de la vitesse	40
2.4.2. Détermination de la célérité du son	41
2.4.3. Le nombre de Mach	42
2.5. La chaleur spécifique à volume constant $C_v(T, \rho)$	43
2.6. La chaleur spécifique à pression constante $C_p(T, \rho)$	44
2.7. Rapport des chaleurs spécifiques γ	45
2.8. Conclusion	46
3. FORMULATION MATHÉMATIQUES DES ONDES DE CHOC D'UN GAZ RÉEL	47
3.1. Introduction	47
3.2. Hypothèses de calcul	48
3.3. Onde de choc normale d'un gaz réel	50
3.4. Onde de choc oblique d'un gaz réel	54
3.5. Procédure de calcul numérique	61
3.5.1. Procédure de calcul par la méthode de Newton	61
3.5.1.1. Algorithme de la méthode de Newton appliquée aux systèmes	63
3.5.1.2. Le choix de la solution initial de la méthode de Newton	63
3.5.2. Procédure de calcul des paramètres thermodynamiques	64

3.5.2.1. Calcul de la masse volumique génératrice p_0 par la méthode de Dichotomie	64
3.5.2.2. Calcul des paramètres en aval du choc par la méthode de Newton	64
3.5.2.3. Calcul d'entropie par la méthode de Simpson	65
3.5.2.4. Calcul des paramètres de stagnation en aval du choc par la méthode de Newton	68
3.6. Comparaison entre un choc normal et un choc oblique	68
3.7. Calcul de l'erreur du modèle GP par rapport au modèle GR	70
3.8. Algorithme de calcul	70
3.9. Conclusion	72
4. RESULTATS ET DISCUSSIONS	73
4.1. Introduction	73
4.2. Variation des paramètres pour un GR et GP à travers l'onde de choc	73
4.2.1. Variation du rapport de densité en fonction du nombre de Mach en amont	73
4.2.2. Variation du rapport de pression en fonction du nombre de Mach en amont	78
4.2.3. Variation du rapport de température en fonction du nombre de Mach en amont	82
4.2.4. Variation du rapport de densité totale en fonction du nombre de Mach en amont	86
4.2.5. Variation du rapport de pression totale en fonction du nombre de Mach en amont	89
4.2.6. Variation du rapport de température totale en fonction du nombre de Mach en amont	93
4.2.7. Variation du nombre de Mach aval en fonction du nombre de Mach en amont	97
4.2.8. Variation de l'entropie en fonction du nombre de Mach en amont	100
4.2.9. Variation de l'angle de déviation θ en fonction du nombre de Mach en amont pour un angle de choc oblique β	104
4.2.10. Variation de l'angle de choc β en fonction de l'angle de déflexion θ pour un nombre de Mach amont M_1	108
4.3. L'erreurs dues entre les deux modèles GR et GP à travers l'onde de choc	111
4.3.1. Résultats d'erreurs des paramètres thermodynamiques en fonction du nombre de Mach en amont	111
4.3.2. Divers résultats	135
CONCLUSION	140
APPENDICES	143
Liste des symboles et abréviations	143
RÉFÉRENCES	145

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 3.1. Illustration d'une onde de choc normale.	50
Figure 3.2. Onde de choc oblique autour d'un dièdre.	55
Figure 3.3. Variation de la fonction $F_{ST}(T, \rho)$ dans l'intervalle $[T_1, T_2]$ par apport à T .	66
Figure 3.4. Variation de la fonction $F_{Sp}(T, \rho)$ dans l'intervalle $[\rho_1, \rho_2]$ par apport à ρ .	66
Figure 3.5. Représentation de condensation de nœud.	67
Figure 4.1. Variation du rapport de densité ρ_2/ρ_1 à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach amont M_1 .	77
Figure 4.2. Variation du rapport de pression P_2/P_1 à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	81
Figure 4.3. Variation du rapport de température T_2/T_1 à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	85
Figure 4.4. Variation du rapport de densité totale ρ_{02}/ρ_{01} à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	89
Figure 4.5. Variation du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	93
Figure 4.6. Variation du rapport de température totale T_{02}/T_{01} à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	96
Figure 4.7. Variation du nombre de Mach aval M_2 à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	100
Figure 4.8. Variation de l'entropie $\Delta S_{2-1}/R$ à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	104

Figure 4.9. Variation de l'angle de déviation θ° à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	107
Figure 4.10. Contours du nombre de Mach amont M_1 pour un angle de déviation θ° et un angle de choc β° donné.	110
Figure 4.11. L'évolution de l'erreur relative de la masse volumique ρ_2/ρ_1 en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	114
Figure 4.12. L'évolution de l'erreur relative du rapport de pression P_2/P_1 en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	117
Figure 4.13. L'évolution de l'erreur relative du rapport de température T_2/T_1 en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	120
Figure 4.14. L'évolution de l'erreur relative du rapport de densité totale ρ_{02}/ρ_{01} en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	123
Figure 4.15. L'évolution de l'erreur relative du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	126
Figure 4.16. L'évolution de l'erreur relative du rapport de température totale T_{02}/T_{01} en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	129
Figure 4.17. L'évolution de l'erreur relative du nombre de Mach aval M_2 en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	132
Figure 4.18. L'évolution de l'erreur relative de l'entropie $\Delta S_{2-1}/R$ en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .	135
Tableau 3.1. Comparaison entre le choc normal et le choc oblique.	68
Tableau 3.2. Algorithme de programme.	70
Tableau 4.1. Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle GP par rapport au modèle RG pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=1000$ °K et $P_0=1\text{bar}$.	136

Tableau 4.2. Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle GP par rapport au modèle <i>RG</i> pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=2000$ °K et $P_0=1\text{bar}$.	137
Tableau 4.3. Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle GP par rapport au modèle <i>RG</i> pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=3000$ °K et $P_0=1$ bar.	137
Tableau 4.4. Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle GP par rapport au modèle <i>RG</i> pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=1000$ °K et $P_0=100$ bar.	137
Tableau 4.5. Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle GP par rapport au modèle <i>RG</i> pour les ondes de choc obliques lorsque $M_1=4,00$, $T_0=2000$ °K et $P_0=100$ bar.	138
Tableau 4.6. Erreur (ε %) du modèle GP par rapport au modèle <i>RG</i> pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=3000$ °K et $P_0=100$ bar.	138
Tableau 4.7. Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle GP par rapport au modèle <i>RG</i> pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=1000$ °K et $P_0=500$ bar.	138
Tableau 4.8. Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle GP par rapport au modèle <i>RG</i> pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=2000$ °K et $P_0=500$ bar.	139
Tableau 4.9. Erreur (%) du modèle GP par rapport au modèle <i>RG</i> pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=3000$ °K et $P_0=500$ bar.	139

INTRODUCTION

L'étude des ondes de choc joue un rôle crucial en aérodynamique, en particulier dans le contexte des vols à grande vitesse où la compréhension de ces aspects est essentielle pour la conception et l'optimisation des systèmes aérospatiaux. Parmi les différents types d'ondes de choc, les ondes de choc obliques qui présentent un intérêt significatif en raison de leur apparition dans des situations impliquant des écoulements supersoniques et hypersoniques. Contrairement aux ondes de choc normales, qui se produisent perpendiculairement à la direction de l'écoulement, les ondes de choc obliques sont inclinées par rapport à l'écoulement et produisent des effets aérodynamiques différents.

Le comportement des gaz dans des conditions d'ondes de choc est généralement analysé en utilisant l'hypothèse du gaz idéal. Cependant, à des vitesses et des températures élevées, en particulier dans les applications aérospatiales, cette hypothèse devient inadéquate. Les gaz réels, qui tiennent compte de facteurs tels que les interactions moléculaires et la compressibilité non idéale, doivent être pris en compte pour modéliser avec précision le comportement des ondes de choc.

L'un des paramètres clés de l'étude des ondes de choc est la pression de stagnation, c'est-à-dire la pression qu'atteint un gaz lorsqu'il est mis au repos de manière isentropique. Comprendre comment la pression de stagnation influence les ondes de choc obliques dans les gaz réels, en particulier dans l'air, est essentiel pour faire progresser l'ingénierie aérospatiale. Cet essai explore les effets de la pression de stagnation sur les ondes de choc obliques dans les gaz réels, en particulier dans l'air, et discute des implications théoriques et pratiques pour les vols à grande vitesse et les systèmes de propulsion.

Un bref historique

En 1808, Poisson trouva une solution avec discontinuité des équations d'Euler qui satisfaisaient la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Bernhard Riemann, dans sa thèse de 1860, ne put dire s'il s'agissait d'une solution réaliste ou d'une simple curiosité mathématique. C'est Ernst Mach qui résolut élégamment le problème en publiant en 1876 une illustration expérimentale d'onde

de choc produite par une balle de fusil et en posant que le paramètre pertinent est le rapport de la vitesse du mobile à la célérité du son (le nombre de Mach). William John Macquorn Rankine (1870) et Pierre-Henri Hugoniot (1887) établirent indépendamment les équations de l'onde de choc droite basées sur la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Elles ne donnaient aucune indication sur le sens du choc et le problème fut résolu par Ludwig Prandtl en 1908. L'existence d'une onde de choc est liée à une augmentation de l'entropie lors de la compression qui fait passer du subsonique au supersonique. La transformation inverse du supersonique au subsonique se fait à travers un phénomène isentropique appelé éventail de détente.

Principes fondamentaux des ondes de choc obliques

Les ondes de choc obliques sont un phénomène fondamental de l'aérodynamique supersonique. Elles se produisent lorsqu'un écoulement supersonique rencontre une surface ou une limite à un angle, provoquant une onde de compression qui se forme à un angle oblique par rapport à la direction de l'écoulement. Contrairement aux ondes de choc normales, qui provoquent une décélération et un échauffement importants de l'écoulement, les ondes de choc obliques entraînent une modification plus modérée des propriétés de l'écoulement, ce qui permet de conserver un nombre de Mach plus élevé après le choc.

Les caractéristiques des ondes de choc obliques peuvent être décrites par plusieurs paramètres, notamment l'angle de choc, le nombre de Mach et les rapports de pression, de température et de densité à travers le choc. Les équations régissant les ondes de choc obliques sont dérivées de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, ainsi que de l'équation d'état du gaz. Ces équations montrent que l'angle de choc dépend du nombre de Mach en amont et de l'angle de déviation de l'écoulement.

Bien que ces équations dérivent souvent de l'hypothèse du gaz idéal, où le gaz est supposé avoir des chaleurs spécifiques constantes et aucune interaction moléculaire, cette hypothèse devient de plus en plus imprécise à des vitesses et des températures élevées. Dans de telles conditions, les effets réels du gaz doivent être pris en compte pour prédire avec précision le comportement des ondes de choc obliques.

Effets des gaz réels sur les ondes de choc obliques

Dans des conditions de haute pression et de haute température, les gaz réels s'écartent considérablement du comportement des gaz idéaux. Dans les gaz réels, les effets de compressibilité deviennent plus prononcés et les interactions moléculaires ne peuvent plus être ignorées. Ces facteurs entraînent une non-linéarité dans les relations entre la pression, la température et la densité, ce qui affecte le comportement des ondes de choc.

Les modèles de gaz réels, tels que les équations d'état de Berthelot [52,53] fournissent des prévisions plus précises sur le comportement des gaz dans ces conditions. Ces modèles tiennent compte du volume fini des molécules de gaz et des forces intermoléculaires, qui deviennent significatives à des densités et des températures élevées. Lorsqu'ils sont appliqués à l'analyse des ondes de choc obliques, les modèles de gaz réels prédisent des angles de choc, des rapports de pression et des augmentations de température différents de ceux des modèles de gaz idéaux. Par exemple, dans des conditions gazeuses réelles, l'onde de choc peut être plus forte, avec des pressions et des températures post-choc plus élevées que celles prédites par les modèles de gaz idéal. Cette différence est cruciale dans la conception des systèmes aérospatiaux, où des prévisions précises du comportement de l'onde de choc peuvent avoir un impact sur les performances globales et la sécurité du véhicule.

La pression de stagnation et son influence

La pression de stagnation est un paramètre clé dans l'étude des ondes de choc, représentant la pression totale qu'un fluide atteindrait s'il était mis au repos de manière isentropique. Dans le contexte des ondes de choc obliques, cette pression est influencée par les conditions d'écoulement en amont et les caractéristiques de l'onde de choc elle-même. Lorsque augmente, la force de l'onde de choc augmente également, ce qui entraîne des changements plus importants de la pression, de la température et de la densité à travers le choc. Dans les gaz réels, la relation entre la pression de stagnation et les caractéristiques de l'onde de choc est plus complexe en raison du comportement non idéal du gaz. Par exemple, une augmentation de la pression de stagnation peut conduire à un écart plus important par rapport aux

prédictions de gaz idéal, avec des températures et des pressions post-choc plus élevées.

L'effet de la pression de stagnation sur les ondes de choc obliques est particulièrement important dans la conception des véhicules à grande vitesse, où le maintien de l'intégrité structurelle et des performances du véhicule dans des conditions d'écoulement variables est essentiel. Comprendre comment la pression de stagnation influence la force et l'orientation des ondes de choc peut aider les ingénieurs à optimiser la conception des systèmes aérospatiaux pour qu'ils résistent aux conditions extrêmes rencontrées dans les vols supersoniques et hypersoniques.

Application à l'air en tant que gaz réel

L'air, en tant que mélange de gaz, présente un comportement de gaz réel dans les conditions de haute pression et de haute température typiques des ondes de choc dans les vols supersoniques et hypersoniques. Le rapport de chaleur spécifique de l'air, qui est supposé constant dans les modèles de gaz idéal, varie avec la température et la densité dans des conditions de gaz réel, ce qui affecte le comportement des ondes de choc.

Lorsque l'on applique à l'air des modèles de gaz réels, il est essentiel de tenir compte des effets de la température et de la pression sur la compressibilité et le rapport thermique spécifique de l'air. À gaz réel, le rapport thermique spécifique diminue, ce qui entraîne une onde de choc plus faible et des températures post-choc plus basses par rapport aux prévisions basées sur un rapport thermique spécifique constant.

Dans les applications aérospatiales pratiques, telles que la conception de véhicules supersoniques et hypersoniques, la modélisation précise de l'air en tant que gaz réel est d'une importance capitale dans les systèmes de propulsion à statoréacteurs ou scramjets ; les performances du moteur dépendent fortement du comportement des ondes de choc dans l'admission et la chambre de combustion. La pression de stagnation joue un rôle important dans la détermination de la force et de l'orientation de ces ondes de choc, qui à leur tour affectent l'efficacité globale et la poussée du moteur.

Disposition des chapitres (plan du travail)

Le travail présenté dans le contexte de cette thèse est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique, en présentant les principales recherches effectuées sur les méthodes et les modèles de calcul des ondes de choc normales et obliques. Ainsi, la détermination des paramètres aérodynamiques et thermodynamiques à travers et après le choc. En tenant compte de l'hypothèse d'un gaz calorifiquement et thermiquement parfait ou imparfait notamment pour le gaz réel.

Le deuxième chapitre définit les paramètres d'un écoulement supersonique isentropique à gaz réel, en présentant les relations nécessaires dans ce contexte. Le contenu de ce chapitre est nécessaire, vu que l'écoulement après le choc n'est pas constant. Il varie selon la déviation radiale de l'écoulement.

Le troisième chapitre consiste à développer des modèles mathématiques pour un gaz réel pour l'onde de choc normale et oblique, en présentant les équations et les relations nécessaires dans le traitement de ce sujet.

Le quatrième chapitre présente les résultats obtenus sous forme de graphiques et tableaux des paramètres de l'écoulement à travers des ondes de choc obliques. Ainsi que les paramètres de l'écoulement après le choc. Une comparaison des résultats obtenus pour un choc oblique a été établie. Les résultats de cette comparaison sont présentés sous forme d'erreurs entre les résultats de notre modèle à gaz réel (GR) et ceux du modèle d'un gaz parfait (GP).

Une conclusion générale synthétise les résultats obtenus, suivie de recommandations, et propose des perspectives pour prolonger cette recherche.

CHAPITRE 1

ETAT DE L'ART

De 1937 à nos jours, l'écoulement supersonique autour d'un cône a connu une évolution remarquable. Le cône joue un rôle important dans la construction aérospatiale, en particulier dans les structures qui sont en face d'un écoulement supersonique. Prenons l'exemple de la prise d'air d'un moteur supersonique, du nez d'un missile et du nez d'un avion supersonique. Le cône est donc une forme aérodynamique très pertinente qui mérite une attention particulière et une vision approfondie. Le régime supersonique se distingue par l'émergence d'une onde de choc particulière appelée choc conique lors de l'écoulement autour d'un cône. Trois types de chocs peuvent généralement se produire en fonction de la géométrie de l'obstacle envisagé en face de l'écoulement : l'onde de choc normale (1D), l'onde de choc oblique (2D) et (3D). De plus, en fonction de la localisation du choc lui-même, il y a deux types de chocs, l'un appelé choc attaché et l'autre appelé choc détaché. En 1996 et 1997, Kenneth [21, 22] et Taturu [22] ont réalisé une étude sur les caractéristiques d'une onde de choc oblique autour d'un dièdre à haute température.

Une onde de choc est une zone d'écoulement de très faible épaisseur présentant une transition marquée entre l'écoulement d'un fluide en amont, où la vitesse est supersonique, et l'écoulement d'un fluide en aval, où la vitesse est subsonique. Dans cette zone, les particules de l'écoulement traversent l'onde de choc avec une décélération extrêmement forte. Les ondes de choc peuvent se propager soit dans la direction normale de l'écoulement, soit de manière oblique ; on parle alors de chocs normaux ou obliques, respectivement. L'onde de choc normal (NSW), l'onde de choc oblique (OSW) et l'onde de choc conique (CSW) sont des phénomènes physiques complexes qui n'apparaissent uniquement dans la nature que pour les écoulements supersoniques lorsque certaines conditions spécifiques sont appliquées. Anderson, J.D. Jr. (1982), Goldsmith, E.L. et Seddon, J. (1999), Sutton, G.P. et Biblarz, O. (2010).

1.1 Étude bibliographique

Dans ces dernières décennies Anderson, J.D. Jr. (1982), Goldsmith, E.L. et Seddon, J. (1999), Sutton, G.P. et Biblarz, O. (2010), Tatum, K.E. (1997), Maccoll, J.W. (1937), Agnone, A.M. (1994), ont conçu des études sur les NSW, OSW et CSW en utilisant des gaz caloriquement idéaux, où la capacité calorifique (CP) est constante et ne dépend pas de la température. Un modèle applicable pour les gaz a établi un modèle de gaz parfait qui donne de bons résultats pour les faibles T_0 , M_1 et θ , qui ne dépassent pas 240 K, 2,00 et 10 degrés, respectivement, ce modèle est appelé Gaz parfait (GP).

Eggers, A.J. (1949), ont mené des études sur les flux bidimensionnels d'un gaz diatomique imparfait en se basant sur l'équation d'état de Berthelot pour dériver des équations d'écoulement universelles. La recherche se focalise sur les conséquences des défauts thermiques et caloriques, notamment à basse température et à haute pression, et inclut un terme de Planck pour tenir compte de variation des capacités thermiques vibratoires. Les résultats confirment l'hypothèse selon laquelle les écoulements modérément accélérés peuvent être considérés comme isentropiques, à l'exception des ondes de choc, où les propriétés des deux côtés peuvent être calculées comme s'il n'y avait pas de différence de capacité thermique.

Une méthode universelle pour évaluer les ondes de choc obliques de gaz réels, en se basant sur l'équation d'état a été proposée par Redlich-Kwong, Kouremenos, D.A. et Antonopoulos K. A. (1989). La technique aborde la difficulté de résoudre un ensemble de dix équations, ce qui améliore considérablement l'efficacité des calculs : la vitesse de calcul est augmentée d'un facteur vingt fois par rapport aux méthodes exactes. Pour les ondes de choc obliques des gaz réels, les équations dérivées sont similaires à celles des gaz idéaux, ce qui permet d'obtenir des résultats précis avec un temps de calcul réduit. C'est pourquoi l'approche généralisée est fortement recommandée pour les applications pratiques.

Kenneth E. Tatum (1996) a décrit les propriétés des flux compressibles à travers des ondes de choc obliques dans un gaz thermiquement parfait et caloriquement imparfait. Ces relations sont intégrées dans un programme existant, ces propriétés dans le cas d'ondes obliques et de produire des tables de ces propriétés. Le code

calcule les propriétés des chocs obliques pour des angles de choc ou d'inclinaison de flux donnés, incluant des chocs forts (haute pression) et faibles, ainsi que les cas spéciaux des chocs normaux. Il valide les résultats en les comparant aux méthodes théoriques et aux résultats d'un code de simulation CFD (Computational Fluid Dynamics).

Kakatsios, X. K. et Houzouris, G. E. (1998) ont étudié une solution analytique a été proposée pour les ondes de choc dans l'air réel en se basant sur les équations fondamentales et la meilleure équation d'état utilisée. Malgré l'excellente précision bien que précis, ces calculs exigent un temps important considérable. Afin de résoudre ce problème, des relations empiriques simples permettant d'obtenir des résultats avec moins de 0,1 % d'écart relatif comparées aux résultats théoriques. Cela permet d'obtenir une méthode plus performante pour calculer les ondes de choc dans l'air réel dans des gammes spécifiques de volume de stagnation et de température.

Tarnavskii, G. A. (2004) ont étudié la possibilité de solutions duales au problème des modèles de réflexion des ondes de choc de deux types différents pour les mêmes variables de diagnostic, telles que la réflexion régulière ou la réflexion de Mach (paradoxe de Neumann), dans les prises d'air et les tuyères des moteurs d'avions hypersoniques dans certaines gammes de conditions de vol. La création d'un mécanisme de réglage de l'entrée du flux dans le diffuseur est nécessaire pour que le statoréacteur hypersonique (HRE) fonctionne selon les paramètres prévus.

Zebbiche, T. (2009) ont fait une étude mathématique et un modèle de calcul afin de saisir l'influence de la température de stagnation sur les ondes de choc normales dans un flux gazeux. Ils ont analysé l'effet de la température de stagnation sur les ondes de choc normales et les erreurs liées au modèle de gaz parfait. Le travail comprend une explication mathématique approfondie des méthodes de calcul et une discussion des résultats obtenus. L'importance de la température de stagnation dans le comportement des ondes de choc est soulignée dans la conclusion. Le même auteur en (2011) a fait une proposition d'une nouvelle quadrature numérique pour la fonction de Prandtl Meyer à des températures élevées, en prenant en considération les fluctuations des chaleurs spécifiques et leurs rapports lorsque la température augmente dans la zone confinée. Ils ont développé une nouvelle version généralisée de la fonction qui prend en compte les effets des variations de

température en dessous du seuil de dissociation et qui est exprimée comme une intégrale d'une fonction analytique complexe. La proposition de quadrature permet des calculs de grande précision avec un nombre considérablement réduit de points d'intégration, ce qui dépasse les méthodes classiques telles que la quadrature de Simpson.

Rodio, M.G., Congedo, P.M., et Abgrall, R. (2014) ont appliqué le modèle (GP) sur la simulation d'une onde de choc de raréfaction (RSW) dans un écoulement multiphasique. Il a été démontré que le solveur numérique basé sur une formulation (DEM) peut être mis à jour pour accueillir des équations d'état plus sophistiquées pour la région de la vapeur. Afin de comprendre l'impact de l'absence d'une connaissance extrêmement exacte des coefficients (EOS) sur la structure des solutions, ils ont exploré le couplage de cette méthode avec des outils de quantification de l'incertitude.

Salhi, M., Zebbiche, T., et Mehalem, A. (2016) ont proposés des équations pertinentes pour l'analyse de l'écoulement des fluides compressibles et des caractéristiques thermodynamiques. Ils ont traité cependant de plusieurs thèmes de thermodynamique, de mécanique des fluides et d'analyse numérique, tels que les équations de conservation de la masse, les équations énergétiques et les méthodes de calcul pour la dynamique des fluides. Le même auteur, en (2019) ont étudié la dynamique et la thermodynamique de l'écoulement des fluides compressibles, en mettant l'accent sur l'élaboration d'une nouvelle forme générale de la fonction de Prandtl-Meyer et sur son application à l'air. Selon cette étude, les effets des gaz imparfaits et les variations des capacités thermiques sur l'écoulement isentropique sont importants, ce qui suggère qu'une étude plus approfondie des ondes de choc obliques et l'extension de la méthode à d'autres fluides seraient nécessaires. Les résultats aident à mieux comprendre les phénomènes d'écoulement compressible et établissent les fondements de futures études dans ce domaine.

Soltania, M.R., Daliri, A., et Sepahi Younsi, J. (2016) ont abordés les subtilités des interactions entre les ondes de choc et la couche limite (SBLI) et leurs conséquences sur la performance et la stabilité des entrées, mettant en évidence l'importance de continuer les expériences et les simulations afin de mieux appréhender ces phénomènes. L'objectif est de mettre en relation les phénomènes

(SBLI) avec les dispositifs d'écoulement pratiques, notamment les entrées à compression mixte, en utilisant des preuves expérimentales et numériques.

Boun-jad, M et Zebbiche, T. (2017) ont établi une étude consiste à créer un nouveau logiciel de calcul numérique afin d'évaluer l'impact de la propulsion gazeuse sur la modification des paramètres thermodynamiques et du nombre de Mach à travers une onde de choc normale à des températures élevées en dessous du seuil de dissociation moléculaire. Les gaz choisis comprennent H_2 , O_2 , N_2 , CO , CO_2 , H_2O , NH_3 , CH_4 et l'air, qui sont considérés comme parfaits, imparfaits en termes de chaleur et parfaits en termes de température. Le calcul des erreurs par rapport à l'air sera également présenté dans l'étude pour faciliter la sélection des gaz adéquats pour les applications des tuyères.

Gupta, N, et Sharma, V. D. (2017). Corriger accord une série de solutions à l'écoulement instable en deux dimensions d'un fluide de Van der Waals avec des ondes de choc. Ils ont pu arriver à déduire une équation d'amplitude asymptotique qui présente des non-linéarités quadratiques et cubiques, telles que la dissipation et la diffraction. Pour obtenir des solutions précises dans la limite d'une dissipation nulle, ils ont utilisé la théorie de la réduction de la symétrie non classique. En raison des non-linéarités présentes dans l'équation d'évolution, le profil de l'onde rencontre des distorsions et des pentes, culminant dans une onde de choc qui se propage en séparant des portions de la région continue.

D'angelo, S., Vimercati, D., et Guardone, A. (2018) ont analysés de manière harmonisée les ondes obliques dans les écoulements supersoniques stables idéaux et non idéaux autour de coins compressifs et raréfactifs. Ils ont étudié ce qui se passe lorsque l'écoulement supersonique parallèle régulier est confronté à un changement brusque de l'inclinaison de la paroi, en distinguant le ventilateur isentropique de Prandtl-Meyer observé lors de l'expansion de l'onde de choc oblique produite lors de la compression. Dans ces situations, l'étude met en évidence l'importance de la dérivée fondamentale de la dynamique des gaz pour appréhender le comportement des fluides compressibles.

Elaichi, T., et Zebbiche, T. (2018) ont étudié la mécanique de l'écoulement supersonique autour d'un cône pointu en utilisant le modèle du gaz parfait (GP) et celui de la haute température (HT). La méthode de résolution des équations

différentielles utilisée dans cette étude est la méthode Runge Kutta d'ordre 4, en se focalisant sur les caractéristiques physiques des ondes de choc à haute température. Il ressort des résultats que les caractéristiques de l'écoulement varient considérablement selon la température et le nombre de Mach, ce qui permet d'envisager des applications à venir en aérodynamique et dans les systèmes de propulsion.

Takhnouni, R., Yahiaoui, T., et Allali, A. (2018) ont expliqué l'analyse numérique de l'aérodynamique, en mettant l'accent sur les flux supersoniques autour des profils aérodynamiques, notamment ceux dont les bords d'attaque sont arrondis et qui produisent des ondes de choc détachées. Ils ont examiné les travaux théoriques, numériques et expérimentaux précédents, en se concentrant sur les solutions numériques des équations d'Euler. Les conclusions permettent d'approfondir notre compréhension des caractéristiques de l'écoulement et des fluctuations d'entropie, offrant ainsi une vision des performances des modèles de gaz parfaits et à haute température dans les domaines de l'aérodynamique.

Vimercati, D., Gori, G., et Guardone, A. (2018) ont ciblés la présence et les caractéristiques des ondes de choc obliques non idéales dans les fluides réels, en mettant l'accent sur les conditions dans lesquelles ces phénomènes se manifestent. Il étudie le cadre théorique des chocs obliques, incluant les relations de saut et l'acceptabilité des chocs, tout en fournissant des résultats de calcul pour différentes substances d'intérêt pratique. Les résultats suggèrent qu'il est possible de réaliser des chocs obliques non idéaux dans des conditions thermodynamiques particulières, mettant en évidence la possibilité d'observer des non-linéarités négatives et des ondes de choc d'expansion dans des fluides courants.

Patel, A et Singh, M. (2019) ont expliqué la façon à travers laquelle les ondes de choc se déroulent dans les gaz non idéaux, en mettant l'accent sur l'impact du libre parcours moyen, de la viscosité et des caractéristiques du gaz sur la structuration du choc. Les auteurs ont proposé des solutions analytiques et des éclaircissements théoriques qui soulignent les conséquences importantes de la non-idéalité du gaz et du modèle de la sphère rugueuse sur le comportement de l'onde électromagnétique. Les conclusions de l'étude contribuent à améliorer la compréhension des phénomènes d'ondes de choc et proposent des pistes pour des études plus approfondies en dynamique des fluides.

Navarro, C.I. (2019) a étudié l'écoulement unidimensionnel à travers une buse avec un choc, en utilisant l'équation d'état cubique de Soave-Redlich-Kwong pour analyser les gaz réels d'un mélange d'espèces. La résolution de l'EOS cubique est résolue grâce à un algorithme efficace basé sur une méthode de Cardano modifiée. L'étude se porte sur l'étude de l'écoulement isentropique et étranglé à travers une buse convergente-divergente en utilisant les règles de mélange classiques, contre les résultats de la loi des gaz idéaux. Il a présenté deux nouvelles approches pour évaluer les conditions après un choc normal, qui montrent des variations importantes dans les valeurs de température et de pression par rapport aux solutions de gaz idéal, notamment pour des pressions et des températures de stagnation variables.

Wu, K., et Dong Kim, H. (2019) ont synthétisés les résultats des méthodes de contrôle fluidique du vecteur poussée (FTVC), en mettant l'accent sur le contrôle du vecteur choc (SVC) à l'aide d'un injecteur à fente dans des tuyères supersoniques. Les résultats de l'étude confirment l'efficacité du (SVC) en utilisant des méthodes expérimentales et informatiques, ce qui prouve qu'il peut atteindre des métriques de performance élevées, avec des résultats montrant une valeur de performance supérieure à 0,81 dans une condition donnée. Les résultats permettent de mieux appréhender les stratégies de vectorisation de la poussée avancées pour les applications aérospatiales, financées par la Fondation nationale de la recherche de Corée (National Research Foundation).

Zebbiche, T. (2019) a établi un nouveau modèle pour la conception de buses de longueur minimale (MLN) est présenté dans cette étude, qui utilise l'effet de la pression de stagnation P_0 . Il examine les limites des modèles existants à haute température (HT) et à gaz parfait (GP). L'étude souligne le rôle crucial de P_0 dans l'amélioration des dimensions des buses et offre une analyse exhaustive des paramètres thermodynamiques et de la fonction de Prandtl-Meyer dans des conditions différentes. Les résultats chiffrés mettent en évidence l'utilisation du modèle dans le domaine de la construction aérospatiale, mettant en évidence l'importance de prendre en compte des considérations thermodynamiques précises dans les applications d'écoulement supersonique.

Huang, Z., et Wang, H. (2019) ont fait une présentation sur les liens entre la turbulence à densité variable et les ondes de choc normales en utilisant une

simulation numérique. Il est question d'un problème théorique sur le comportement des ondes acoustiques lorsque aucune stimulation n'est présente derrière l'onde de choc, avec l'introduction du concept d'ondes amorties comme ondes planes excitées. L'étude établit de manière approfondie les relations entre dispersion et amplitude, éclairant l'essence physique des ondes amorties, repérant les angles clés pour l'excitation des ondes, et mettant en évidence la corrélation entre les ondes acoustiques rapides et lentes, avec des résultats qui correspondent parfaitement aux données théoriques et de simulation.

Kraiko, A.N., et al. (2020), ont opté pour l'amélioration des arrière-corps dans un courant libre avec des discontinuités tangentielles, en mettant l'accent sur les configurations où il y a des ruptures et des chocs internes. L'étude utilise un algorithme génétique pour optimiser à deux critères et découvre une variété de solutions optimales pour des arrière-corps de diverses longueurs, mettant en évidence l'impact des coefficients de réflexion des perturbations de la pression sur la conception de ces contours. Selon les résultats, il semble que, même si des contours lisses peuvent être obtenus, l'introduction de ruptures internes peut améliorer les performances dans des conditions particulières, ce qui contribue à la compréhension de la dynamique des fluides dans les écoulements soniques.

Arefyev, K.Yu., et al. (2020) ont examiné la rupture gazodynamique de gouttelettes liquides dans des écoulements supersoniques, en mettant l'accent sur les mécanismes impliqués, tels que la rupture de la couche limite et la séparation des microparticules causée par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz entre les différentes particules. La présence de structures d'ondes de choc a un impact significatif sur la rupture et la répartition spatiale des gouttelettes, avec une augmentation significative de la formation de petites gouttelettes. Des méthodes d'imagerie sophistiquées sont employées pour étudier la vitesse des gouttelettes et les propriétés de l'écoulement, ce qui permet d'approfondir notre compréhension de la dynamique du comportement des gouttelettes dans les écoulements de gaz à haute température.

Yahiaoui, T., et al. (2020) ont élaboré un nouveau logiciel de calcul numérique afin d'étudier les conséquences des gaz à haute température sur les caractéristiques des ondes de choc convexes et coniques. Il traite de différentes problématiques aérodynamiques, telles que l'ajustement de l'admission, la traînée

de l'onde et les coefficients aérodynamiques pour les profils aérodynamiques supersoniques, tout en explorant également des applications dans la propulsion par détonation et les explosions de poussières. La méthode Runge Kutta d'ordre élevé a été utilisée dans le programme pour améliorer la solution des équations de conservation, ce qui permet d'obtenir une précision supérieure par rapport aux méthodes traditionnelles de différences finies.

Wang, M., et Wu, Z. (2021) ont étudié la réflexion d'une onde de choc mobile sur une onde de choc oblique initialement stable provoquée par un coin dans un écoulement supersonique est l'objet de cette recherche. Selon l'analyse, cinq points triples mobiles sont identifiés, chaque point reliant une onde de choc incidente, une onde de choc réfléchie et une résistance de Mach. Une nouvelle approche de réflexion des chocs est présentée dans cette étude, ce qui permet de mieux comprendre les interactions complexes des chocs dans la dynamique des fluides.

Zuo, J., et al. (2021) ont étudié les équations de Navier-Stokes moyennées par Reynolds, analyse numériquement l'interaction entre les ondes de choc obliques et le refroidissement par film supersonique alimenté par des hydrocarbures à combustion. Selon l'étude, si l'intensité de l'onde de choc réfléchie est théoriquement inférieure à celle de l'onde de choc incidente en raison des nombres de Mach inférieurs en amont, la présence d'un film de refroidissement par combustion altère cette dynamique, ce qui entraîne la réflexion de l'onde de choc sur la flamme. Les résultats permettent de mieux comprendre les subtilités du refroidissement par film supersonique dans les milieux de combustion, ce qui est crucial pour les systèmes de propulsion de pointe.

Xiang, G., et al. (2021), ont mis en évidence l'importance des ondes de détonation obliques (ODW) générées par deux coins symétriques dans les mélanges hydrogène-air pour l'écoulement réactif compressible à grande vitesse et la propulsion hypersonique. Les simulations numériques mettent en évidence les propriétés du champ d'écoulement et les structures des ondes, incluant les comportements d'hystérésis liés au point triple amont-aval et au modèle de transition lisse-abrupt. Les résultats permettent de mieux appréhender la dynamique des (ODW) et leurs éventuels usages dans les systèmes de propulsion avancés.

Chernyshov, M.V., et al. (2021) ont mis l'accent sur les conditions d'existence, la stabilité de l'écoulement et les paramètres du champ d'écoulement dans les configurations de Mach stationnaires (SMC) avec libération d'énergie pulsée sur des chocs normaux. La réflexion de Mach à la réflexion régulière sous divers nombres de Mach et niveaux de libération d'énergie est mise en évidence dans cette étude, ce qui permet de mieux appréhender la conception des moteurs à réaction mixte et des dispositifs d'impulsion gaz-dynamique. Pour les futures recherches, ils ont suggéré de mener une analyse paramétrique approfondie des configurations à triple choc, mettant en évidence l'importance de modèles de détonation actualisés et de configurations optimales pour les applications techniques.

Bulat, P., et al. (2021) ont étudiés la réfraction des ondes de choc obliques sur des discontinuités tangentielles, en mettant l'accent sur les domaines d'existence de différentes structures d'ondes de choc avec deux types de perturbations réfléchies. La formulation des conditions de réfraction régulière et de Mach permet de fournir des solutions analytiques aux chercheurs afin de valider les méthodes numériques et les résultats expérimentaux. Les conclusions permettent de mieux comprendre le fonctionnement des ondes de choc dans les écoulements compressibles, en comblant les lacunes des recherches théoriques et expérimentales déjà menées.

Von Sohsten, V.L., Pichorin, G.A., et Batista de Araujo, P.P.. (2021) ont étudiés l'analyse des ondes de choc obliques dans l'air à haute température, en utilisant un algorithme adapté basé sur la méthode de Tannehill et Mugge (1974). La mise en place de l'algorithme en Python permet de calculer les caractéristiques d'équilibre de l'écoulement d'air à haute température en utilisant des ondes de choc obliques, qui sont validées par rapport aux données déjà disponibles. Ils ont appliqué ces résultats à des conceptions de scramjet à Mach 7 et 10, ce qui montre les conséquences pour la conception de véhicules aérospatiaux équipés de systèmes de propulsion à combustion supersoniques.

Yiqiao, Li., et al. (2022) ont mis l'accent sur la condensation hors équilibre et la dynamique du comportement des ondes de choc dans un éjecteur de vapeur supersonique tridimensionnel, en mettant. Les résultats de la simulation ont révélé que l'augmentation de la pression statique entraîne une rotation vers l'amont des

ondes de choc en forme de diamant, une rotation vers l'aval de la position de choc dans le diffuseur et des fluctuations de l'intensité et du nombre d'ondes de choc obliques. Les résultats offrent de précieux conseils pour améliorer les performances des éjecteurs de vapeur à des pressions opérationnelles différentes.

Ali, A. H. (2023) a prouvé numériquement certaines caractéristiques physiques en amont et en aval de l'onde de choc oblique pour les paramètres physiques tel que ; nombre de Mach, la vitesse, la viscosité turbulente, la pression totale et l'enthalpie totale. Les résultats montrent que la pression totale en aval de l'onde de choc est inférieure à la pression totale en amont. En outre, à mesure que les nombres de Mach augmentent, la région de la viscosité turbulente autour de l'objet s'épaissit. En plus, la pression globale varie légèrement entre les trois niveaux de Mach. Et l'angle de l'onde de choc oblique diminuait à mesure que le nombre de Mach augmentait.

1.2 Le problème en relation avec la littérature

Après une brève analyse des travaux pertinents en relation avec le thème abordé dans ce projet de thèse, on est arrivé à conclure que la question du calcul de l'onde de choc, qu'il soit normal, oblique ou conique, ne se pose que pour un gaz calorifiquement et thermiquement parfait pendant toute la période écoulée. Il est à noter que ces études sont menées à des vitesses de Mach et à une température génératrice faibles et à une inclinaison de cône aussi faible.

La conception de notre travail répond aux exigences actuelles et futures, qui nécessitent des applications pour un régime de vol supersonique et hypersonique. Une température génératrice pouvant atteindre 3550 K. En outre, il est possible que le cône présente une déviation assez importante sans dépasser l'application d'une onde de choc fixée. Enfin, il est mentionné qu'un modèle mathématique a été développé dans cette étude qui permet de calculer les résultats dans la marge indiquée de M , T_0 , P_0 et β avec une grande précision. Parmi les résultats obtenus, on peut observer une différence entre nos résultats et ceux du modèle GP. Ce modèle GP actuel devient donc un cas spécifique de notre modèle GR.

1.3 Objectifs de l'étude

A la lumière de ce qui a été présenté précédemment, le but de ce travail est de développer un nouveau modèle mathématique et un outil de calcul numérique pour déterminer les effets de la pression de stagnation sur un écoulement supersonique, en utilisant les équations d'un choc oblique dans le cas d'un gaz parfait et réel, caloriquement et thermiquement imparfait, en dessous du seuil de dissociation des molécules. Afin de corriger le modèle du gaz parfait (GP) et de déterminer les paramètres thermodynamiques présentés par le rapport de densité, le rapport de pression, le rapport de température, le nombre de Mach aval, et l'entropie en fonction du nombre de Mach amont sont largement traités. Dans ce cas, la chaleur spécifique à pression constante ne reste pas constante et varie avec l'augmentation de la densité et la température.

Actuellement la communauté scientifique dispose de plusieurs méthodes numériques pour résoudre un système d'équations différentielles non linéaires couplées de premier ordre avec des conditions initiales. La mise en œuvre d'une méthode spécifique dépend du type d'équations obtenues et de la simplicité du domaine d'application. Il est possible que ce genre de système soit hyperbolique, elliptique ou parabolique. La méthode des différences finies [18, 33, 36, 37, 68], la méthode des volumes finis [18, 33, 36, 37, 68], la méthode des éléments finis [18, 37, 68], la méthode des caractéristiques [43,83] et pour la première fois, l'adaptation de la méthode de Newton [77,79] sont utilisées pour résoudre notre problème.

1.4 Motivation

Le modèle HT (Haute Température) qui a été élaboré par Zebbiche et al., (2006) [49, 61] est considéré comme le modèle de référence pour notre travail. Le modèle ainsi élaboré est conçu à la création de tuyères de propulsion supersoniques. À cette époque, l'auteur a considéré que le modèle HT (Haute Temperature) sera un outil de correction du modèle GP (Gaz Parfait) pour toutes sortes d'écoulement supersonique interne ou externe. Les modèles intégrés dans les logiciels ANSYS et Fluent conçus pour ces types d'écoulements peuvent même être réexaminés en adaptant nos méthodes de calcul et les nouvelles équations obtenues. Étant donné l'utilité concrète de cette forme dans le domaine de la construction aérospatiale, il

était convaincu de l'utilisation du modèle (HT) pour les écoulements supersoniques coniques.

La décision de mener à bien ce travail de manière efficace est pris après une étude bibliographique approfondie afin de mettre fin au doute quant à l'existence de travaux antérieurs similaires. La recherche met en évidence l'absence des travaux scientifiques publiés, qui traitent des ondes de choc obliques dans les gaz réels à haute température. C'est pourquoi nous avons décidé avec le directeur de thèse de commencer cette étude dans le cadre du projet de doctorat. Notre recherche est perçue comme un apport précieux à la communauté internationale car le travail effectué est publié dans une revue scientifique de renommée.

Au cours du prochain chapitre, nous allons élaborer notre modèle de gaz réel (GR) pour l'écoulement supérieur. Tout d'abord, on évalue la valeur spécifique de la chaleur à pression constante $C_p(T, p)$, puis on évalue les autres paramètres thermodynamiques et physiques qui sont liés à cette dernière.

CHAPITRE 2

PARAMÈTRES THERMODYNAMIQUES D'UN ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE D'UN GAZ RÉEL

2.1. Introduction

De nombreux problèmes dans l'écoulement compressible ont été résolus en supposant que l'air est un gaz parfait. La justification de cette hypothèse réside dans le fait que la pression et la température ambiante d'intérêt sont faibles. Toutefois, lorsque l'air est exposé aux variations d'état, aux pressions et aux températures loin des conditions atmosphériques, il ne respecte plus la loi simple du gaz et présente d'autres propriétés qui ne sont pas propres à un gaz parfait. Par conséquent, il est possible que des procédés d'écoulement qui aèrent dans ces conditions extrêmes puissent différer du comportement de gaz parfait. On sait qu'un tel débit sera généré dans des souffleries hypersoniques et par le vol d'avions à des vitesses supersoniques élevées, ce qui rend la nature et l'ampleur de ce paramètre très importants en aérodynamique.

Les théories et les expériences traditionnelles ont démontré que les trois caractéristiques du gaz réel sont d'abord différentes de celles d'un gaz parfait. On peut classer ces propriétés comme des imperfections thermiques et caloriques. Les défauts thermiques se manifestent clairement à des températures et des pressions basses, sous la forme de forces intermoléculaires et de taille moléculaire. Les variations des capacités de chaleur entraînent une importante variation calorique en ce qui concerne les températures élevées. Il est possible de négliger certaines situations où les effets de la dissociation moléculaire ou de l'excitation électronique deviennent importants (les températures sensiblement supérieures à 3550 K [35]).

Si des gaz en équilibre sont impliqués, il est généralement assez d'expliquer la force intermoléculaire et les conséquences de la taille des molécules est définie par des limites supplémentaires dans l'équation d'état. De la même manière, il est possible d'expliquer les variations des capacités de chaleur des molécules en fonction de la température dans les expressions à des températures spécifiques. Les expressions des chaleurs spécifiques peuvent être expliquées par des imperfections caloriques, comme on le suppose [51].

2.2. Présupposés fondamentaux

- L'air est un gaz diatomique qui possède :
 - ✓ Une constante universelle du gaz R est de $8,3145 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.
 - ✓ Une température de vibration spécifique $\theta = 3056 \text{ K}$.
 - ✓ Une densité molaire de $28,96 \text{ g/mol}$.
- La loi des gaz réels est respectée par les paramètres de stagnation (pression et température génératrices), en utilisant l'équation de Berthelot qui intègre les effets de taille moléculaire (covolume) et de force intermoléculaire.
- Les différentes stations de combustion et d'écoulement des gaz sont adiabatiques, ce qui signifie qu'il n'y a aucune perte de chaleur liée à l'environnement.
- Il existe des conditions d'un état constant pendant les opérations thermiques. Cela signifie que les conditions ou les procédés qui se produisent ne sont pas modifiés au fil du temps (pour des conditions géométriques spécifiques) pendant la combustion (régime stationnaire).
- L'air se dilate de façon uniforme, sans choc ni rupture.
- L'écoulement à travers la tuyère est unidimensionnel et neutre.
- L'écoulement présente une uniformité de vitesse, de pression, de température et de densité à travers toute coupe perpendiculaire à l'axe de la tuyère.
- Le frottement causé par l'écoulement des produits d'échappement est minime, mais il y a une force d'attraction intermoléculaire de Berthelot.
- On ne prend pas en compte les effets de transfert thermique par conduction, convection ou rayonnement.
- L'air est un fluide à la fois thermique et calorifique imparfait.

Si nécessaire, toute hypothèse supplémentaire sera établie lors des prochaines analyses. Si de nombreuses suppositions simplificatrices semblent avoir été faites, elles sont toutes raisonnables et on peut s'attendre qu'elles reflètent assez précisément le véritable comportement de notre domaine d'étude.

2.3. Équations régissantes

Dans le but de développer les relations des rapports thermodynamiques et géométriques nécessaires, et afin d'étudier l'écoulement supersonique isentropique

pour un gaz réel (cas de l'air), l'équation de Berthelot, qui introduit les effets de taille moléculaire et de la force intermoléculaire, a été utilisée. Cette équation prend alors la forme suivante [52], [53] :

$$\left(P + \frac{a}{Tv^2}\right)(v - b) = RT \quad (2.1)$$

Ou bien

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{Tv^2} \quad (2.2)$$

Connaissons : $v = \frac{1}{\rho}$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a\rho^2}{T} \quad (2.3)$$

Avec : $a = 3P_c V_c^2$, $b = \frac{V_c}{3}$

2.3.1. L'équation de la conservation d'énergie

L'équation d'énergie pour un écoulement adiabatique est [54] :

$$dH + VdV = 0 \quad (2.4)$$

Où [55] :

$$dH = C_p dT + (h + v)dP \quad (2.5)$$

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP \quad (2.6)$$

Avec :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = h + v \quad (2.7)$$

$$h = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad (2.9)$$

D'où [28] :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P = -1 \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{-1}{\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P} \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T \quad (2.11)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v}{\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T} \quad (2.12)$$

L'équation de Berthelot : $P = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{(v-b)} + \frac{a}{T^2 v^2} \quad , \quad \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = \frac{-RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{Tv^3}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -\frac{-RT^2 v^3 (v-b) + av(v-b)^2}{2aT(v-b)^2 - RT^3 v^3} \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = v \cdot \left(\frac{3a(v-b)^2 - RT^2 v^2 b}{2a(v-b)^2 - RT^2 v^3}\right) \quad (2.14)$$

On suppose la condition suivante :

$$c = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T \Rightarrow c = v \cdot \left(\frac{3a(v-b)^2 - RT^2 v^2 b}{2a(v-b)^2 - RT^2 v^3}\right) \quad (2.15)$$

Et connaissons :

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (2.16)$$

Remplaçons l'équation (2.16) dans (2.15), on obtient :

$$C = \left(\frac{3 \cdot ab^2 \rho^2 - 6 \cdot ab \rho - RT^2 b + 3 \cdot a}{2 \cdot ab^2 \rho^3 - 4 \cdot ab \rho^2 + 2 \cdot a \rho - RT^2} \right) \quad (2.17)$$

2.3.2. Détermination de la différentielle dP en fonction de $d\rho$

En thermodynamique, on peut caractériser ou présenter chaque fonction d'état par deux variables d'état, la relation (2,6) sera :

$$dH = C_p dT + C dP \quad (2.18)$$

$$\text{Avec : } C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P, \quad C = \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T, \quad P = \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a \rho^2}{T}$$

La différentielle dP en fonction de $d\rho$ lorsque la température T est constante donne [33] :

$$dP = d \left(\frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a \rho^2}{T} \right)_{T=Cte} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a \rho^2}{T} \right)_{T=Cte} d\rho$$

$$dP = \left(\frac{RT^2 - 2a\rho(1 - \rho b)^2}{T(1 - \rho b)^2} \right) d\rho \quad (2.19)$$

Remplaçons l'équation (2.19) dans l'équation (2.18), on obtient :

$$dH = C_p dT + C dP = C_p dT + \underbrace{\left(C \left(\frac{RT^2 - 2a\rho(1 - \rho b)^2}{T(1 - \rho b)^2} \right) \right)}_{\hat{C}_T} d\rho$$

Avec [70] :

$$C_T(T, \rho) = C \cdot \left(\frac{RT^2 - 2a\rho(1 - \rho b)^2}{T(1 - \rho b)^2} \right) = \left(\frac{3a\rho^2 b^2 - 6ab\rho - RT^2 b + 3a}{2\rho b T - T\rho^2 b^2 - T} \right) \quad (2.20)$$

Alors :

$$dH = C_p(T, \rho)dT + C_T(T, \rho)d\rho \quad (2.21)$$

L'identification entre les relations (2.4) et (2.21) donne :

$$VdV = -dH = -C_p(T, \rho)dT - C_T(T, \rho)d\rho \quad (2.22)$$

2.3.3. Détermination de la différentielle dp/ρ

L'équation de Bernoulli donne [56] :

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.23)$$

Par la multiplication et la division par dp, on trouve :

$$VdV + \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{S=Cte} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.24)$$

Connaissons que la célérité du son [14] :

$$C_s^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{S=Cte} \quad (2.25)$$

La relation (2,24) devient :

$$VdV + C_s^2 \cdot \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.26)$$

Remplaçons l'équation (2.22) dans l'équation (2.26), on obtient :

$$(-C_P(T, \rho)dT - C_T(T, \rho)d\rho) + C_S^2 \cdot \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.27)$$

Alors :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_P(T, \rho)}{C_S^2} dT + \frac{C_T(T, \rho)}{C_S^2} d\rho \quad (2.28)$$

2.3.4. Détermination des paramètres thermodynamiques pour les gaz réels

L'écoulement isentropique d'un gaz caractérisé par l'équation de Berthelot peut être étudié à l'aide de la différentielle de l'équation d'expansion isentropique [57] :

$$du + dw = 0 \quad (2.29)$$

Sachant que :

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT \quad (2.30)$$

On aura [4] :

$$v = \frac{1}{\rho} \Rightarrow dv = -\frac{1}{\rho^2} d\rho \quad (2.31)$$

Remplaçons l'équation (2.31) dans l'équation (2.30), on obtient :

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T d\left(\frac{1}{\rho} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT \quad (2.32)$$

$$dw = Pdv = Pd\left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (2.33)$$

Remplaçons les équations (2.32) et (2.33) dans l'équation (2.29), on obtient :

$$du + dw = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T d\left(\frac{1}{\rho} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + Pd\left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (2.34)$$

Avec :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = C_v \quad (2.35)$$

L'effet de Joule-Thomson est donné par [58] :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho - P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho - \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} + \frac{a\rho^2}{T} \quad (2.36)$$

La différentielle de la pression est calculée à partir de l'équation (2.3) :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho = \frac{\rho R}{(1-\rho b)} + \frac{a\rho^2}{T^2} \quad (2.37)$$

L'équation (2.36) devient :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = \frac{2a\rho^2}{T} \quad (2.38)$$

Combinant les équations (2.31), (2.35) et (2.38) et substituant la valeur de p de l'équation de Berthelot dans l'équation (2.34), on trouve :

$$C_v dT - \frac{a}{T} d\rho - \frac{RT}{\rho(1-\rho b)} d\rho = 0 \quad (2.39)$$

Maintenant l'expression de la différentielle de C_v est donnée par :

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_\rho \quad (2.40)$$

La deuxième dérivée de la pression par rapport à la température à masse volumique constante est calculée en exploitant l'équation de Berthelot :

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_\rho = -2\frac{a\rho^2}{T^3}$$

Donc :

$$T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_\rho = -2\frac{a\rho^2}{T^2} \quad (2.41)$$

Alors l'équation (2.40) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T = -2\frac{a\rho^2}{T^2} \quad (2.42)$$

L'intégration de l'équation (2.42) en utilisant la pression de l'équation d'état de Berthelot nous donne :

$$\int \left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T dv = \int -2\frac{a}{T^2 v^2} dv \quad (2.43)$$

Donc :

$$C_v = \int -2\frac{a}{T^2 v^2} dv \quad (2.44)$$

Avec : $v = \frac{1}{\rho}$

$$C_v(T, \rho) = C_v^0(T) + \frac{2a\rho}{T^2} \quad (2.45)$$

Où $C_v^0(T)$ est la fonction qui décrit la variation de C_v en fonction de la température, et le deuxième terme représente l'effet de l'imperfection du gaz sur C_v .

La fonction choisie pour $C_v^0(T)$ est déterminée sous la considération de la structure moléculaire et la gamme de température où l'effet sur C_v existe.

Pour un gaz diatomique la gamme de température est important à partir de la température de liquéfaction jusqu'à quelque mille de degré Kelvin, dans ce cas (gaz

diatomique) le nombre de degré de liberté transrationnel et rotationnel est constant alors que $C_v^0(T)$ est varié en fonction de la température vibrationnelle. Pour ce fait la fonction de $C_v^0(T)$ peut-être s'écrit comme suite :

$$C_v^0(T) = C_{v(gp)} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \left(\frac{e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)}}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)} \right)^2} \right) \right\} \quad (2.46)$$

Le deuxième terme entre parenthèses, essentiellement le terme de Planck, explique la contribution vibratoire de la chaleur spécifique à volume constant.

La supposition est que les molécules du gaz se comportent comme les oscillateurs harmoniques linéaires pour autant que les degrés de liberté vibrationnels soient concernés.

1.3.4.1. L'état générateur

L'état générateur est représenté par la chambre de combustion où la vitesse de l'écoulement est considérée comme étant nulle [46] et [49]. ($V_0 = 0 \Rightarrow M_0 = 0$), et les propriétés de stagnation (T_0, P_0, ρ_0) sont des paramètres générateurs.

En d'autres mots, T_0 est la température de combustion, P_0 est la pression de la chambre et ρ_0 est la densité de combustion sous les conditions de la chambre.

T_0 et P_0 sont des paramètres liés à la conception de la chambre de combustion. la détermination de ρ_0 sera obtenue par l'application de la méthode de dichotomie [59] dans l'équation de Berthelot.

1.3.4.2. La forme intégrale de l'équation de l'énergie selon le modèle de Berthelot

Une expression qui gouverne l'expansion isentropique d'un gaz réel diatomique peut s'obtenir maintenant par la substitution des équations (2.45) et (2.46) dans l'équation (2.39) et on intègre de l'état génératrice à un état statique donné on trouve:

$$C_v(T, \rho) dT - \frac{a}{T} d\rho - \frac{RT}{\rho(1-\rho b)} d\rho = 0 \quad (2.47)$$

Devisant cette équation par "T" on obtient :

$$C_v(T, \rho) \frac{dT}{T} - \frac{a}{T^2} d\rho - \frac{R}{\rho(1-\rho b)} d\rho = 0 \quad (2.48)$$

On intègre l'équation (2.48) de l'état génératrice à un état statique donné on trouve :

$$\int_{T_0}^T C_v(T, \rho) \frac{dT}{T} - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{a}{T^2} d\rho - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{R}{\rho(1-\rho b)} d\rho = 0 \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T C_v(T, \rho) \frac{dT}{T} = C_{v(gp)} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln\left(\frac{e^{\frac{\theta}{T_0}} - 1}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1}\right) + \\ R \left(\left(\frac{\theta}{T}\right) \cdot \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1} - \left(\frac{\theta}{T_0}\right) \cdot \frac{e^{\frac{\theta}{T_0}}}{e^{\frac{\theta}{T_0}} - 1} \right) - a \left(\frac{\rho}{T^2} - \frac{\rho_0}{T_0^2} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Maintenant :

$$-\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{a}{T^2} d\rho = -a \left(\frac{\rho}{T^2} - \frac{\rho_0}{T_0^2} \right) \quad (2.51)$$

Et :

$$-\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{R}{\rho(1-\rho b)} d\rho = R \ln \frac{\rho_0(1-\rho b)}{\rho(1-\rho_0 b)} \quad (2.52)$$

La substitution des équations (2.50), (2.51) et (2.52) dans l'équation (2.49) nous permettons d'obtenir l'équation importante suivante :

$$C_{v(gp)} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + R \cdot \ln \frac{\rho_0(1-\rho b)}{\rho(1-\rho_0 b)} - 2 \cdot a \left(\frac{\rho}{T^2} - \frac{\rho_0}{T_0^2} \right) + R \cdot \ln \frac{\left(\frac{\theta}{e^{\frac{T}{T_0}} - 1} \right)}{\left(\frac{\theta}{e^{\frac{T_0}{T}} - 1} \right)} +$$

$$R \cdot \left(\left(\left(\frac{\theta}{T} \right) \frac{e^{\frac{T}{T}}}{\left(\frac{\theta}{e^{\frac{T}{T}} - 1} \right)} \right) - \left(\left(\frac{\theta}{T_0} \right) \frac{e^{\frac{T_0}{T_0}}}{\left(\frac{\theta}{e^{\frac{T_0}{T_0}} - 1} \right)} \right) \right) = 0 \quad (2.53)$$

La relation (2.53) représente la forme intégrale de l'équation d'énergie d'une détente isentropique caractérisé par l'équation de Berthelot on prend en considération le comportement vibratoire des molécules.

2.4. Détermination du nombre de Mach

Dans le but de déterminer la fonction du nombre de Mach il est nécessaire de trouver la vitesse de l'écoulement ainsi la célérité du son. Ces deux quantités peuvent être trouvées en utilisant l'équation d'énergie pour un écoulement adiabatique [55] :

$$du + d(pv) + VdV = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T d\left(\frac{1}{\rho} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + d\left(\frac{P}{\rho} \right) + VdV = 0 \quad (2.54)$$

2.4.1. Calcul de la vitesse

Substituant les équations de Berthelot, (2.38), (2.45) et (2.46) dans l'équation (2.54) et on intègre de l'état génératrice à un état statique (température et la masse volumique donné on trouve [12], [54] :

$$VdV = -\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT - d\left(\frac{P}{\rho}\right) \quad (2.55)$$

Avec : $d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\left(\frac{d\rho}{\rho^2}\right)$

$$\int VdV = \int_{\rho_0, T_0}^{\rho, T} \frac{2 \cdot a}{T} d\rho - \int_{\rho_0, T_0}^{\rho, T} C_v dT - \int_{\rho_0, T_0}^{\rho, T} d\left(\frac{P}{\rho}\right) \quad (2.56)$$

Finalement la fonction de vitesse sera :

$$V^2(T, \rho) = 2 \cdot \left\{ C_{v(gp)}(T_0 - T) + R \cdot \theta \left(\frac{1}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}}\right)} - \frac{1}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T_0}}\right)} \right) + \right. \\ \left. 4 \cdot a \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + \left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P}{\rho} \right) \right\} \quad (2.57)$$

Ou bien :

D'après l'équation (2.22), on a :

$$VdV = -dH = -C_p(T, \rho)dT - C_T(T, \rho)d\rho$$

Substituant l'équation (2.22) entre l'état génératrice (0) à un état statique quelconque (1) donné par (T_1 , P_1 , ρ_1 et V_1), on trouve :

$$\int_0^{V_1} V dV = - \int_{T_0}^{T_1} C_P(T, \rho) \Big|_{\rho=\rho_1} dT - \int_{\rho_0}^{\rho_1} C_T(T, \rho) \Big|_{T=T_1} d\rho \quad (2.58)$$

Donc :

$$V^2 = -2 \cdot \int_{T_0}^{T_1} C_P(T, \rho) \Big|_{\rho=\rho_1} dT - 2 \cdot \int_{\rho_0}^{\rho_1} C_T(T, \rho) \Big|_{T=T_1} d\rho \quad (2.59)$$

Alors, on peut calculer la vitesse par deux méthodes, la première méthode est une méthode explicite et simple présentée par l'équation (2.57), ou bien par la méthode intégrale présentée par l'équation (2.59), le test numérique montre que les deux méthodes donnent exactement les mêmes résultats.

2.4.2. Détermination de la célérité du son

La célérité du son correspondante est déterminée par la substitution des équations de Berthelot, (2.45), (2.46) et (2.47) dans l'équation générale suivante [9], [60] :

$$S_V^2 = d\left(\frac{P}{\rho}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho \frac{dT}{d\rho} \quad (2.60)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T = \frac{RT}{(1-\rho b)^2} - \frac{2 \cdot a \rho}{T} \quad (2.61)$$

D'après l'équation (2.48), on a :

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{1}{C_V} \left(\frac{a}{T} + \frac{RT}{\rho(1-\rho b)} \right) \quad (2.62)$$

L'expression résultante de la célérité du son est :

$$S_v^2(T, \rho) = \frac{RT}{(1-\rho b)^2} - \frac{2a\rho}{T} + \frac{\rho^2 T \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-\rho b)} \right)^2}{C_{v(gp)} \left[1 + (\gamma_{gp} - 1) \left\{ \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \right\} \right]} \quad (2.63)$$

2.4.3. Le nombre de Mach

Combinant (2.57) et (2.63) on trouve l'équation du nombre du Mach suivante [3], [12] :

$$M^2(T, \rho) = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{(\gamma_{gp} - 1)} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) + \left(\frac{\theta}{T} \right) \left(\frac{1}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)} - \frac{1}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T_0}} \right)} \right) + \frac{1}{RT} \left(4a \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + \left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P}{\rho} \right) \right) \right)}{\left(\gamma_{gp} - 1 \right) \left(\frac{1}{(1-\rho b)} + \frac{a\rho}{RT^2} \right)^2 + \frac{1}{(1-\rho b)^2} - \frac{2a\rho}{RT^2} \left(1 + (\gamma_{gp} - 1) \left\{ \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \right\} \right)} \quad (2.64)$$

Si on considère que θ , b , et a sont nuls ; on obtient l'équation suivante :

$$M^2 = 2 \left(\left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) \left(\frac{1}{\gamma_{gp} - 1} \right) \right) \quad (2.65)$$

Dans ce cas le rapport des températures devient :

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \quad (2.66)$$

Ces relations (2.65) et (2.66) sont les équations qui caractérisent exactement le nombre de mach (cas de détente), et le rapport des températures pour un gaz parfait [33], [46].

Donc l'équation (2.64) pour un gaz réel, représente la forme générale du nombre de Mach (caloriquement et thermiquement imparfait).

2.5. La chaleur spécifique à volume constant :

La chaleur spécifique à volume constant est obtenue en substituant les équations (2.46) dans l'équation (2.45), pour qu'on trouve la relation suivante :

$$C_v(T, \rho) = C_{v(gp)} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left(\left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2 \cdot a \rho}{RT^2} \right) \right\} \quad (2.67)$$

On remarque clairement que la chaleur spécifique à volume constant est indépendante de l'effet de covolume b , et que les paramètres qui l'influent sont seulement les forces d'attraction intermoléculaires et le comportement vibratoire.

Si c'est deux paramètres sont nulles il est aussi clair qu'en revenant à l'état d'un gaz thermiquement et caloriquement parfait c'est-à-dire : $C_v(T, \rho) = C_{v(gp)}$

Si les forces d'attraction intermoléculaires sont nulles ($a = 0$) ça va nous revenir au cas d'un gaz thermiquement parfait mais caloriquement imparfait où la chaleur spécifique à volume constante ne dépend que de la température et le paramètre de comportement vibratoire θ [51] (ce qu'on appelle le modèle HT ou bien gaz parfait à haute température) :

$$C_v(T, \rho) = C_{v(gp)} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left(\left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} \right) \right\} \quad (2.68)$$

2.6. La chaleur spécifique à pression constante :

La chaleur spécifique à pression constante est par définition donnée par la relation suivante [52] :

$$C_p(T, \rho) = C_v(T, \rho) - T \cdot \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_T} \quad (2.69)$$

On rappelle l'équation de Berthelot en termes de volume : $P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{Tv^2}$

D'où :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_T = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2 \cdot a}{Tv^3} = -\frac{RT\rho^2}{(1-\rho b)^2} + \frac{2 \cdot a\rho^3}{T} \quad (2.70)$$

L'expression résultante de $C_p(T, \rho)$ sera donc obtenue en substituant les équations (2.68), (2.70) et (2.37) dans l'équation (2.69) :

$$C_p(T, \rho) = C_{p(gp)} \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{\gamma_{gp}} \left\{ \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \left(1 + \frac{\frac{(2-\rho b)}{(1-\rho b)} + \frac{a\rho}{2RT^2}}{\frac{1}{(1-\rho b)^2} - \frac{2a\rho}{RT^2}} \right) \right\} \right] \quad (2.71)$$

Si on considère que ($a = 0, b = 0$ et $\theta = 0$) en revenant à l'état d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait : $C_p(T, \rho) = C_{p(gp)}$

Si on néglige l'effet de l'imperfection des gaz réel ($a = 0$ et $b = 0$) on obtient une relation qui représente le cas d'un gaz thermiquement parfait mais calorifiquement imparfait :

$$C_p(T, \rho) = C_{p(gp)} \left\{ 1 + \frac{(\gamma_{gp} - 1)}{\gamma_{gp}} \left[\left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \cdot \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} \right] \right\} \quad (2.72)$$

Où la chaleur spécifique à pression constante ne dépend que de la température et le paramètre de comportement vibratoire $\theta[1]$ (modèle gaz parfait à haute température).

2.7. Rapport des chaleurs spécifiques γ

Notre domaine d'étude est limité dans le régime supersonique pour un nombre de Mach $M [1.0, 6.0]$. Le rapport des chaleurs spécifiques donne la relation suivante :

$$\gamma(T, \rho) = \frac{C_p(T, \rho)}{C_v(T, \rho)} \quad (2.73)$$

Ce rapport des chaleurs spécifique est obtenu en divisant l'équation (2.71) par l'équation (2.67) :

$$\gamma(T, \rho) = \gamma_{(gp)} \left[\frac{1 + \frac{(\gamma_{gp} - 1)}{\gamma_{gp}} \left\{ \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \left(1 + \frac{\frac{(2 - \rho b)}{(1 - \rho b)} + \frac{a\rho}{2RT^2}}{\frac{1}{(1 - \rho b)^2} - \frac{2a\rho}{RT^2}} \right) \right\}}{1 + (\gamma_{gp} - 1) \left\{ \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \right\}} \right] \quad (2.74)$$

Cas de l'air :

$$\gamma_{(gp)} = 1.402 \quad , \quad R = 287.0 [J / Kg K] \quad , \quad C_{v(gp)} = \frac{R}{\gamma_{(gp)} - 1} \quad , \quad a = 117.2666 [Pas.m^6]$$

$$b = 1.07334 \times 10^{-3} [m^3] \quad , \quad \theta = 3056 K \quad .$$

2.8. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté d'une manière détaillée les relations thermodynamiques et géométriques lorsque l'on tient compte de la pression génératrice. Les paramètres génératrices et l'imperfection thermique et calorique, seront employés pour élaborer et développer un nouveau modèle mathématique pour calculer les ondes de chocs dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 3

FORMULATION MATHÉMATIQUES DES ONDES DE CHOC D'UN GAZ RÉEL

3.1 Introduction

L'arrêt ou la déviation brusque non isentropique du fluide lors d'un obstacle dans un écoulement d'un fluide en régime supersonique est caractérisée par l'émergence d'une onde de choc. En effet, ce choc se présente comme une très petite zone de l'espace où les propriétés thermodynamiques et la vitesse du fluide varient très fortement. Une onde de choc est une transition spatiale discontinue en mouvement dans un champ. Lorsqu'il y a un choc, une partie de l'énergie cinétique se transforme en énergie interne [1-6, 7-9, 11-12, 13-17, 19-25, 26-27].

Dans ce chapitre, nous allons examiner la définition mathématique des deux types de choc qui peuvent se produire dans la réalité. Prenons l'exemple du choc normal et oblique avec une vue d'une onde de relaxation. On ne peut observer une onde de choc normale ou oblique que dans l'écoulement supersonique. En revanche, suite au choc, le débit peut être soit subsonique, soit supersonique.

Lorsqu'un écoulement supersonique 2D ou 3D est dévié d'un angle de déviation $\theta > 0$, il peut y avoir une onde de choc oblique, et quand il est détourné d'un angle de déviation $\theta < 0$, il peut y avoir une onde de détente. Lorsque l'onde de choc oblique est très faible, elle se transforme en une onde de Mach, avec un angle μ par rapport au sens d'écoulement en amont. Cependant, lorsque la force de l'onde de choc oblique augmente et que l'écoulement maintient sa direction, elle se transforme en une onde de choc normale.

Les deux cas limites de l'onde de choc oblique sont l'onde de choc normale et l'onde de Mach. Puisque l'angle de l'onde de choc est restreint à 90 degrés et à $1/M$, la normale onde de choc est un problème unidirectionnel où les paramètres thermodynamiques ne fluctuent que selon le nombre de Mach. Les paramètres thermodynamiques de l'onde de choc oblique sont modifiés en fonction du nombre de Mach et de l'angle de déviation, ce qui constitue un problème bidimensionnel. D'autre part, selon l'intensité de ce choc oblique, on aura soit un choc faible ou un choc fort. Cette intensité est caractérisée par l'augmentation de saut d'entropie et un taux de bruit.

Cependant, étant donné que les vitesses tangentielles sont les mêmes avant et après le choc, les directions normales de la vitesse seront toujours présentes, ce qui signifie que le problème sera unidirectionnel. Quand l'onde oblique de choc est infiniment faible, elle se transforme en une onde de Mach, avec un angle μ par rapport au sens de l'écoulement amont. On définit cet angle par $\mu = \arcsin(1/M)$. Une onde de choc oblique devient une onde de choc normale lorsque l'écoulement maintient sa direction. Donc, l'onde de choc normale et l'onde de Mach ne sont que des cas limites de choc oblique, où l'angle de choc est restreint entre $[\arcsin(1/M) < \beta < \pi/2]$. Cependant, le choc violent demeure insignifiant dans la réalité. Néanmoins, il convient de noter que la distinction entre le choc faible et le choc fort se manifeste par l'intensité de la pression aval (le taux de compression). Le choc fort se caractérise par une compression plus importante que le choc faible.

Il convient de souligner que lorsque la déviation θ dépasse une limite maximale $\theta_{\max}$, le modèle de choc oblique attaché ne sera plus valide, le choc devenant détaché. De plus, lorsqu'il y a un choc détaché ($\theta > \theta_{\max}$), il y aura un choc courbé. Il sera constitué d'une vibration normale dans la partie centrale, suivie d'une vibration intense où l'écoulement en aval dans cette zone est subsonique, ainsi qu'une ligne sonique qui restreint les différentes situations. Une fois que cette ligne sonique sera terminée, un faible choc aura lieu et l'écoulement deviendra supersonique. Une onde de Mach va se produire à la fin une fois que le choc faible est devenu infiniment faible. Plus l'angle de déviation du dièdre θ ou du cône β augmente pour un nombre de Mach M_1 donné, plus le choc sera intense. De plus, lorsque sa valeur dépasse une certaine limite, on peut observer un choc détaché. Pour un angle de déviation θ spécifique, lorsque le nombre de Mach M_1 augmente de plus en plus, on assistera à un choc intense. Une des missions d'une onde de choc oblique consiste à créer une entrée d'air supersonique appropriée, ce qui permet d'obtenir un écoulement plus adapté à l'entrée du compresseur.

3.2 Hypothèses de calcul

On tient à souligner, que le calcul des ondes de choc se fait sous certaines hypothèses. Ces hypothèses doivent refléter la réalité et traduisent le phénomène physique étudié. Afin d'obtenir des résultats plus proches de la réalité, les hypothèses suivantes sont considérées :

- La première hypothèse on suppose toujours que le gaz est parfait dans le calcul. Cette hypothèse suppose que la masse occupée par les molécules de gaz est nulle. Ceci est traduit par l'équation universelle du gaz parfait $P=pRT$.
- La deuxième hypothèse on considère que l'écoulement est non visqueux. Toujours le calcul d'onde se fait sur la négligence de la viscosité du gaz. Les équations d'Euler dans ce cas sont plus adaptées.
- Le gaz est considéré comme un gaz parfait. Mais l'application est faite à gaz réel et un nombre de Mach élevé. La température peut atteindre la valeur 3500 K pour l'air. Cette valeur limite d'utilisation de la température ne doit pas dépasser la température de dissociation des molécules de gaz. Dans ce cas, le gaz est appelé un gaz thermiquement imparfait.
- La quatrième hypothèse est qu'on est en accord avec la troisième hypothèse alors que le gaz est considéré comme caloriquement imparfait. Puisque la température maximale utilisée est élevée. Dans ce cas, la capacité thermique à pression constante C_p ne reste pas constante mais varie avec la densité et la température ($C_p(\rho, T)$). L'équation d'énergie connue pour un gaz parfait ($C_p=\text{constante}$) ne sera plus valable et nécessite des modifications.
- L'écoulement est considéré comme stationnaire. C'est-à-dire que les paramètres de l'écoulement ne dépendent pas du temps et ils sont déterminés après la phase transitoire.
- L'écoulement est considéré comme adiabatique. Cette condition est nécessaire et elle est très logique et acceptable avec la qualité des résultats obtenus par rapport à la réalité. Cette hypothèse indique que le transfert de chaleur entre les particules de gaz est absent. Cette condition n'est pas contradictoire avec la première hypothèse, puisque la masse des molécules est nulle, le transfert de chaleur entre les molécules est absent, ce qui est en accord avec la première hypothèse.
- L'écoulement est considéré comme rotationnel. Cette condition indique qu'il s'agit d'une dissipation provoquée par l'apparition des ondes de choc qui augmentent le taux d'entropie. La détente de l'écoulement est nécessaire pour un cône courbé soit irrotationnel sans dissipation.

- L'écoulement est supposé être purement supersonique. Cette condition est nécessaire vu que l'apparition des ondes de choc se fait uniquement dans le domaine supersonique et hypersonique.
- Absence de toute source de chaleur, que ce soit par conduction, convection ou rayonnement au contact de la paroi.
- Négligence de la force de gravité et l'absence de toutes les forces externes à distance d'une source magnétique ou électrique en contact avec le gaz. Dans le cas contraire il faut ajouter l'effet de ces forces dans les équations de conservation de quantité de mouvement.

3.3 Onde de choc normale d'un gaz réel

L'objectif de cette section est de créer un modèle mathématique pour l'onde de choc normale en se basant sur les hypothèses mentionnées précédemment. La vitesse de propagation d'une onde de choc dépend des conditions de pression et de densité de part et d'autre de choc.

Une onde de choc normale est illustrée dans la figure (3.1) en utilisant les paramètres de l'écoulement avant et après le choc.

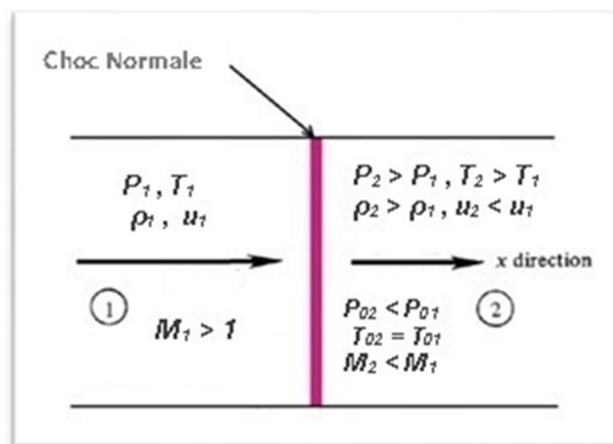


Figure 3.1 : Illustration d'une onde de choc normale.

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et Bernoulli sont utilisées dans cette étude, y compris l'équation d'état du gaz réel [1-3, 32, 35, 48, 70] par :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \quad (3.1)$$

$$dP + \rho V dV = 0 \quad (3.2)$$

$$VdV = -C_p(T, \rho)dT - C_T(T, \rho)d\rho \quad (3.3)$$

$$VdV = -C_s^2(T, \rho)\frac{d\rho}{\rho} \quad (3.4)$$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a\rho^2}{T} \quad (3.5)$$

Trois faits physiques importants sur l'écoulement peuvent être observés à partir de la figure 3.1, en utilisant la forme intégrale des équations de conservation pour ce volume de contrôle : Il n'y a pas de contraintes corporelles, le débit est constant et adiabatique. L'équation d'énergie des deux côtés d'une onde de choc normale permet de relier les caractéristiques du fluide sur les deux côtés d'une onde de choc normale. La formule qui en résulte est :

$$V^2(T, \rho) = 2 \cdot \left\{ \begin{aligned} &C_{vgp}(T - T_0) + R \cdot \theta \left(\frac{1}{1 - e^{\frac{\theta}{T}}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{\theta}{T_0}}} \right) + \\ &4 \cdot a \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + \left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$\frac{V_2^2(T, \rho)}{2} - \frac{V_1^2(T, \rho)}{2} = \left\{ \begin{aligned} &C_{vgp}(T_2 - T_1) + R\theta \cdot \left(\frac{1}{1 - e^{\frac{\theta}{T_2}}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{\theta}{T_1}}} \right) + \\ &4 \cdot a \left(\frac{\rho_2}{T_2} - \frac{\rho_1}{T_1} \right) + \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

En dérive l'équation (3.6) par rapport à T et p on trouve les relations suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{C_{V_{gp}} - \left(\frac{4a\rho}{T^2} \right) - \left(\frac{R\theta^2 e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}}{T^2 \left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)} \right)^2} \right)}{\sqrt{2} \cdot \left[C_{V_{gp}} (T - T_0) + R\theta \left(\frac{1}{1 - e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}} - \frac{1}{1 - e^{\left(\frac{\theta}{T_0}\right)}} \right) + 4a \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + \left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P}{\rho} \right) \right]} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\frac{4a}{T} + \frac{P}{\rho^2}}{\sqrt{2} \cdot \left[C_{V_{gp}} (T - T_0) + R\theta \left(\frac{1}{1 - e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}} - \frac{1}{1 - e^{\left(\frac{\theta}{T_0}\right)}} \right) + 4a \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + \left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P}{\rho} \right) \right]} \quad (3.9)$$

Il est également nécessaire de satisfaire les équations de continuité et de conservation de la quantité de mouvement à travers l'onde. Il est possible d'exprimer analytiquement ces exigences de la manière suivante [1], [33] :

$$\int_A \rho V dA \Rightarrow \rho_1 V_1 - \rho_2 V_2 = 0 \quad (3.10)$$

Et [52], [60] :

$$\int_A \rho V \bar{V} dA = - \int_A P dA \Rightarrow \rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 + P_1 - P_2 = 0 \quad (3.11)$$

Les équations (3.6) à (3.11) fournissent les données supplémentaires requises pour évaluer le débit à travers une onde de choc normale.

L'équation de la chaleur pour un gaz réel est donnée par [52], [58] :

$$\delta Q = C_v dT + l dV \quad (3.12)$$

Où le coefficient de Clapeyron est donné par [36] :

$$l = T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \quad (3.13)$$

De l'équation d'état de Berthelot (3.5) :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{v-b} + \frac{a}{T^2 v^2} \quad (3.14)$$

L'équation d'entropie est donnée par [52] et [54] :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (3.15)$$

Remplaçons l'équations (3.12), (3.13), (3.14) dans l'expressions (3.15), on obtient l'équation suivante pour L'entropie :

$$S = \int C_v \frac{dT}{T} + \int \left(\frac{R}{v-b} + \frac{a}{T^2 v^2} \right) dv \quad (3.16)$$

La relation entre le volume v et la masse volumique ρ :

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (3.17)$$

En substituant l'équation (3.16) pour l'état en amont (1) donnée par (T_1, P_1, ρ_1, M_1) et l'état d'aval (2) par (T_2, P_2, ρ_2, M_2) :

$$\frac{\Delta S}{R} = \frac{S_2 - S_1}{R} = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{C_v(T, \rho)}{RT} \right) dT + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{1}{\rho(b\rho - 1)} - \frac{a}{RT^2} \right) d\rho \quad (3.18)$$

$$\frac{\Delta S}{R} = \frac{S_2 - S_1}{R} = \int_{T_1}^{T_2} F_{ST} dT + \int_{\rho_1}^{\rho_2} F_{S\rho} d\rho \quad (3.19)$$

$$F_{ST}(T, \rho) = \frac{C_V(T, \rho)}{RT}, \text{ et } F_{S\rho}(T, \rho) = \frac{1}{\rho(b\rho - 1)} - \frac{a}{RT^2}$$

$$\frac{\Delta S}{R} = \frac{S_2 - S_1}{R} = -\log\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right) \quad (3.20)$$

D'après l'équation (3.20) $S_2 - S_1 > 0$ pour une onde de choc normale. Par conséquent l'équation (3.20) indique que $P_{02} < P_{01}$ La pression totale diminue à travers l'onde de choc.

Le rapport des masses volumiques isentropique juste avant et après le choc peut être calculé en utilisant la relation (3.21). Cette relation est présentée dans [45-46]. Ensuite on utilise les formules de Simpson [4] avec une condensation des nœuds [14], on obtient :

$$\frac{\rho_i}{\rho_{0i}} = \exp\left(-\int_{T_i}^{T_0} \frac{C_P(T, \rho)}{S_V^2(T, \rho)} dT\right) \quad i = 1, 2 \quad (3.21)$$

Le rapport des pressions isentropique en amont du choc peut être déterminé par la relation :

$$\frac{P_i}{P_{0i}} = \left(\frac{\rho_i}{\rho_{0i}}\right) \cdot \left(\frac{T_i}{T_{0i}}\right) \quad i = 1, 2 \quad (3.22)$$

Le rapport des pressions statique totale à travers le choc peuvent être déterminés par :

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(\frac{P_{02}}{P_2}\right) \cdot \left(\frac{P_2}{P_1}\right) \cdot \left(\frac{P_1}{P_{01}}\right) \quad (3.23)$$

Le rapport des températures statique totale à travers le choc peuvent être déterminés par :

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_2} \right) \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \cdot \left(\frac{T_1}{T_{01}} \right) \quad (3. 24)$$

Le rapport des masse volumique statique totale à travers le choc peuvent être déterminés par :

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left(\frac{\rho_{02}}{\rho_2} \right) \cdot \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_{01}} \right) \quad (3. 25)$$

Il est important de souligner qu'il est impossible d'aborder l'étude du phénomène de choc oblique sans prendre en compte l'étude du phénomène de l'onde de choc normale.

3.4 Onde de choc oblique d'un gaz réel

Dans ce paragraphe, nous allons exposer les diverses équations utilisées pour résoudre le problème de choc oblique à gaz réel en se basant sur les hypothèses présentées dans cette recherche. Les équations et l'algorithme de calcul des paramètres thermodynamiques d'un choc oblique seront développés en utilisant le principe d'une onde de choc normale. Ainsi, on ajoute une vitesse tangentielle ($w=v_t$) identique de part et d'autre du choc normal à la vitesse V_1 amont au choc. La figure (3.2) illustre le principe d'une onde de choc oblique [1, 3, 5, 9, 12, 21-22, 33, 39-40, 43].

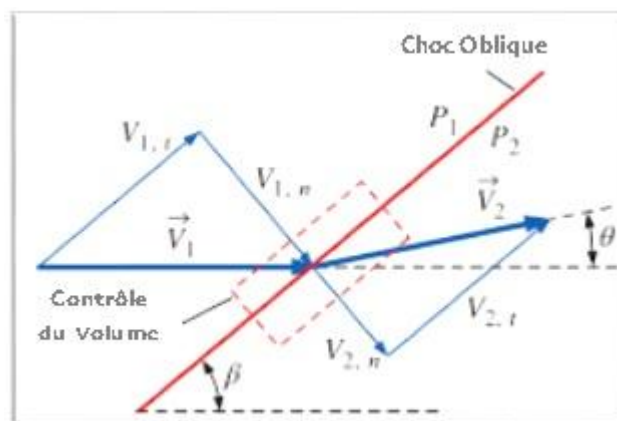


Figure 3.2 : Onde de choc oblique autour d'un dièdre.

L'hypothèse précédente, nous permet d'écrire :

$$w_1 = w_2 = w = v_t \quad (3. 26)$$

On remarque que les éléments habituels de la vitesse n'influent pas. L'onde de choc oblique présente donc les mêmes paramètres thermodynamiques que l'onde de choc normale. Selon la figure (3.1), le nombre de Mach amont M_1 est remplacé par la composante normale M_{n1} .

La composante normale de nombre de Mach amont au choc oblique est représenté par :

$$M_{n1} = M_1 \sin \beta \quad (3. 27)$$

La composante normale de nombre de Mach aval au choc oblique s'écrit :

$$M_{n2} = M_2 \sin(\beta - \theta) \quad (3. 28)$$

D'après la figure (3.2) et d'après l'équation de continuité (3.1) on peut écrire :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\tan(\beta)}{\tan(\beta - \theta)} \quad (3. 29)$$

On applique les relations (3.26) à (3.29) au modèle d'un gaz parfait et les mêmes règles sont également applicables au modèle à gaz réel, car il s'agit de la géométrie présentée dans la figure (3.2).

Le nombre de Mach aval du choc peut être calculé en intégrant l'équation de la conservation d'énergie (3.6) pour un choc normal. Cette équation est divisée par l'équation de la célérité du son (2.63). On obtient alors :

$$M_2^2(T, \rho) = \frac{V_2^2(T, \rho)}{S_v^2(T, \rho)} \quad (3. 30)$$

Pour déterminer les paramètres totales (T , P , ρ , M) après le choc on va procéder à écrire les relations entre l'état 2 (T , P , ρ , M) et l'état 1 (T_0 , P_0 , ρ_0 , M_0). Alors les deux équations (2.53) et (2.57) sont :

$$\begin{aligned}
f_1(T, \rho) = & \frac{R}{(\gamma_{gp} - 1)} \log \left(\frac{T}{T_0} \right) + R \log \left(\frac{\rho_0(1 - b\rho)}{\rho(1 - b\rho_0)} \right) - 2a \left(\frac{\rho}{T^2} - \frac{\rho_0}{T_0^2} \right) + \\
& R \log \left(\frac{\left(\frac{\theta}{e^{\frac{T}{T_0}} - 1} \right)}{\left(\frac{\theta}{e^{\frac{T}{T}} - 1} \right)} \right) + R \left(\frac{\theta}{T} \left(\frac{\frac{\theta}{e^{\frac{T}{T}} - 1}}{\left(\frac{\theta}{e^{\frac{T}{T}} - 1} \right)} \right) - \frac{\theta}{T_0} \left(\frac{\frac{\theta}{e^{\frac{T}{T_0}} - 1}}{\left(\frac{\theta}{e^{\frac{T}{T_0}} - 1} \right)} \right) \right)
\end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
f_2(T, \rho) = & \frac{1}{(\gamma_{gp} - 1)} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) + \left(\frac{\theta}{T} \right) \left(\frac{1}{\left(\frac{\theta}{1 - e^{\frac{T}{T}}} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{\theta}{1 - e^{\frac{T}{T_0}}} \right)} \right) + \\
& \left(\frac{1}{RT} \right) \cdot \left\{ 4 \cdot a \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + \right. \\
& \left. \left(\frac{RT_0}{(1 - b\rho_0)} - \frac{a\rho_0}{T_0} - \frac{RT}{(1 - b\rho)} + \frac{a\rho}{T} \right) \right\}
\end{aligned} \quad (3.32)$$

En dérive l'équation (3.31) par rapport à T et p on trouve les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial T} = & -R \left(\theta^2 \cdot \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)}}{T^3 \left(e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)} - 1 \right)} + \theta \cdot \frac{e^{2\left(\frac{\theta}{T} \right)}}{T^2 \left(e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)} - 1 \right)^2} - \theta^2 \cdot \frac{e^{2\left(\frac{\theta}{T} \right)}}{T^3 \left(e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)} - 1 \right)^2} - \theta \cdot \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)}}{T^2 \left(e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)} - 1 \right)^2} \right) \\
& + \frac{1}{(\gamma_{gp} - 1)} \cdot \frac{R}{T} + R\theta \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)}}{T^2 \left(e^{\left(\frac{\theta}{T} \right)} - 1 \right)} + 4 \cdot a \cdot \frac{\rho}{T^2}
\end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho} = -\frac{R}{\rho(1-b\rho)} - \frac{2a}{T^2} \quad (3.34)$$

En dérive l'équation (3.32) par rapport à T et p on trouve les relations suivantes :

$$\frac{\partial f_2}{\partial T} = \frac{\theta \cdot \left(\frac{\frac{\theta}{T}}{1-e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}} - \frac{1}{\left(1-e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}\right)} + \frac{1}{\left(1-e^{\left(\frac{\theta}{T_0}\right)}\right)} \right)}{T^2} - \frac{T_0}{(\gamma-1)T^2} + \frac{\left(T \cdot \left(-\frac{R}{(1-b\rho)} - \frac{5 \cdot a\rho}{T^2} \right) - 4 \cdot a \left(\frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) - \frac{\frac{RT_0}{(1-b\rho_0)} + \frac{a \cdot \rho_0}{T_0} + \frac{RT}{(1-b\rho)} - \frac{a\rho}{T}}{RT^2} \right)}{RT^2} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \rho} = \frac{5 \cdot a}{RT^2} - \frac{b}{(1-\rho b)^2} \quad (3.36)$$

L'expression résultante de la célérité du son d'après chapitre 2 est :

$$S_v^2(T, \rho) = \frac{RT}{(1-b\rho)^2} - \frac{2 \cdot a\rho}{T} + \frac{\rho^2 T \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)^2 (\gamma_{gp} - 1)}{R \left[1 + (\gamma_{gp} - 1) \left\{ \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2 \cdot a\rho}{RT^2} \right\} \right]} \quad (3.37)$$

En dérive l'équation (3.37) par rapport à T et p on trouve les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{R}{(1-b\rho)^2} + \frac{2 \cdot a\rho}{T^2} + \frac{(\gamma_{gp}-1) \cdot \rho^2}{\left(R \left(1 + (\gamma_{gp}-1) \cdot \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2 \cdot a\rho}{RT^2} \right) \right)^2} \right) \times \\
 & \left(\left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)^2 - \frac{4 \cdot a \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)}{T^2} \cdot \left(1 + (\gamma_{gp}-1) \cdot \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2 \cdot a\rho}{RT^2} \right) \right) - \\
 & \left(\gamma_{gp}-1 \right) \left(\frac{\theta^2 \left(-e^{\frac{\theta}{T}} \cdot \theta \cdot \left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2 - 2 \cdot T \left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2 + 2 \cdot \theta e^{\frac{\theta}{T}} \left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right) \right) e^{\frac{\theta}{T}}}{T^4 \left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^4} - \frac{4 \cdot a\rho}{RT^3} \right) \\
 & T \cdot \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)^2 \\
 & \frac{\partial S_V}{\partial T} = \frac{\left(\frac{R}{(1-b\rho)^2} + \frac{2 \cdot a\rho}{T^2} + \frac{(\gamma_{gp}-1) \cdot \rho^2}{\left(R \left(1 + (\gamma_{gp}-1) \cdot \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2 \cdot a\rho}{RT^2} \right) \right)^2} \right) \cdot \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)^2 \cdot (\gamma_{gp}-1)}{2 \cdot \left(\frac{RT}{(1-b\rho)^2} - \frac{2 \cdot a\rho}{T} + \frac{\rho^2 T \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)^2 \cdot (\gamma_{gp}-1)}{\left(R \left(1 + (\gamma_{gp}-1) \cdot \left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2 \cdot a\rho}{RT^2} \right) \right)^2} \right)}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2 \cdot bRT}{(1-b\rho)^2} - \frac{2 \cdot a}{T} + \frac{(\gamma_{gp}-1) \cdot T}{R \left(1 + (\gamma_{gp}-1) \left(\left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{1 - e^{\frac{\theta}{T}}} + \frac{2 \cdot a\rho}{RT^2} \right) \right)} \right)^2 \times \\
& \left(\left(2 \cdot \rho \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)^2 + \frac{2 \cdot R(2b\rho-1) \cdot \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)}{(1-b\rho)^2} \right) \cdot \right. \\
& \left. \left(1 + (\gamma_{gp}-1) \cdot \left(\left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{1 - e^{\frac{\theta}{T}}} + \frac{2 \cdot a\rho}{RT^2} \right) \right) - \frac{2 \cdot (\gamma_{gp}-1) \cdot a \cdot \rho^2 \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)^2}{RT^2} \right) \right) \\
& \frac{\partial S_V}{\partial \rho} = \frac{\left(\frac{2 \cdot bRT}{(1-b\rho)^2} - \frac{2 \cdot a}{T} + \frac{\rho^2 T \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)^2 \cdot (\gamma_{gp}-1)}{R \left(1 + (\gamma_{gp}-1) \left(\left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{1 - e^{\frac{\theta}{T}}} + \frac{2 \cdot a\rho}{RT^2} \right) \right)} \right)^2}{\left(2 \cdot \left(\frac{2 \cdot bRT}{(1-b\rho)^2} - \frac{2 \cdot a}{T} + \frac{\rho^2 T \left(\frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)^2 \cdot (\gamma_{gp}-1)}{R \left(1 + (\gamma_{gp}-1) \left(\left(\frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{1 - e^{\frac{\theta}{T}}} + \frac{2 \cdot a\rho}{RT^2} \right) \right)} \right)} \right)}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Afin d'évaluer tous les paramètres thermodynamiques à l'aide du choc oblique, il est nécessaire de déterminer tout d'abord la déviation de choc β correspondant à M_1 , T_0 et θ respectivement. Étant donné qu'ils sont directement liés à β dans la relation (3.29). Ainsi, la principale difficulté réside dans la détermination de l'angle de choc β .

Il convient de noter que les auteurs dans les références [21-22, 39-40] utilisent la relation suivante (3.40) afin de calculer la valeur de β correspondant à M_1 et θ pour le modèle d'un gaz parfait calorifiquement et thermiquement parfait. Ils ont remplacé uniquement la variation de γ avec la température, pour notre travail γ varie en fonction de la température et de la densité et nous utilisons aussi les relations (2.67), (2.71) et (2.74).

$$\tan(\theta) = \frac{2}{\tan(\beta)} \cdot \frac{M_1^2 \sin^2(\beta) - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos(2\beta)) + 2} \quad (3.40)$$

Deux valeurs de β sont admises par l'algorithme développé pour le calcul de β correspondant à M_1 , θ et T_0 . Une option concerne le choc faible tandis que l'autre option concerne le choc fort. Ainsi, selon les deux types de choc, tous les paramètres thermodynamiques accepteront deux solutions.

3.5 Procédure de calcul numérique

3.5.1 Procédure de calcul par la méthode de Newton

L'application de cette méthode à un système de deux équations non linéaires est suffisante pour illustrer le cas général [77].

Considérons donc le système :

$$\begin{cases} f_E(T, \rho) = 0 \\ f_M(T, \rho) = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Soit $[T, \rho]$, une approximation initiale de la solution de ce système.

Cette approximation initiale, est cruciale et doit toujours être choisie avec soin.

Le but de ce qui suit est de déterminer les pas $[dT, d\rho]$ à $[T, \rho]$ de telle sorte que :

$$\begin{cases} f_E(T_i + dT, \rho_i + d\rho) = 0 \\ f_M(T_i + dT, \rho_i + d\rho) = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Pour déterminer $[dT, d\rho]$ il suffit maintenant de faire un développement de Taylor en deux variables pour chacune des deux fonctions [79] :

$$\begin{cases} 0 = f_E(T_i, \rho_i) + \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho + \dots \\ 0 = f_M(T_i, \rho_i) + \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho + \dots \end{cases} \quad (3.43)$$

Dans les relations précédentes, les pointillés désignent des termes d'ordre supérieur ou égal à deux et faisant intervenir les dérivées partielles d'ordre correspondant.

Pour déterminer $[dT, d\rho]$ Il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur et d'échire :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho = -f_E(T_i, \rho_i) \\ \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho = -f_M(T_i, \rho_i) \end{cases} \quad (3.44)$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_E}{\partial T}(T, \rho) & \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T, \rho) \\ \frac{\partial f_M}{\partial T}(T, \rho) & \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T, \rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dT \\ d\rho \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_E(T, \rho) \\ f_M(T, \rho) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Ce système linéaire s'écrit, également sous une forme plus compacte [59] :

$$J(T_i, \rho_i)\Delta\vec{k} = -\vec{R}(T_i, \rho_i) \quad (3.46)$$

Où $J(T, \rho)$ désigne la matrice des dérivées partielles ou matrice jacobienne évaluée au point (T_i, ρ_i) où $\Delta\vec{k}$ est le vecteur des corrections relatives à chaque variable $(\Delta\vec{k} = [\Delta T, \Delta\rho])$ et $-\vec{R}(T_i, \rho_i)$ est le vecteur résidu évalué en (T_i, ρ_i) .

Le déterminant de la matrice jacobienne est appelé le jacobien.

Le jacobien doit bien entendu être différent de 0 pour que la matrice jacobienne soit inversible. On pose ensuite :

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i + \Delta T \\ \rho_{i+1} = \rho_i + \Delta \rho \end{cases} \quad (3.47)$$

Qui est la nouvelle approximation de la solution du système non linéaire. On cherchera par la suite à corriger (T_{i+1}, ρ_{i+1}) d'une nouvelle quantité $\Delta \vec{k}$, et ce jusqu'à la convergence. Pour en arriver à l'algorithme général suivant :

3.5.1.2 Algorithme de la méthode de Newton appliquée aux systèmes

1. Étant donné ε , un critère d'arrêt.
2. Étant donné N, le nombre maximal d'itérations.
3. Étant donné $\vec{k} = [T_i, \rho_i]$ une approximation initiale de la solution du système.
4. Résoudre le système linéaire : $J(T_i, \rho_i) \Delta \vec{k} = -\vec{R}(T_i, \rho_i)$

$$\text{Et poser : } \begin{cases} T_{i+1} = T_i + \Delta T \\ \rho_{i+1} = \rho_i + \Delta \rho \end{cases}$$

5. Si $\|T_i - T_{i+1}\| + \|\rho_i - \rho_{i+1}\| < \varepsilon$ et $\|\vec{R}[T_i, \rho_i]\| \leq \varepsilon$
 - Convergence atteinte.
 - écrire la solution.
 - arrêt.
6. i reçoit i+1 et retour à l'étape 4.
7. Si le nombre maximal d'itérations N est atteint.
 - Convergence non atteinte en N itérations.
 - Arrêt.

3.5.1.3 Le choix de la solution initial de la méthode de Newton

La convergence de la méthode de Newton dépend directement de l'approximation initial (T_i, ρ_i) de la solution [81], un mauvais choix de (T_i, ρ_i) causera une divergence, pour cela on va initialiser la solution en utilisant les

paramètres thermodynamiques d'un gaz parfait par la suite on verra si ce choix est justifié.

Notre étude est focalisée sur la détente isentropique unidimensionnelle, l'écoulement dans ce cas est considéré comme supersonique ($1 < M < 6$) On va varier le nombre de mach définie dans l'équation f_M dans ce domaine est pour chaque valeur de M on calcule les paramètres initiaux (celles du gaz parfait) en appliquant les lois suivantes [46] et [61].

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M_i^2 \right]^{-\frac{1}{\gamma_{gp} - 1}}, \frac{P_i}{P_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M_i^2 \right]^{-\frac{\gamma_{gp}}{\gamma_{gp} - 1}}, \frac{T_i}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M_i^2 \right]^{-1} \quad (3.48)$$

3.5.2 Procédure de calcul des paramètres thermodynamiques

3.5.2.1 Calcul la masse volumique génératrice ρ_0 par la méthode de Dichotomie

Après de fixer les valeurs de la pression et la température génératrices, il faut calculer la masse volumique génératrice ρ_0 , cette dernière calculée numériquement à partir de l'équation de Berthelot par la méthode de dichotomie [59], on peut choisir facilement un intervalle $[\rho_1, \rho_2]$ contenant la masse volumique ρ_0 et qui doit vérifier la condition $F(\rho_1) \times F(\rho_2) \leq 0$. On peut prendre $\rho_1 = 0 \text{ Kg/m}^3$ et $\rho_2 = \rho_1 + \text{pas}$. Une fois que cet intervalle est déterminé, on peut calculer ρ_0 avec une précision ε et un pas très petit. La valeur ρ_0 obtenue dépend de la précision ε et du pas.

Le nombre d'itérations correspondant à la précision ε nécessaire pour déterminer la masse volumique génératrice ρ_0 est donné par [79] :

$$K = \frac{2}{0.6931} \log \left(\frac{Pas}{\varepsilon} \right) + 1 \quad (3.49)$$

Si : $\varepsilon = 10^{-16}$ et le pas $= 10^{-4}$, le nombre d'itérations K ne peut excéder 41 itérations.

3.5.2.2 Calcul des paramètres en aval du choc par la méthode de Newton

Les rapports thermodynamiques peuvent être calculés numériquement en résolvant le système d'équations algébriques non linéaires. Le calcul est effectué en utilisant l'algorithme de Newton [77,79], avec une dérivation numérique à partir

des équations précédentes (3.5), (3.30) et (3.31). Après avoir établi ces paramètres statiques, il est possible de calculer les rapports thermodynamiques en divisant ces paramètres statiques par les paramètres génératrices.

Les paramètres en aval du choc peuvent être déterminées en résolvant le système d'équations algébriques non linéaires composé de l'équation d'énergie (3.7), de l'équation de continuité (3.10) et de l'équation de quantité de mouvement (3.11). Le calcul est effectué à l'aide de l'algorithme de Newton [77,79] avec une dérivation numérique les équations (3.7), (3.10) et (3.11). On procède tout d'abord à l'utilisation de la température, puis de la masse volumique, en utilisant les paramètres aval d'un gaz parfait comme vecteur initial pour le démarrage de calcul, concernant notre algorithme, la dérivation se fait avec un pas= 10^{-6} , et le calcul se fait avec une précision $\varepsilon=10^{-8}$, et le nombre d'itérations k ne peut excéder 100 itérations.

Après la détermination de ces paramètres statiques, il est possible de calculer les rapports thermodynamiques avec une précision de $\varepsilon = 10^{-16}$. Il faut réaliser cela en divisant ces paramètres par les paramètres statiques avant le choc, pour déterminer les rapports de température T_2/T_1 , pression P_2/P_1 , masse volumique ρ_2/ρ_1 et nombre de Mach M_2/M_1 en substituant les paramètres de l'état aval T_2 , P_2 , ρ_2 dans l'équation (3.30).

3.5.2.3 Calcul d'entropie par la méthode de Simpson

La détermination de l'entropie est donnée par l'équation (3.19), qui nécessite l'intégration numérique des fonctions $F_{ST}(T, \rho)$ dans l'intervalle $[T_1, T_2]$ et $F_{Sp}(T, \rho)$ dans l'intervalle $[\rho_1, \rho_2]$. Notons que les fonctions $F_{ST}(T, \rho)$ et $F_{Sp}(T, \rho)$ dépendent des paramètres T_0 et ρ_0 . Pour avoir une idée de la variation de chacune des deux fonctions précédentes, avant de prendre une décision sur le choix de la méthode d'intégration, les courbes de variation sont tracées sur les figures : 3.3 et 3.4.

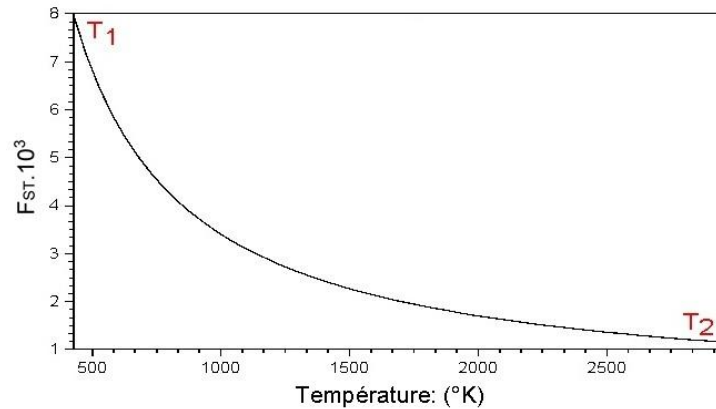


Figure 3.3 : Variation de la fonction $F_{ST}(T, \rho)$ dans l'intervalle $[T_1, T_2]$ par apport à T .

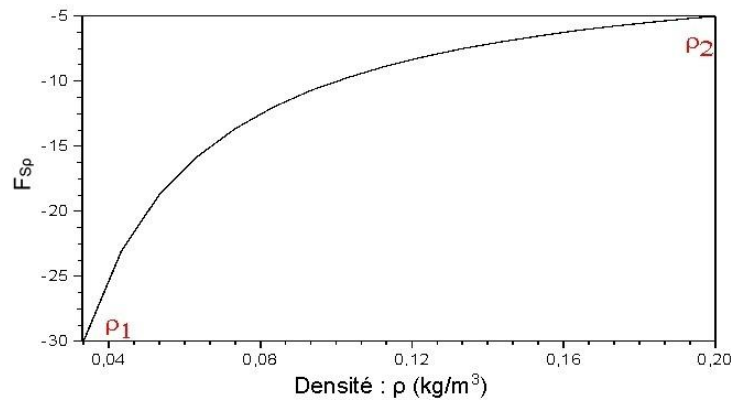


Figure 3.4 : Variation de la fonction $F_{Sp}(T, \rho)$ dans l'intervalle $[\rho_1, \rho_2]$ par apport à ρ .

On peut conclure que l'intégration avec un pas constant nécessite une discrétisation très élevée pour obtenir une bonne précision pour les variations très rapides aux extrémités gauches de chaque intervalle $T = T_1$ et $\rho = \rho_1$.

Le traçage de ces fonctions est donc choisi pour $T_0 = 3000$ K et $M_S = 6,00$ (extrêmement supersonique). Notons que les fonctions $F_{ST}(T, \rho)$ et $F_{Sp}(T, \rho)$ ont une très forte inclinaison au voisinage de la température T_1 et de la densité de masse ρ_1 , respectivement.

La condensation des nœuds est nécessaire au voisinage de T_1 et de ρ_1 pour ces fonctions. Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une très grande précision en peu de temps, en minimisant le nombre de nœuds de la méthode d'intégration.

La méthode d'intégration choisie est celle de Simpson [59], [70], pour le calcul numérique des intégrales des fonctions $F_{ST}(T, \rho)$ et $F_{Sp}(T, \rho)$ dans l'équation (3.19). La fonction de condensation est donnée par [33], [52] :

$$S_i = b_1 \cdot Z_i + (1 - b_1) \cdot \left[1 - \frac{\tanh[b_2 \cdot (1 - Z_i)]}{\tanh(b_2)} \right] \quad (3.50)$$

Où :

$$Z_i = \frac{i-1}{N-1}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.51)$$

Après avoir déterminé la fonction de condensation, les distributions de température et de densité peuvent être déterminées à partir de :

$$T_i = S_i \cdot (T_D - T_G) + T_G \quad (3.52)$$

$$\rho_i = S_i \cdot (\rho_D - \rho_G) + \rho_G \quad (3.53)$$

La température T_D correspond à T_2 selon la fonction $F_{ST}(T, \rho)$, et T_G correspond à T_1 . La densité ρ_D correspond à ρ_2 pour la fonction $F_{Sp}(T, \rho)$, et la densité ρ_G correspond à ρ_1 . Si l'on adopte une valeur de b_1 proche de zéro $b_1 = 0,1$ et $b_2 = 2,0$, les nœuds peuvent être condensés à l'extrémité gauche de l'intervalle T_1 . Et lorsque les valeurs de b_1 sont proches de 2,0 ($b_1 = 1,9$), les nœuds peuvent être condensés à l'extrémité droite. Pour deux sous-intervalles de même longueur, $b_1 = 1,0$.

La figure 3.5 montre la distribution des nœuds en fonction des valeurs de b_1 . Notez que l'intérêt ici est de condenser les nœuds sur le côté gauche (T_1, ρ_1) pour une variation des fonctions $F_{ST}(T, \rho)$ et $F_{Sp}(T, \rho)$.

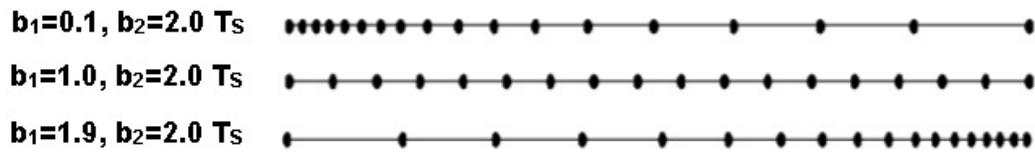


Figure 3.5 : Représentation de condensation de nœud.

3.5.2.4 Calcul des paramètres de stagnation en aval du choc par la méthode de Newton

Une fois l'entropie calculée, les paramètres de stagnation en aval peuvent être trouvées en résolvant le système d'équations algébriques non linéaires formé par l'équation d'énergie (3.31), l'équation du nombre de Mach (3.30) et l'équation de l'entropie (3.19). Le calcul est effectué à l'aide de l'algorithme de Newton [77,79] avec une dérivation numérique des équations (3.30), (3.31) et (3.19), la première avec la température et la seconde avec la densité. En fixant les paramètres du cas de stagnation en aval à ceux d'un gaz parfait comme vecteur initial, la dérivation est effectuée avec un pas de calcul égal à 10^{-6} . Une fois ces paramètres de stagnation déterminés, le calcul des rapports thermodynamiques peut être effectué avec une précision de $\varepsilon = 10^{-8}$. Ces paramètres de stagnation peuvent être divisés par les paramètres de stagnation en amont pour trouver les rapports de stagnation.

Le reste des paramètres à travers le choc oblique comme les rapports de pression totale P_{02}/P_{01} , température totale T_{02}/T_{01} , masse volumique totale ρ_{02}/ρ_{01} sont calculés de la même façon comme le cas précédent en résolvant les équations (3.31) et (3.32) pour déterminer les paramètres statiques totales T_{02} et ρ_{02} . La pression P_{02} est déterminée à partir de l'équation de Berthelot (3.5) en remplaçant $T=T_{02}$ et $\rho=\rho_{02}$. Après la détermination de ces paramètres statiques totales, il est possible de calculer les rapports à partir des relations (3.21), (3.22), (3.23), (3.24) et (3.25).

3.6 Comparaison entre un choc normal et un choc oblique

Les ondes de choc normales et les ondes de choc obliques sont toutes deux des phénomènes observés dans les écoulements compressibles, mais elles présentent des caractéristiques distinctes, en particulier dans le contexte des gaz réels.

Voici les principales différences entre ces deux phénomènes :

Tableau 3.1 : Comparaison entre le choc normal et le choc oblique.

Choc Normal	Choc Oblique
Ces ondes sont perpendiculaires à la direction de l'écoulement.	Ces ondes sont inclinées par rapport à la direction de

L'écoulement est brusquement ralenti lorsqu'il traverse le choc. ▪ Les propriétés de l'écoulement (pression, température, densité et vitesse) changent de manière significative à travers le choc, l'écoulement passant de supersonique à subsonique. ▪ L'intensité du choc est déterminée uniquement par le nombre de Mach de l'écoulement entrant est généralement plus forte que les chocs obliques pour le même nombre de Mach. ▪ L'écoulement derrière un choc normal est subsonique, avec une augmentation significative de la pression et de la température. ▪ L'analyse est relativement simple, utilisant les relations de Rankine Hugoniot pour relier les conditions en amont et en aval. ▪ Dans les gaz réels, les effets de la viscosité, de la conductivité thermique et des variations de la chaleur spécifique peuvent influencer la structure et le comportement du choc.	l'écoulement. Le flux change de direction et décéléré à un angle. ▪ Les propriétés de l'écoulement changent également à travers le choc, mais l'écoulement reste supersonique dans la direction parallèle au choc, passant à subsonique uniquement dans la direction normale au choc. ▪ L'intensité du choc dépend à la fois du nombre de Mach et de l'angle du choc. Le choc oblique peut-être plus faible qu'un choc normal pour les mêmes conditions en amont. ▪ L'écoulement derrière un choc oblique reste supersonique dans la direction parallèle au choc, mais il est subsonique dans la direction normale au choc. ▪ L'analyse est plus complexe, nécessitant l'utilisation des relations de chocs obliques et des considérations sur l'angle de choc et la direction de l'écoulement. ▪ Des effets similaires s'appliquent aux gaz réels, mais l'interaction avec la couche limite et le potentiel de distorsion de l'onde de choc peuvent être plus prononcés en
---	--

▪ Couramment rencontrées dans des applications telles que les tuyères supersoniques et les tubes de choc.	raison de la nature inclinée du choc. ▪ Fréquemment observées dans les applications aérospatiales, notamment autour des ailes et des corps à des angles d'attaque élevés.
---	--

3.7 Calcul de l'erreur du modèle GP par rapport au modèle GR

Le modèle mathématique du gaz parfait (GP) est développé en considérant la capacité thermique (CP) constante, ce qui donne des résultats acceptables pour les basses températures. Selon cette étude, nous pouvons remarquer une différence sur les résultats donnés entre le modèle de gaz parfait (GP) et le modèle à gaz réel (GR) développé. Alors, l'erreur donnée par le modèle (GP) par rapport à notre modèle (GR) peut être calculée pour chaque paramètre. Par conséquent, pour chaque valeur de P_0 , T_0 , M_1 et β , l'erreur ε peut être évaluée par la relation suivante:

$$\varepsilon = \left| 1 - \frac{Parametre_{GP}(P_0, T_0, M_1, \beta)}{Parametre_{GR}(P_0, T_0, M_1, \beta)} \right| \times 100 \quad (3.54)$$

3.8 Algorithme de calcul

Tableau 3.2 : Algorithme de programme

1. Début 2. Les données de problème $M_1, P_0, T_0, a, b, \varepsilon, \theta, \Delta\beta$. 3. Calcul ρ_0, par la méthode de Dichotomie 4. Calcul ρ_1, P_1, T_1, juste avant le choc par la méthode de Newton 5. $\beta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_1}\right) + \varepsilon$ 6. Calcul $\rho_2, P_2, T_2, V_2, S_{V2}, M_2$, après le choc par la méthode de Newton 7. Calcul ΔS_{2-1}, par la méthode de Simpson 8. Calcul des paramètres: $\theta, \beta, M_2, \rho_2/\rho_1, P_2/P_1, T_2/T_1, \rho_{02}/\rho_{01}, P_{02}/P_{01}, T_{02}/T_{01}$ et ΔS_{2-1}, correspondant à β_1.

9. Calcul M_{n1} , M_{n2} , (*Choc Oblique*).
10. Calcul M_{n2} (*Choc Normal*), correspondant à M_{n1} en utilisant les relations d'une onde de choc normale.
11. $\Delta_1 = M_{n2}(\text{Normal}) - M_{n2}(\text{Oblique})$.
12. $\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta$
13. Si $\beta_2 > 90^\circ$, Alors choc Détaché
Fin Si
14. Si $\beta_2 < 90^\circ$, Alors
15. Calcul ρ_2 , P_2 , T_2 , V_2 , S_{V2} , M_2 , après le choc par la méthode de Newton
16. Calcul ΔS_{2-1} , par la méthode de Simpson
17. Calcul des paramètres: θ , β , M_2 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , T_2/T_1 , ρ_{02}/ρ_{01} , P_{02}/P_{01} , T_{02}/T_{01} et ΔS_{2-1} , correspondant à β_2 .
18. Calcul M_{n1} , M_{n2} , (*Choc Oblique*).
19. Calcul M_{n2} (*Choc Normal*), correspondant à M_{n1} en utilisant les relations d'une onde de choc normale.
Fin Si
20. $\Delta_2 = M_{n2}(\text{Normal}) - M_{n2}(\text{Oblique})$.
21. $Prod = \Delta_1 \times \Delta_2$
22. Si $Prod > 0$, Alors : $\beta_1 = \beta_2$; $\Delta_1 = \Delta_2$, Aller à la 12^{ème} étape
Fin Si
23. Si $Prod < 0$, Alors
24. $N = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{\Delta\beta}{\epsilon}\right)}{\log(2)} \right\rceil + 1$
25. $I = 1$
26. $\beta_3 = (\beta_1 + \beta_2)/2$
27. Calcul ρ_2 , P_2 , T_2 , V_2 , S_{V2} , M_2 , après le choc par la méthode de Newton
28. Calcul ΔS_{2-1} , par la méthode de Simpson
29. Calcul des paramètres: θ , β , M_2 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , T_2/T_1 , ρ_{02}/ρ_{01} , P_{02}/P_{01} , T_{02}/T_{01} et ΔS_{2-1} , correspondant à β_3 .
30. Calcul M_{n1} , M_{n2} , (*Choc Oblique*).
31. Calcul M_{n2} (*Choc Normal*), correspondant à M_{n1} en utilisant les relations d'une onde de choc normale.
32. $\Delta_3 = M_{n2}(\text{Normal}) - M_{n2}(\text{Oblique})$.

33. $Prod = \Delta_1 \times \Delta_3$

34. Si $Prod \leq 0$, Alors : $\beta_2 = \beta_3$; $\Delta_2 = \Delta_3$
 Fin Si

35. Si $Prod > 0$, Alors : $\beta_1 = \beta_3$; $\Delta_1 = \Delta_3$
 Fin Si

36. $I = I + 1$

37. Si $I \leq N$, Alors Aller à la 26^{ème} étape
 Fin Si

38. Si $I > N$, Alors : $\beta = \beta_3$, Choc faible
 Fin Si

39. Affichage de θ , β , M_2 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , T_2/T_1 , ρ_{02}/ρ_{01} , P_{02}/P_{01} , T_{02}/T_{01}
 et ΔS_{2-1} .

40. Fin.

En fait, notre intérêt se porte beaucoup plus sur le choc faible que sur le choc fort, étant donné son apparition dominante dans la pratique :

- ✓ Le choc faible est le plus fréquent, le plus stable et le plus performant dans les systèmes réels.
- ✓ Le choc fort, bien qu'il existe théoriquement, est rare, énergétiquement coûteux et peu compatible avec les conceptions optimisées.

3.9 Conclusion

Ce chapitre présente les caractéristiques uniques des ondes de choc normales et obliques dans les gaz réels, et soulignent l'importance de comprendre ces deux types d'ondes dans l'étude de la dynamique des écoulements compressibles. Nous présentons aussi les techniques numériques pour résoudre un système d'équation non linéaire formé par trois équations, et développer l'algorithme de calcul numérique pour les différentes formules et méthodes développées précédemment.

CHAPITRE 4

RESULTATS ET DISCUSSIONS

4.1 Introduction

Dans cette section, nous présenterons les résultats trouvés et leurs interprétations. Afin de faciliter la lecture, nous avons divisé les résultats en deux parties : la première partie concerne la variation des paramètres de l'onde de choc alors que la deuxième partie traite les erreurs liées au processus numérique.

Tous les résultats obtenus sont fonction de quatre paramètres physiques principaux : M_1 , T_0 , P_0 , et β . Notamment, l'application est faite pour l'air. La convergence des résultats dépend de la discrétisation, ce qui se traduit par le choix du pas utilisé dans la méthode de Newton. Cependant, notre programme peut traiter n'importe quel type de gaz, bien que nous ayons utilisé les fonctions $CP(T, \rho)$ et R uniquement pour l'air. Après plusieurs tests de convergence et afin d'arriver à une précision de $\varepsilon=10^{-4}$, un pas d'espace de $\Delta x=0,001$ a été pris en considération.

Toujours pour valider, on peut consulter les références [1-3, 9, 12, 22-23, 38-40] pour les résultats du choc oblique pour le cas GP ($\gamma=1.402$). Dans le cas du modèle HT, on peut trouver ces résultats dans les références [22-23, 39-40], avec une variation légèrement modérée. Dans le cas du modèle RG, on peut consulter les références [69, 71-73] pour les résultats du choc normal et oblique.

Pour modéliser le modèle RG avec une grande précision et compte tenu de la modification apportée au modèle mathématique, la relation qui lie la déflexion du choc et la déflexion du dièdre qui concerne la capacité thermique à pression constante $CP(T, \rho)$ est devenue variable en fonction de la densité et la température.

4.2 Variation des paramètres pour un GR et GP à travers l'onde de choc

4.2.1 Variation du rapport de densité en fonction du nombre de Mach en amont

La figure 4.1 montre la variation du rapport de densité (ρ_2/ρ_1) à travers les ondes de choc obliques pour les modèles GP et les modèles GR en fonction du nombre de Mach amont, les pressions de stagnation $P_0 = 1$ bar, 100 bar et 500 bar, et les températures de stagnation $T_0 = 1000$ K, 2000 K et 3000 K. À partir de ce graphe

on peut voir que la variation du rapport de densité dépend clairement de P_0 , T_0 , M_1 , et β et que les valeurs de T_0 et P_0 influent sur le rapport de densité. Cependant, l'écart entre les modèles *GP* et *GR* croît avec M_1 et β .

Pour $M_1 < 2,00$ et $\beta = 30,0$ degrés, si T_0 augmente, le rapport de densité (ρ_2/ρ_1) diminue légèrement pour chaque valeur donnée de P_0 ; si P_0 augmente, le rapport de densité (ρ_2/ρ_1) augmente légèrement pour chaque valeur donnée de T_0 . En d'autres termes, les quatre courbes coïncident approximativement

À titre d'illustration, pour $M_1 = 1,6$, $\beta = 30^\circ$, dans le modèle *GP*, $\rho_2/\rho_1 = 0.6773061$, et $\rho_2/\rho_1 = 0.6773061$, 0.6732391 et 0.672164 pour $P_0 = 1$ bar, $\rho_2/\rho_1 = 0.6774424$, 0.6732555 et 0.6721688 pour $P_0 = 100$ bars, $\rho_2/\rho_1 = 0.6777858$, 0.6733078 , et 0.6721855 pour $P_0 = 500$ bars. Pour le modèle *GR*, avec les températures respectives 1000 K, 2000 K et 3000 K, on voit que pour $M_1 < 2.00$ et $\beta > 30.0$ degrés, que si T_0 augmente, le rapport de densité (ρ_2/ρ_1) augmente légèrement pour chaque valeur de P_0 , et β donnée. Si P_0 augmente, le rapport de densité (ρ_2/ρ_1) diminue légèrement pour chaque valeur de T_0 et β donnée. Si β augmente, le rapport de densité (ρ_2/ρ_1) augmente pour chaque valeur donnée de T_0 et P_0 . En conséquence, les quatre courbes commencèrent à s'éloigner l'un de l'autre et l'écart entre les deux modèles *GP* et *GR* devient plus important.

En considérant, $\beta = 50^\circ$ pour le modèle *GP*, le rapport de densité ρ_2/ρ_1 sera égal à 1.398862, et $\rho_2/\rho_1 = 1.398862$, 1.409386, et 1.412216 pour $P_0 = 1$ bar. Pour $P_0 = 100$ bars, $\rho_2/\rho_1 = 1.398515$, 1.409343 et 1.412203, respectivement, le rapport $\rho_2/\rho_1 = 1.39764$, 1.409206 et 1.412159 pour $P_0 = 500$ bars. Pour le modèle *GR*, avec des températures correspondantes de $T_0 = 1000$ K, 2000 K, 3000 K et $\beta = 70^\circ$, le rapport de densité ρ_2/ρ_1 sera égal à 1.90351, 1.936261 et 1.945175 pour $P_0 = 1$ bar, $\rho_2/\rho_1 = 1.902439$, 1.936126 et 1.945135 pour $P_0 = 100$ bar, $\rho_2/\rho_1 = 1.899746$, 1.935695, et 1.944996 pour $P_0 = 500$ bars.

Ainsi, nous concluons que le modèle *GP* peut être appliqué pour obtenir des résultats avec une bonne précision. En revanche, si $M_1 > 2,00$ et $\beta > 30,0$ degrés, le rapport de densité (ρ_2/ρ_1) augmente simultanément avec T_0 pour chaque valeur de P_0 et β . Si P_0 augmente, le rapport de densité (ρ_2/ρ_1) diminue pour chaque valeur de T_0 , et β . La même hypothèse peut être prise si β augmente, le rapport de densité (ρ_2/ρ_1) augmente pour chaque valeur de T_0 et P_0 . Les quatre courbes commencent

à se séparer, ce qui se traduit par l'augmentation de l'écart entre les modèles *GP* et *GR*.

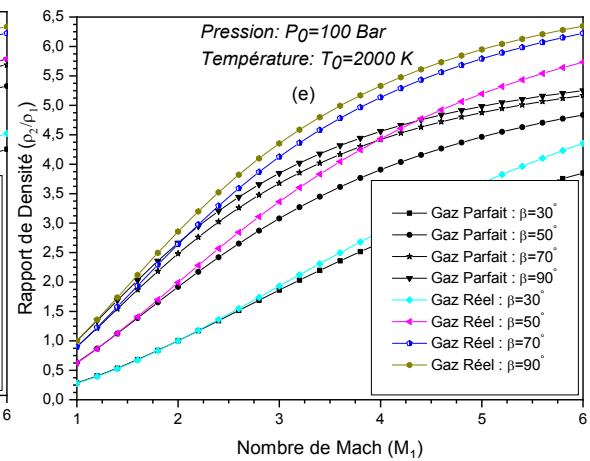
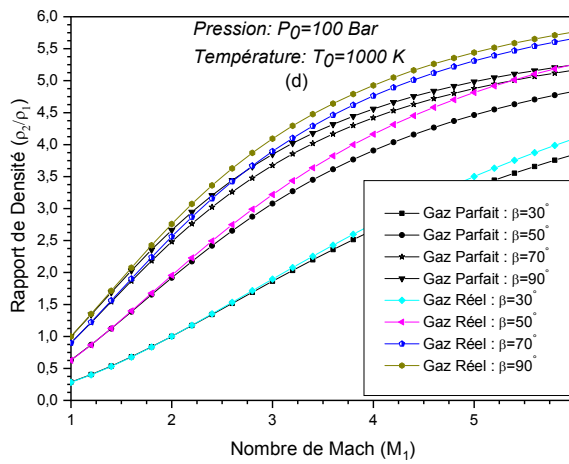
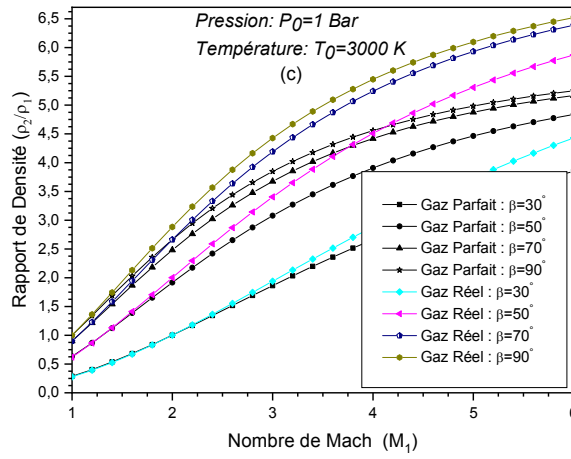
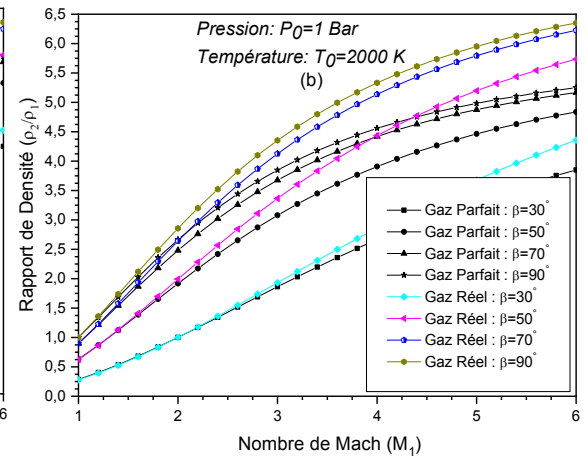
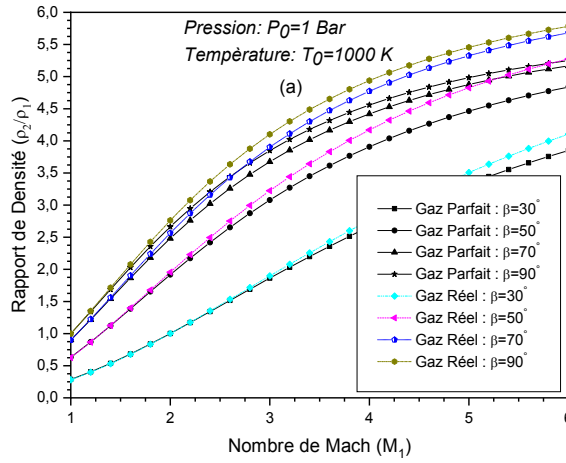
Pour justifier notre conclusion indiquée ci-dessus, nous pouvons considérer le cas où $M_1=3$, pour β variable :

-si $\beta=40^\circ$, le rapport de densité ρ_2/ρ_1 aura 2.557853 pour le modèle *GP*, $\rho_2/\rho_1= 2.647247$, 2.73148 et 2.754827 pour $P_0=1$ bar, $\rho_2/\rho_1= 2.644533$, 2.731127 et 2.754721 pour $P_0=100$ bars, $\rho_2/\rho_1= 2.637719$, 2.730003, et 2.754357, pour $P_0=500$ bars pour le modèle *GR*,

-si $\beta=60^\circ$, alors $\rho_2/\rho_1= 3.44132$, pour le modèle *GP*, $\rho_2/\rho_1= 3.633609$, 3.822047, et 3.875581, pour $P_0=1$ bar, $\rho_2/\rho_1= 3.627656$, 3.821243, et 3.875337, pour $P_0=100$ bar, $\rho_2/\rho_1= 3.612743$, 3.818682 et 3.874497 pour $P_0=500$ bar pour le modèle *GR*,

-si $\beta=80^\circ$, alors $\rho_2/\rho_1= 3.806448$, pour le modèle *GP*, $\rho_2/\rho_1= 4.05301$, 4.2987, et 4.369247, pour $P_0=1$ bar, $\rho_2/\rho_1= 4.045315$, 4.297643 et 4.368925 pour $P_0=100$ bar, $\rho_2/\rho_1= 4.026054$, 4.294276 et 4.367815, pour $P_0=500$ bar, pour le modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Nous déduisons alors que le nombre de Mach amont plus élevé signifie un écoulement plus supersonique, nécessitant une onde de choc plus intense pour ralentir le fluide à des vitesses subsoniques ou transsoniques après le choc. Avec une augmentation de l'angle de choc β , l'onde de choc s'approche d'une orientation plus perpendiculaire à la direction de l'écoulement, ce qui entraîne une décélération et une densification accrues du gaz, conduisant à une augmentation plus importante de la densité. Lorsque des modifications de ce modèle sont à nouveau nécessaires, le modèle *GP* commence automatiquement à décliner, ce qui démontre l'avantage d'utiliser le modèle *GR*.



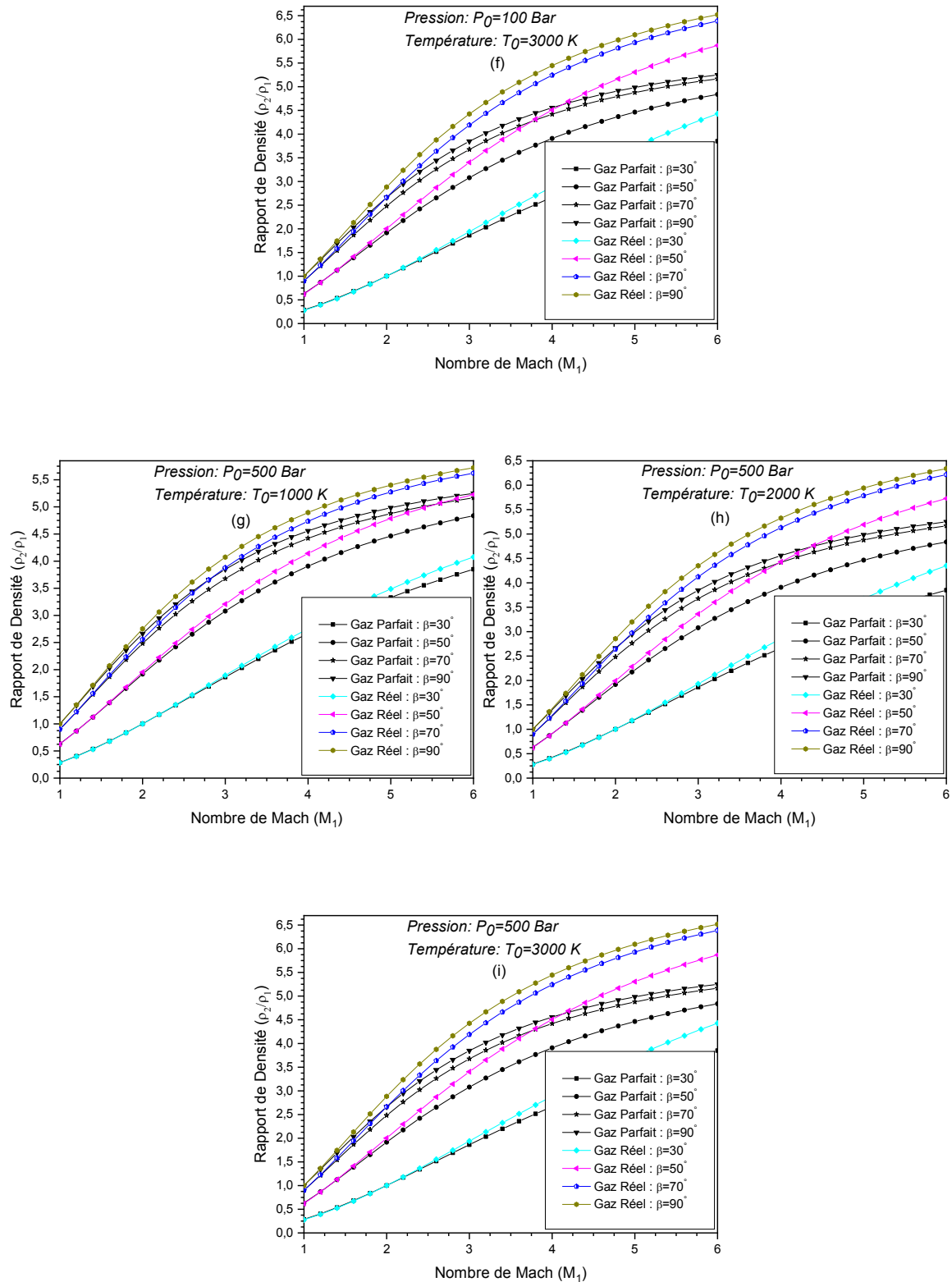


Figure 4.1 : Variation du rapport de densité ρ_2/ρ_1 à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

4.2.2 Variation du rapport de pression en fonction du nombre de Mach en amont

La figure 4.2 montre la variation du rapport de pression (P_2/P_1) à travers les ondes de choc obliques pour les modèles *GP* et *GR* en fonction du nombre de Mach amont, les pressions de stagnation $P_0 = 1$ bar, 100 bar et 500 bar, et les températures de stagnation $T_0 = 1000$ K, 2000 K et 3000 K. À partir de ce graphe on peut voir que la variation du rapport de pression dépend clairement de P_0 , T_0 , M_1 , et β et que les valeurs de T_0 et P_0 influent sur le rapport de pression. Cependant, l'écart entre les modèles *GP* et *GR* augmente si M_1 et β augmentent progressivement. Pour $M_1 < 2,00$ et $\beta = 30,0$ degrés, si T_0 augmente, le rapport de pression (P_2/P_1) augmente légèrement pour chaque valeur donnée de P_0 ; si P_0 augmente, le rapport de pression (P_2/P_1) diminue légèrement pour chaque valeur donnée de T_0 , en d'autres termes les quatre courbes coïncident approximativement (avec précision).

À titre d'illustration, si $M_1 = 1,4$, $\beta = 30^\circ$, $P_2/P_1 = 0,4055405$, pour le modèle *GP*, $P_2/P_1 = 0,4147315$, $0,4228413$, et $0,4250014$, pour $P_0 = 1$ bar, $P_2/P_1 = 0,4144616$, $0,4228084$, et $0,4249917$, pour $P_0 = 100$ bar, $P_2/P_1 = 0,4137815$, $0,4227035$, et $0,4249582$, pour $P_0 = 500$ bar, pour le modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0 = 1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

On voit aussi, pour $M_1 < 2,00$ et $\beta > 30,0$ degrés, que si T_0 augmente, le rapport de pression (P_2/P_1) diminue légèrement pour chaque valeur de P_0 , et β donnée, si P_0 augmente, le rapport de pression (P_2/P_1) augmente légèrement pour chaque valeur de T_0 , et β donnée, si β augmente, le rapport de pression (P_2/P_1) augmente pour chaque valeur de T_0 et P_0 donnée. En conséquence, les quatre courbes commencèrent à s'éloigner l'un de l'autre et l'écart entre les deux modèles *GP* et *GR* devient plus important.

En considérant, si $\beta = 50^\circ$, alors $P_2/P_1 = 1.177003$, pour le modèle *GP*, $P_2/P_1 = 1.174266$, $1,171852$, et 1.171208 , pour $P_0 = 1$ bar, $P_2/P_1 = 1.174347$, 1.171861 , et 1.171211 , pour $P_0 = 100$ bar, $P_2/P_1 = 1.174549$, 1.171893 , et 1.171221 , pour $P_0 = 500$ bar, si $\beta = 70^\circ$, alors $P_2/P_1 = 1.854564$, pour le modèle *GP*, $P_2/P_1 = 1.841352$, 1.829694 , et 1.826588 , pour $P_0 = 1$ bar, $P_2/P_1 = 1.84174$, 1.829741 , et 1.826602 , pour $P_0 = 100$ bar, $P_2/P_1 = 1.842717$, 1.829892 , et 1.82665 , pour $P_0 = 500$ bar, pour le

modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Ainsi, nous concluons que le modèle *GP* peut être appliqué pour obtenir des résultats avec une bonne précision. En revanche, si $M_1 > 2,00$ et $\beta > 30,0$ degrés, si T_0 augmente, le rapport de pression (P_2/P_1) diminue pour chaque valeur de P_0 et β donnée, si P_0 augmente, le rapport de pression (P_2/P_1) augmente pour chaque valeur de T_0 et β donnée, si β augmente, le rapport de pression (P_2/P_1) augmente pour chaque valeur de T_0 et P_0 donnée ; en d'autres termes, les quatre courbes commencent à se séparer, ce qui se traduit par l'augmentation de l'écart entre le modèle *GP* et le modèle *GR*.

Pour justifier notre conclusion indiquée ci-dessus, nous pouvons considérer le cas où $M_1=3.4$, pour β variable :

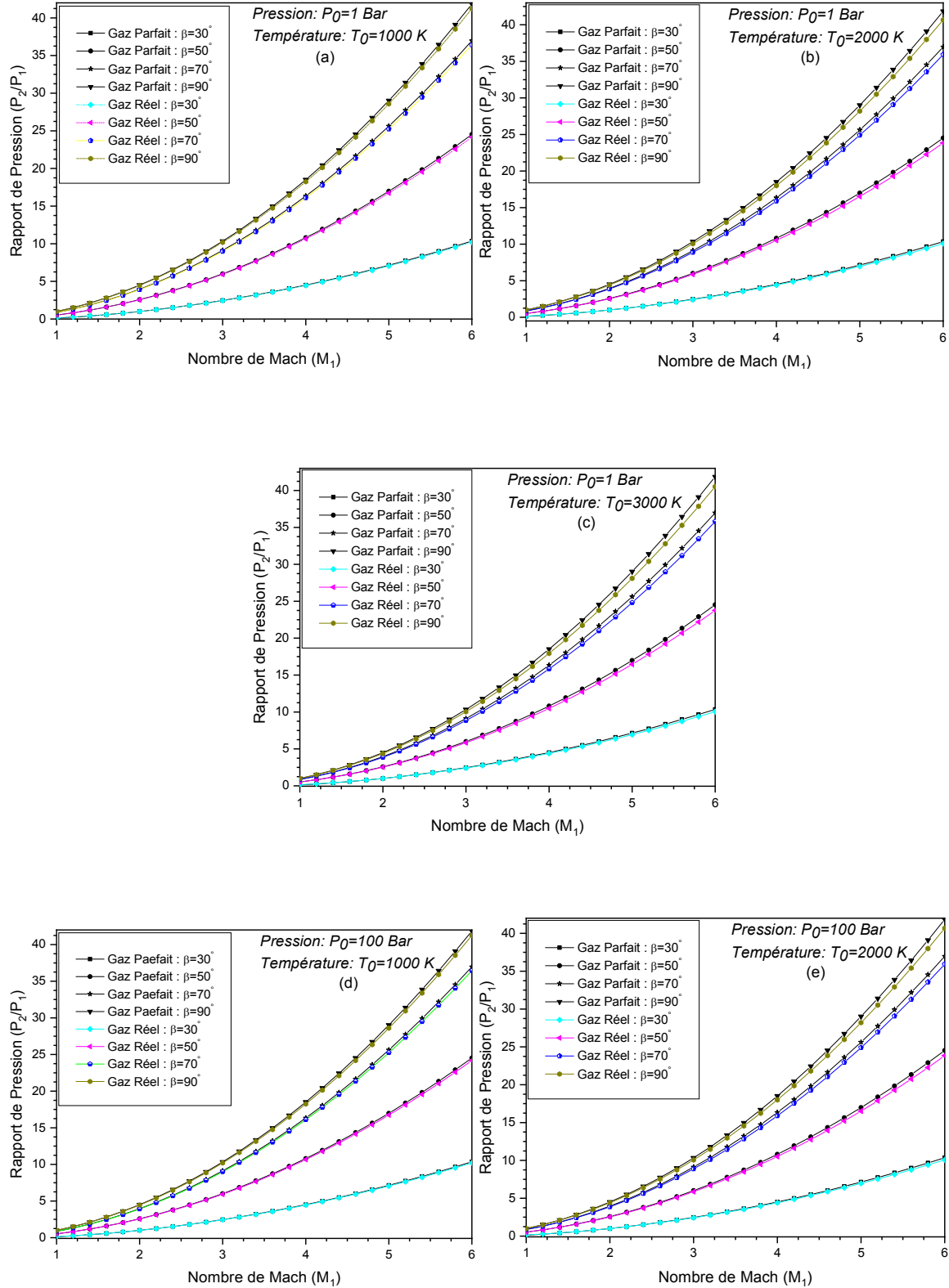
-si $\beta=40^\circ$, alors $P_2/P_1= 5,416316$, pour le modèle *GP*, $P_2/P_1= 5,348034$, 5,287785, et 5,271738, pour $P_0=1$ bar, $P_2/P_1= 5.350039$, 5.28803, et 5.27181, pour $P_0=100$ bar, $P_2/P_1= 5.355092$, 5.288809, et 5.272059, pour $P_0=500$ bar.

-si $\beta=60^\circ$, alors $P_2/P_1= 9.964196$, pour le modèle *GP*, $P_2/P_1= 9,825599$, 9,703307, et 9,670734, pour $P_0=1$ bar, $P_2/P_1= 9,829669$, 9,703803, et 9,67088, pour $P_0=100$ bar, $P_2/P_1= 9,839925$, 9,705385, et 3,139346, pour $P_0=500$ bar.

-si $\beta=80^\circ$, alors $P_2/P_1= 12.92595$, pour le modèle *GP*, $P_2/P_1= 12.74156$, 12.57886, et 12.53553, pour $P_0=1$ bar, $P_2/P_1= 12.74697$, 12.57952, et 12.53572, pour $P_0=100$ bar, $P_2/P_1= 12.76062$, 12.58163, et 12.53639, pour $P_0=500$ bar, pour le modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Nous déduisons alors que lorsqu'un écoulement supersonique rencontre une onde de choc, celle-ci ralentit brusquement le gaz, entraînant une compression rapide. Plus le nombre de Mach amont (M_1) est élevé, plus le choc est intense, ce qui se traduit par une augmentation plus importante de la pression statique derrière le choc et un rapport de pression (p_2/p_1) plus élevé. L'angle de choc β détermine dans quelle mesure le choc est normal (perpendiculaire à l'écoulement). À mesure que β augmente, le choc devient plus fort (se rapprochant d'un choc normal), ce qui augmente la diminution normale de la vitesse, la compression et, par conséquent,

le rapport de pression. Lorsque des modifications de ce modèle sont à nouveau nécessaires, le modèle GP commence automatiquement à décliner, ce qui démontre l'avantage d'utiliser le modèle GR.



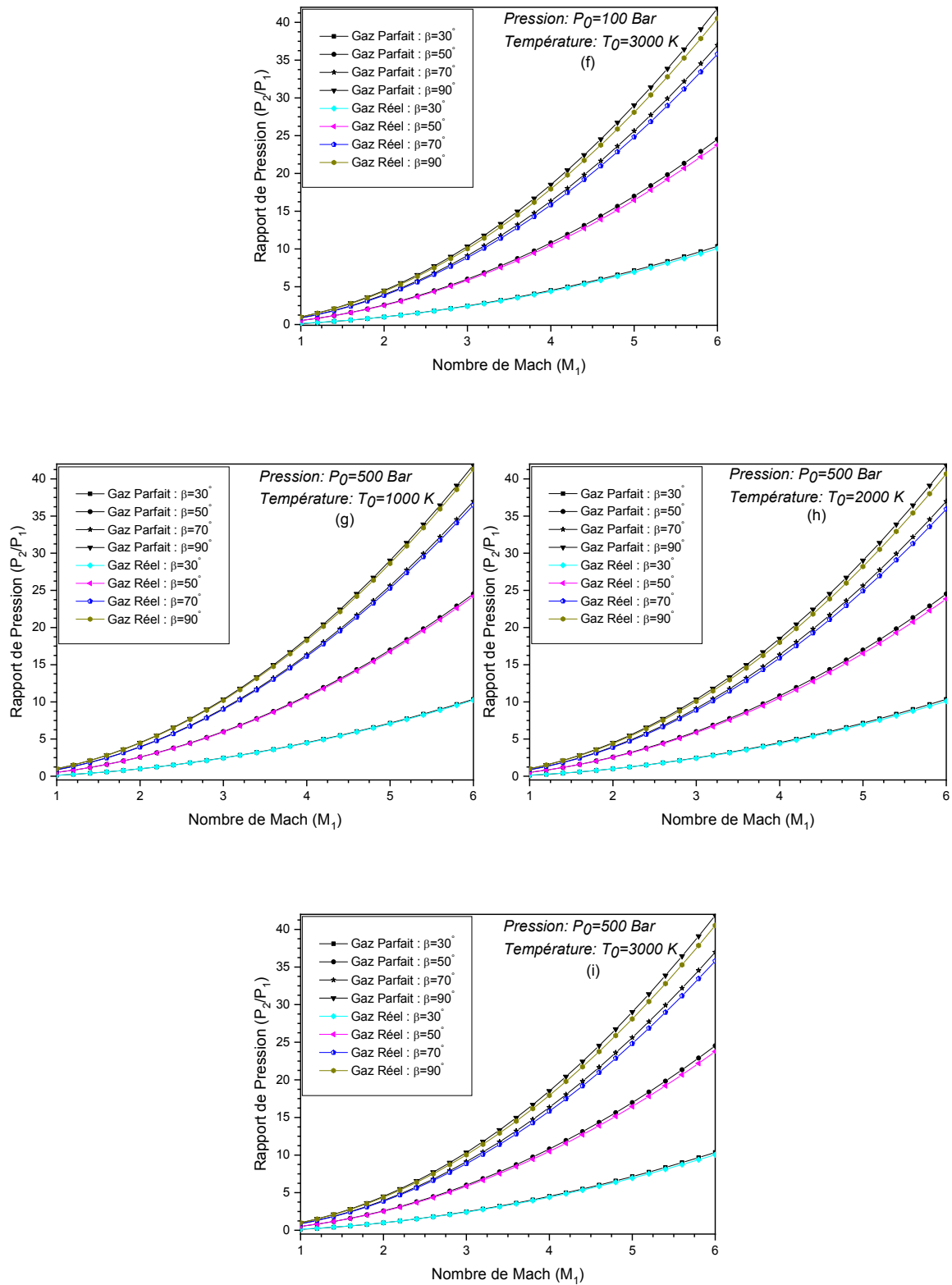


Figure 4.2 : Variation du rapport de pression P_2/P_1 à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

4.2.3 Variation du rapport de température en fonction du nombre de Mach en amont

La figure 4.3 montre la variation du rapport de température (T_2/T_1) à travers les ondes de choc obliques pour les modèles *GP* et *GR* en fonction du nombre de Mach amont, les pressions de stagnation $P_0 = 1$ bar, 100 bar et 500 bar, et les températures de stagnation $T_0 = 1000$ K, 2000 K et 3000 K. À partir de ce graphe on peut voir que la variation du rapport de température dépend clairement de P_0 , T_0 , M_1 , et β et que les valeurs de T_0 et P_0 influent sur le rapport de température. Cependant, l'écart entre les modèles *GP* et *GR* augmente si M_1 et β augmentent progressivement. Pour $M_1 < 2,00$ et $\beta = 30,0$ degrés, si P_0 augmente, le rapport de température (T_2/T_1) diminue légèrement pour chaque valeur donnée de T_0 ; si T_0 augmente, le rapport de température (T_2/T_1) diminue légèrement pour chaque valeur donnée de P_0 ; en d'autres termes, les quatre courbes coïncident approximativement (avec précision).

À titre d'illustration, si $M_1 = 1,8$, $\beta = 30^\circ$, $T_2/T_1 = 0,9307084$, pour le modèle *GP*, $T_2/T_1 = 0,9380628$, $0,9378464$, et $0,9373012$, pour $T_0 = 1000$ K, $T_2/T_1 = 0,9445757$, $0,9445492$, et $0,9444648$, pour $T_0 = 2000$ K, $T_2/T_1 = 0,9463142$, $0,9463064$, et $0,9462794$, pour $T_0 = 3000$ K, pour le modèle *GR*, avec respectivement les pressions correspondantes $P_0 = 1$ bar, 100 bar, et 500 bar. On constate également, pour $M_1 < 2,00$ et $\beta > 30,0$ degrés, que si T_0 augmente, le rapport de température (T_2/T_1) diminue légèrement pour chaque valeur de P_0 , et β donnée, si P_0 augmente, le rapport de température (T_2/T_1) augmente légèrement pour chaque valeur de T_0 , et β donnée, si β augmente, le rapport de température (T_2/T_1) augmente pour chaque valeur de T_0 et P_0 donnée, en conséquence, les quatre courbes commencent à s'éloigner l'une de l'autre et l'écart entre les deux modèles *GP* et *GR* devient plus important.

En considérant, si $\beta = 50^\circ$, alors $T_2/T_1 = 1,242709$, pour le modèle *GP*, $T_2/T_1 = 1,215378$, $1,216177$, et $1,21819$, pour $T_0 = 1000$ K, $T_2/T_1 = 1,191495$, $1,191591$, et $1,191899$, pour $T_0 = 2000$ K, $T_2/T_1 = 1,18517$, $1,185198$, et $1,185296$, pour $T_0 = 3000$ K, si $\beta = 70^\circ$, alors $T_2/T_1 = 1,242709$, pour le modèle *GP*, $T_2/T_1 = 1,402388$, $1,403913$, et $1,407758$, pour $T_0 = 1000$ K, $T_2/T_1 = 1,356894$, $1,357077$, et $1,357662$, pour $T_0 = 2000$ K, $T_2/T_1 = 1,34488$, $1,344934$, et $1,34512$, pour $T_0 = 3000$ K, pour le modèle

GR, avec respectivement les pressions correspondantes $P_0=1$ bar, 100 bar, et 500 bar.

Ainsi, nous concluons que le modèle *GP* peut être appliqué pour obtenir des résultats avec une bonne précision. En revanche, si $M_1 > 2,00$ et $\beta > 30,0$ degrés, si T_0 augmente, le rapport de température (T_2/T_1) diminue pour chaque valeur de P_0 et β donnée, si P_0 augmente, le rapport de température (T_2/T_1) augmente pour chaque valeur de T_0 et β donnée, si β augmente, le rapport de température (T_2/T_1) augmente pour chaque valeur de T_0 et P_0 donnée ; en d'autres termes, les quatre courbes commencent à se séparer, ce qui se traduit par l'augmentation de l'écart entre le modèle *GP* et le modèle *GR*.

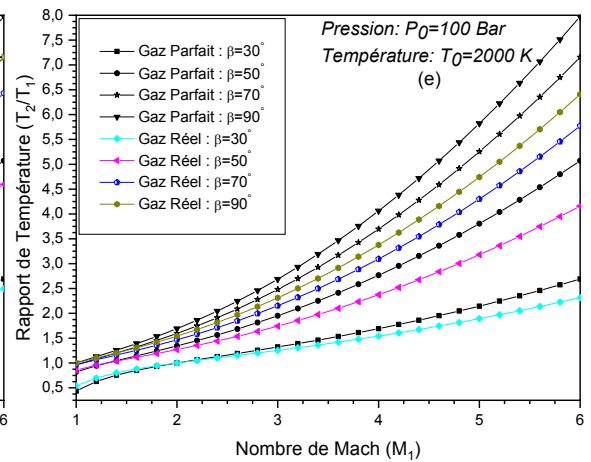
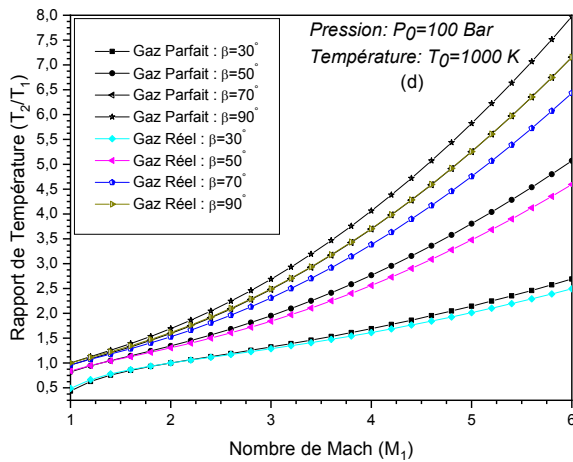
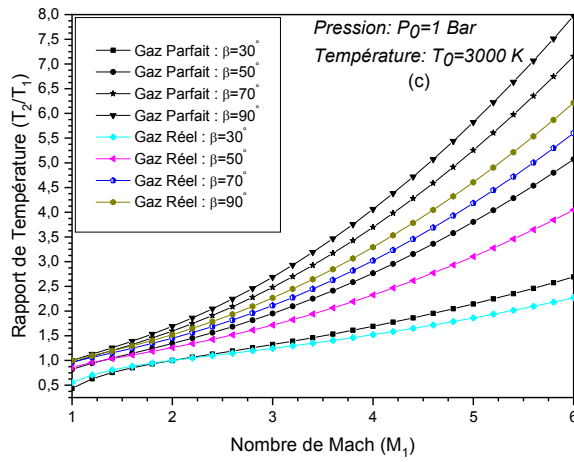
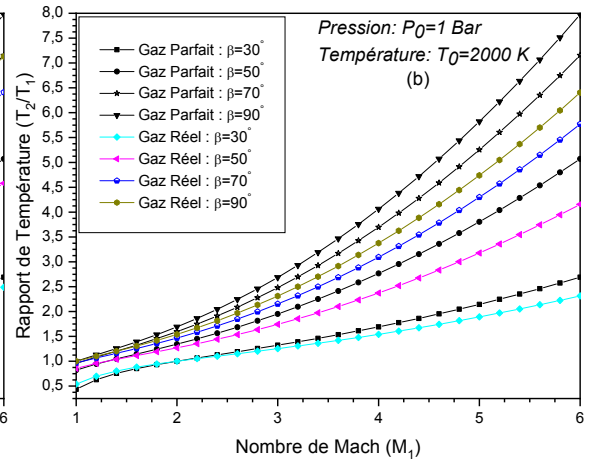
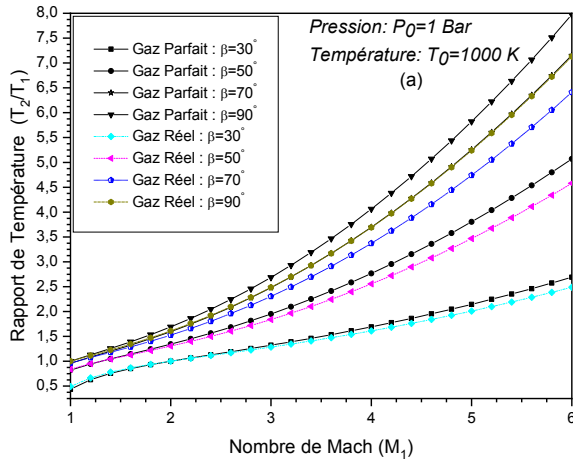
Pour justifier notre conclusion indiquée ci-dessus, nous pouvons considérer le cas où $M_1=4.0$, pour β variable :

-si $\beta=40^\circ$, alors $T_2/T_1= 2,216339$, pour le modèle *GP*, $T_2/T_1= 2,072306$, $2,076492$, et $2,08705$, pour $T_0=1000$ K, $T_2/T_1= 1,9478$, $1,9483$, et $1,949895$, pour $T_0=2000$ K, $T_2/T_1= 1.915045$, 1.915191 , et 1.915697 , pour $T_0=3000$ K.

-si $\beta=60^\circ$, alors $T_2/T_1= 3.279263$, pour le modèle *GP*, $T_2/T_1= 3.006251$, 3.014175 , et 3.034167 , pour $T_0=1000$ K, $T_2/T_1= 2.77082$, 2.771766 , et 2.774779 , pour $T_0=2000$ K, $T_2/T_1= 2.708976$, 2.709253 , et 2.710208 , pour $T_0=3000$ K.

-si $\beta=80^\circ$, alors $T_2/T_1= 3.96795$, pour le modèle *GP*, $T_2/T_1= 3.611255$, 3.621604 , et 3.647714 , pour $T_0=1000$ K, $T_2/T_1= 3.303875$, 3.305109 , et 3.309041 , pour $T_0=2000$ K, $T_2/T_1= 3.223165$, 3.223527 , et 3.224773 , pour $T_0=3000$ K, pour le modèle *GR*, avec respectivement les pressions correspondantes $P_0=1$ bar, 100 bar, et 500 bar.

Nous déduisons alors que lorsqu'un écoulement supersonique traverse une onde de choc, l'énergie cinétique est convertie en énergie interne (chaleur), ce qui entraîne une augmentation de la température du gaz en aval de l'onde de choc. Par conséquent, plus l'onde de choc est forte, plus cette conversion est importante, ce qui se traduit par une température plus élevée après l'onde de choc. Lorsque des modifications de ce modèle sont à nouveau nécessaires, le modèle *GP* commence automatiquement à décliner, ce qui démontre l'avantage d'utiliser le modèle *GR*.



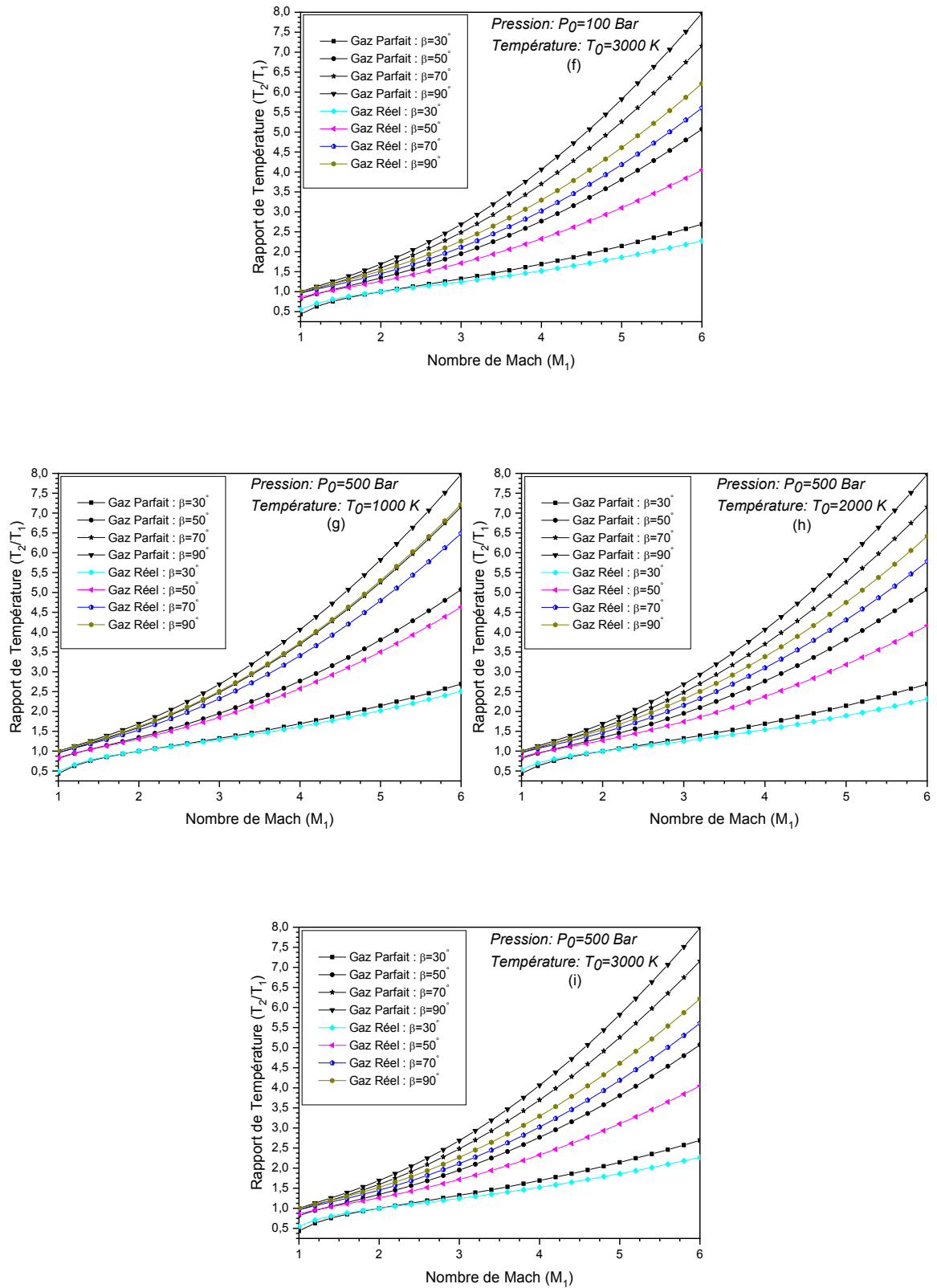


Figure 4.3 : Variation du rapport de température T_2/T_1 à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

4.2.4 Variation du rapport de Densité totale en fonction du nombre de Mach en amont

La figure 4.4 montre la variation du rapport de densité totale (ρ_{02}/ρ_{01}) à travers les ondes de choc obliques pour les modèles *GP* et *GR* en fonction du nombre de Mach amont, les pressions de stagnation $P_0 = 1$ bar, 100 bar et 500 bar, et les températures de stagnation $T_0 = 1000$ K, 2000 K et 3000 K. À partir de ce graphe on peut voir que la variation du rapport de densité totale dépend clairement de P_0 , T_0 , M_1 , et β et que les valeurs de T_0 et P_0 influent sur le rapport de densité totale. Cependant, l'écart entre les modèles *GP* et *GR* augmente si M_1 et β augmentent progressivement. Pour $M_1 < 2,00$ et $\beta \geq 30,0$ degrés, si P_0 et T_0 augmentent, le rapport de densité ρ_{02}/ρ_{01} est constant pour chaque valeur donnée de β ; en d'autres termes, les quatre courbes coïncident approximativement (avec précision).

En considérant, si $\beta = 30^\circ$, alors $\rho_{02}/\rho_{01} = 1.076131$, pour le modèle *GP*, $\rho_{02}/\rho_{01} = 1.054511$, 1.054750, et 1.054737, pour $P_0 = 1$ bar, $\rho_{02}/\rho_{01} = 1.054511$, 1.054750, et 1.054737, pour $P_0 = 100$ bar, $\rho_{02}/\rho_{01} = 1.054510$, 1.054750, et 1.054737, pour $P_0 = 500$ bar, si $\beta = 50^\circ$, alors $\rho_{02}/\rho_{01} = .9995596$, pour le modèle *GP*, $\rho_{02}/\rho_{01} = .9996839$, .9996750, et .9996731, pour $P_0 = 1$ bar, $\rho_{02}/\rho_{01} = .9996839$, .9996750, et .9996731, pour $P_0 = 100$ bar, $\rho_{02}/\rho_{01} = .9996839$, .9996750, et .9996731, pour $P_0 = 500$ bar, si $\beta = 70^\circ$, alors $\rho_{02}/\rho_{01} = .9765059$, pour le modèle *GP*, $\rho_{02}/\rho_{01} = .9825063$, .9818508, et .9816977, pour $P_0 = 1$ bar, $\rho_{02}/\rho_{01} = .9825065$, .9818509, et .9816977, pour $P_0 = 100$ bar, $\rho_{02}/\rho_{01} = .9825076$, .9818510, et .9816977, pour $P_0 = 500$ bar, pour le modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0 = 1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Ainsi, nous concluons que le modèle *GP* peut être appliqué pour obtenir des résultats avec une bonne précision. En revanche, si $M_1 > 2,00$ et $\beta > 30,0$ degrés, si T_0 augmente, le rapport de densité (ρ_{02}/ρ_{01}) diminue légèrement pour chaque valeur de P_0 et β donnée, si P_0 augmente, le rapport de densité ρ_{02}/ρ_{01} augmente légèrement pour chaque valeur de T_0 et β donnée, si β augmente, le rapport de densité ρ_{02}/ρ_{01} diminue pour chaque valeur de T_0 et P_0 donnée ; en d'autres termes, les quatre courbes commencent à se séparer, ce qui se traduit par l'augmentation de l'écart entre les modèles *GP* et *GR*.

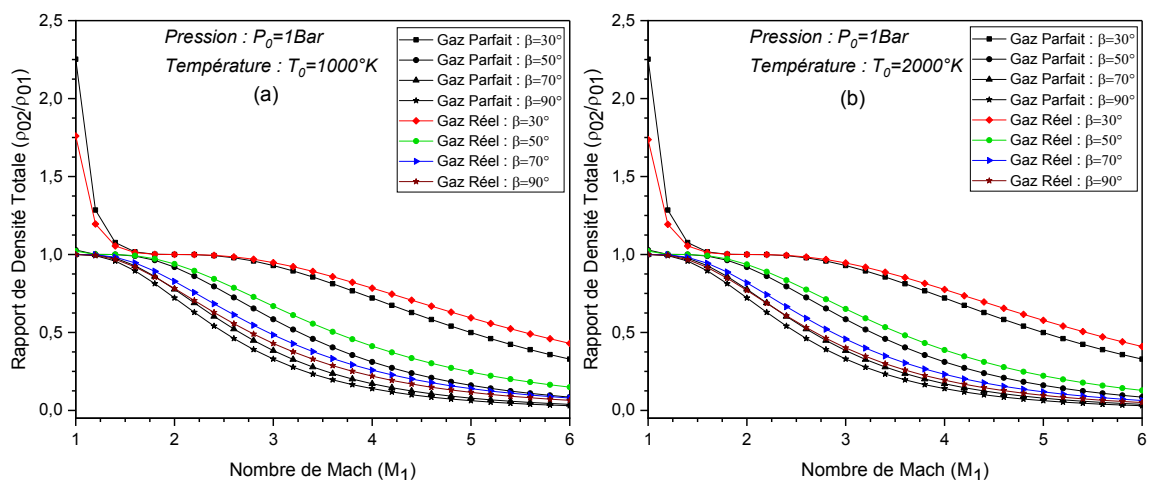
Pour justifier notre conclusion indiquée ci-dessus, nous pouvons considérer le cas où $M_1=4.6$, pour β variable :

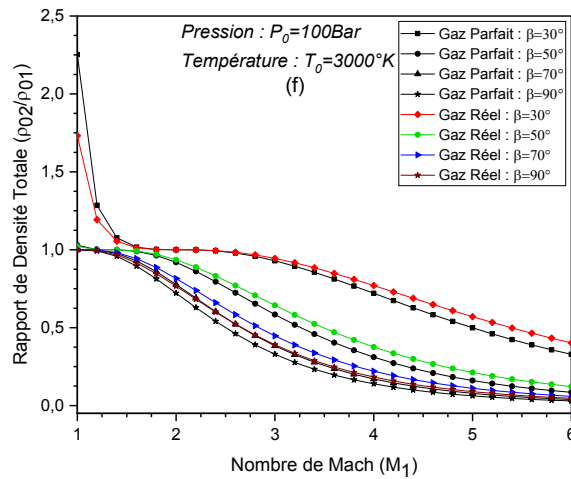
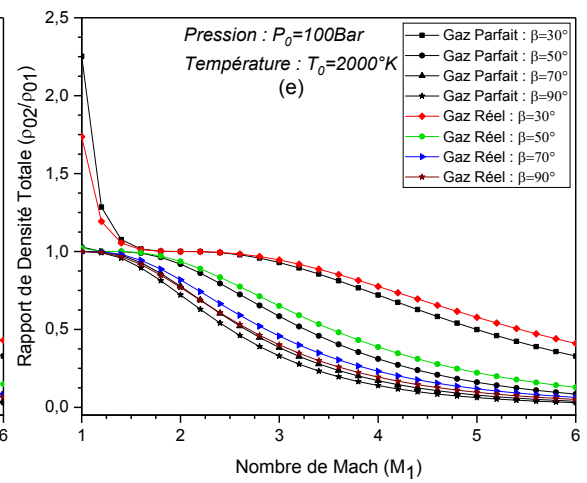
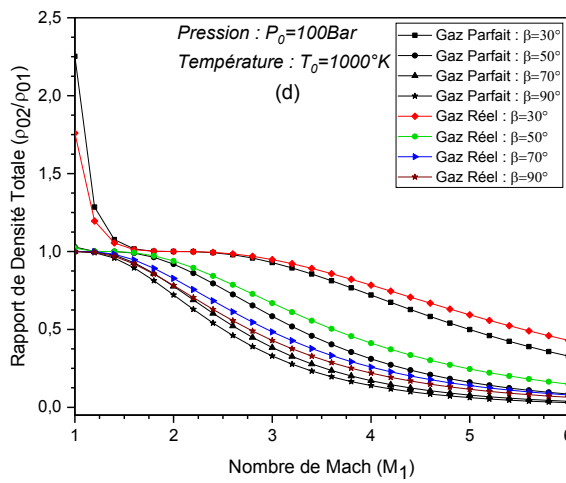
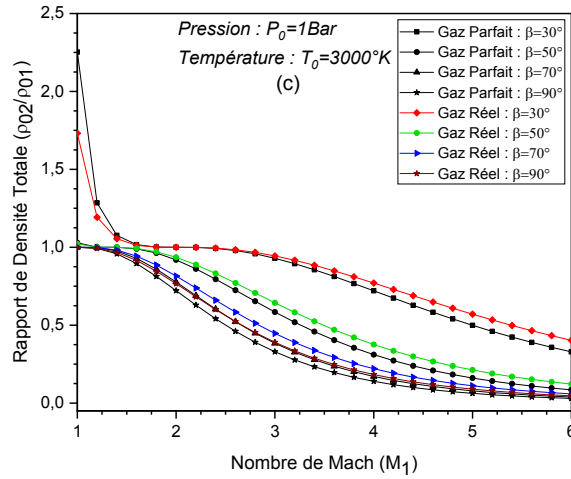
-si $\beta=40^\circ$, alors $\rho_{02}/\rho_{01}= .3409913$, pour le modèle *GP*, $\rho_{02}/\rho_{01}= .4426909$, $.4207248$, et $.4105728$, pour $P_0=1$ bar, $\rho_{02}/\rho_{01}= .4426995$, $.4207258$, et $.4105731$, pour $P_0=100$ bar, $\rho_{02}/\rho_{01}= .4427344$, $.4207298$, et $.4105742$, pour $P_0=500$ bar.

-si $\beta=60^\circ$, alors $\rho_{02}/\rho_{01}= .1412191$, pour le modèle *GP*, $\rho_{02}/\rho_{01}= .2220964$, $.1977496$, et $.1876766$, pour $P_0=1$ bar, $\rho_{02}/\rho_{01}= .2221060$, $.1977507$, et $.1876768$, pour $P_0=100$ bar, $\rho_{02}/\rho_{01}= .2221447$, $.1977550$, et $.1876781$, pour $P_0=500$ bar.

-si $\beta=80^\circ$, alors $\rho_{02}/\rho_{01}= .0900775$, pour le modèle *GP*, $\rho_{02}/\rho_{01}= .1554709$, $.1332249$, et $.1244355$, pour $P_0=1$ bar, $\rho_{02}/\rho_{01}= .1554798$, $.1332260$, et $.1244358$, pour $P_0=100$ bar, $\rho_{02}/\rho_{01}= .1555155$, $.1332298$, et $.1244369$, pour $P_0=500$ bar, pour le modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Nous déduisons alors qu'à des vitesses supérieures, l'impact devient plus intense, transformant davantage d'énergie cinétique en chaleur, augmentant ainsi la production d'entropie. Cette transformation accroît l'irréversibilité du processus, entraînant une diminution de la densité totale. De plus, une onde de choc plus prononcée induit une décélération plus marquée de la vitesse normale à l'impact, amplifiant ainsi l'irréversibilité et les pertes de densité totale. Lorsque des modifications de ce modèle sont à nouveau nécessaires, le modèle *GP* commence automatiquement à décliner, ce qui démontre l'avantage d'utiliser le modèle *GR*.





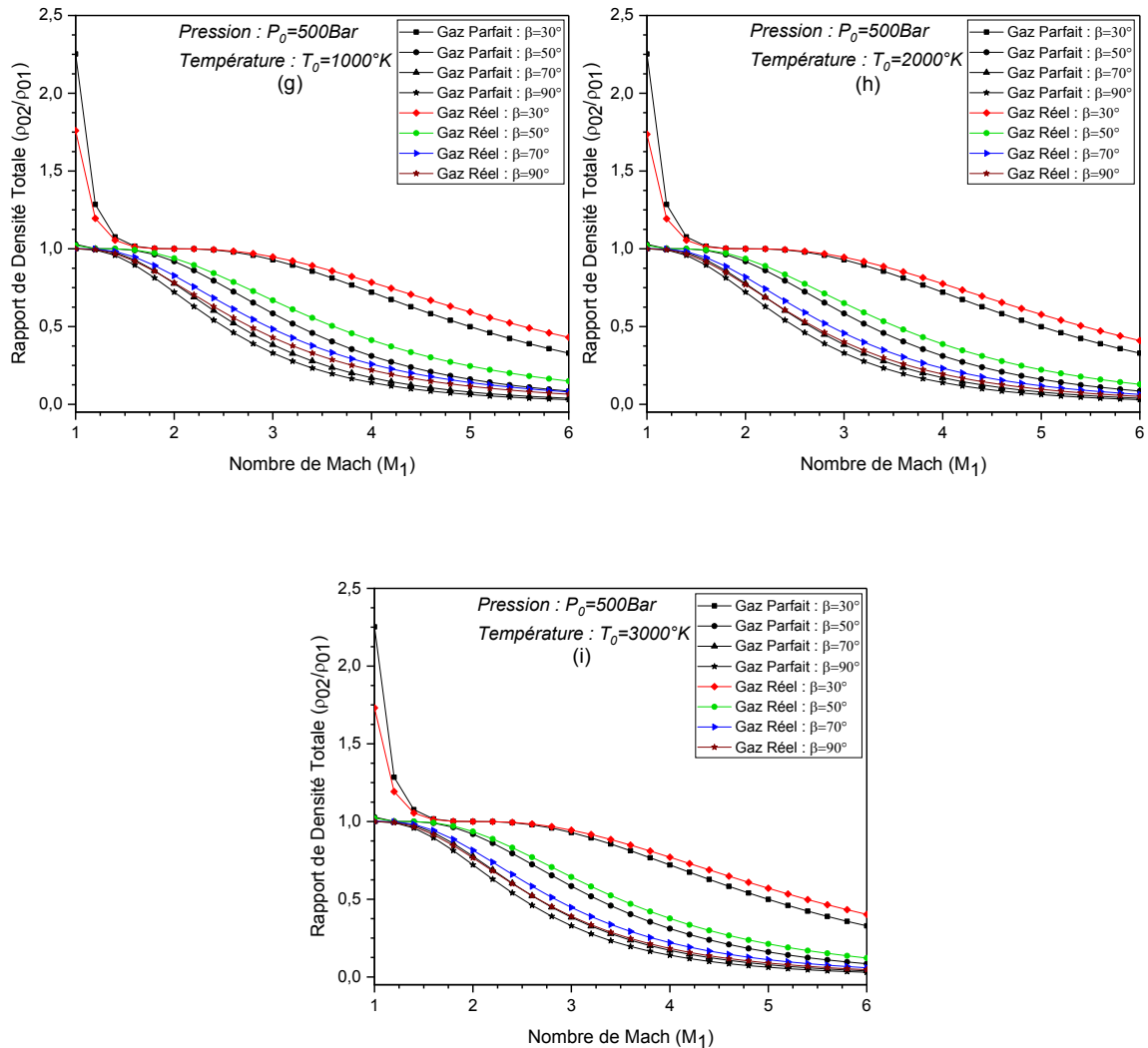


Figure 4.4 : Variation du rapport de Densité totale ρ_{02}/ρ_{01} à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

4.2.5 Variation du rapport de pression totale en fonction du nombre de Mach en amont

La figure 4.5 montre la variation du rapport de pression totale (P_{02}/P_{01}) à travers les ondes de choc obliques pour les modèles *GP* et *GR* en fonction du nombre de Mach amont, les pressions de stagnation $P_0 = 1$ bar, 100 bar et 500 bar, et les températures de stagnation $T_0 = 1000$ K, 2000 K et 3000 K. À partir de ce graphe on peut voir que la variation du rapport de pression totale dépend clairement de P_0 , T_0 , M_1 , et β et que les valeurs de T_0 et P_0 influent sur le rapport de pression totale. Cependant, l'écart entre les modèles *GP* et *GR* augmente si M_1 et β augmentent progressivement. Pour $M_1 < 2,00$ et $\beta \geq 30,0$ degrés, si P_0 et T_0 augmentent, le

rapport de pression P_{02}/P_{01} est constant pour chaque valeur donnée de β ; en d'autres termes, les quatre courbes coïncident approximativement (avec précision).

En considérant, si $\beta=30^\circ$, alors $P_{02}/P_{01}= 1,284768$, pour le modèle *GP*, $P_{02}/P_{01}= 1,274292$, $1,265514$, et $1,263243$, pour $P_0=1$ bar, $P_{02}/P_{01}= 1,274592$, $1,265548$, et $1,263254$, pour $P_0=100$ bar, $P_{02}/P_{01}= 1,275348$, $1,265659$, et $1,263289$, pour $P_0=500$ bar, si $\beta=50^\circ$, alors $P_{02}/P_{01}= 1,000791$, pour le modèle *GP*, $P_{02}/P_{01}= 1,000792$, $1,000792$, et $1,000792$, pour $P_0=1$ bar, $P_{02}/P_{01}= 1,000792$, $1,000792$, et $1,000792$, pour $P_0=100$ bar, $P_{02}/P_{01}= 1,000791$, $1,000792$, et $1,000792$, pour $P_0=500$ bar, si $\beta=70^\circ$, alors $P_{02}/P_{01}= 0,9978601$, pour le modèle *GP*, $P_{02}/P_{01}= 0,9978338$, $0,9978116$, et $0,9978058$, pour $P_0=1$ bar, $P_{02}/P_{01}= 0,9978346$, $0,9978117$, et $0,9978059$, pour $P_0=100$ bar, $P_{02}/P_{01}= 0,9978365$, $0,997812$, et $0,9978059$, pour $P_0=500$ bar, pour le modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Ainsi, nous concluons que le modèle *GP* peut être appliqué pour obtenir des résultats avec une bonne précision. En revanche, si $M_1 > 2,00$ et $\beta > 30,0$ degrés, si T_0 augmente, le rapport de pression (P_{02}/P_{01}) diminue légèrement pour chaque valeur de P_0 et β donnée, si P_0 augmente, le rapport de pression P_{02}/P_{01} augmente légèrement pour chaque valeur de T_0 et β donnée, si β augmente, le rapport de pression P_{02}/P_{01} diminue pour chaque valeur de T_0 et P_0 donnée ; en d'autres termes, les quatre courbes commencent à se séparer, ce qui se traduit par l'augmentation de l'écart entre les modèles *GP* et *GR*.

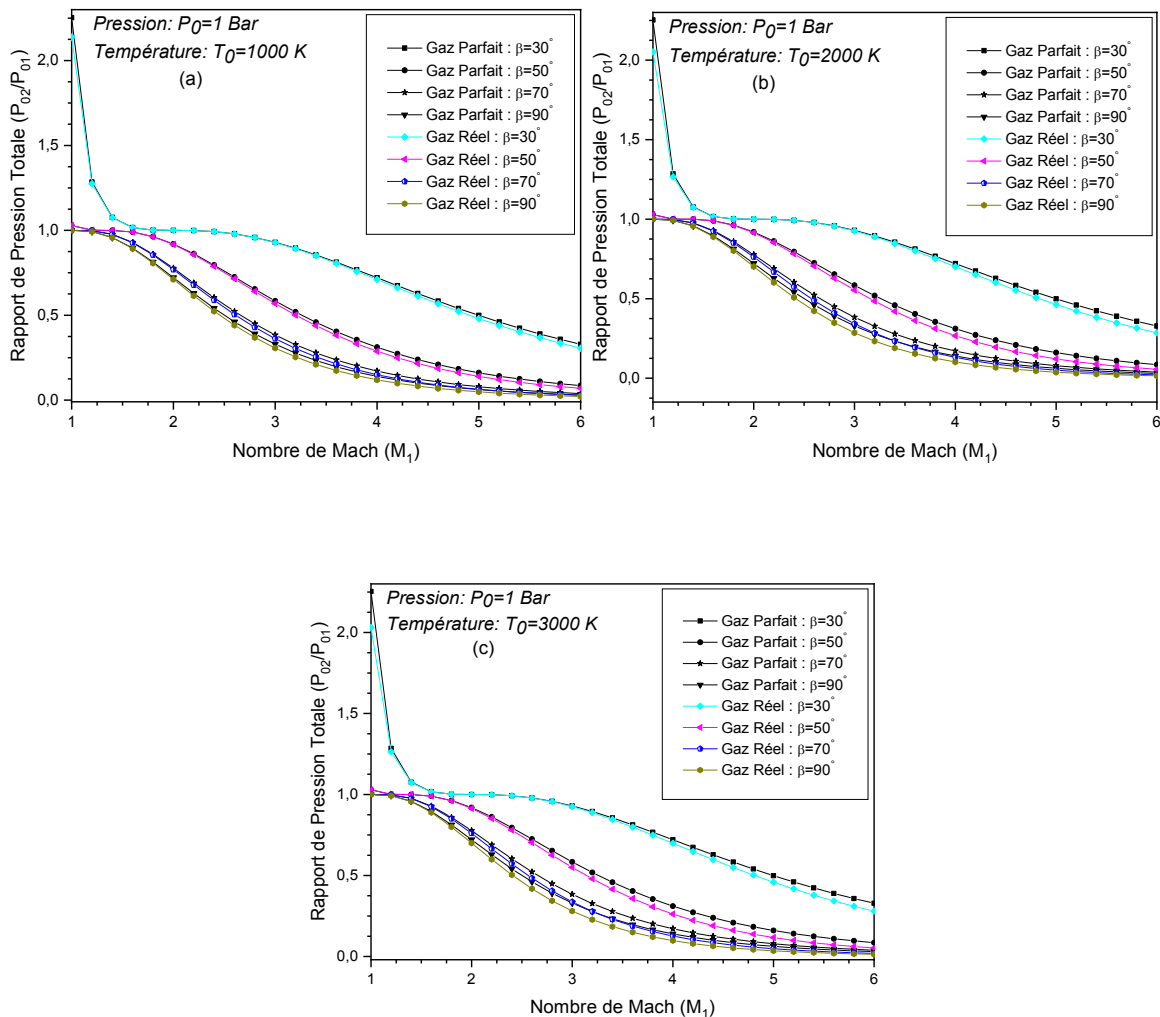
Pour justifier notre conclusion indiquée ci-dessus, nous pouvons considérer le cas où $M_1=4.6$, pour β variable :

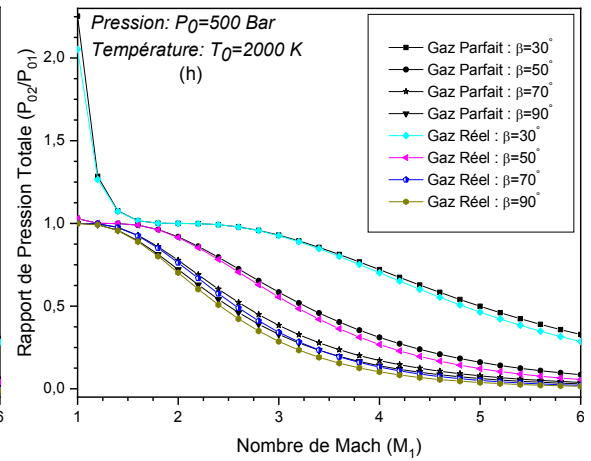
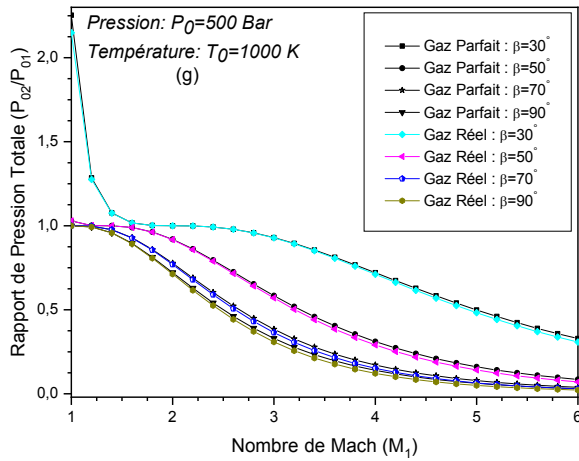
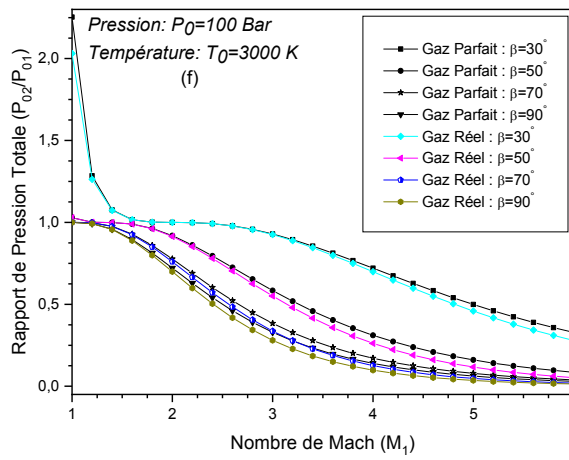
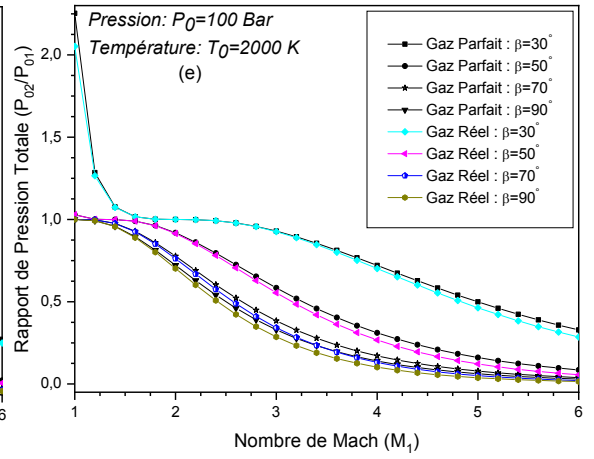
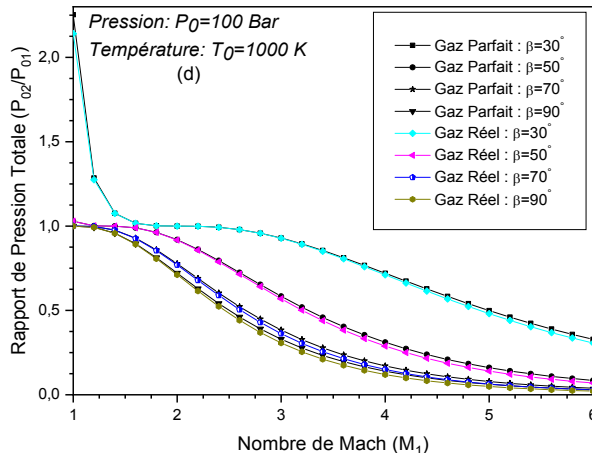
-si $\beta=40^\circ$, alors $P_{02}/P_{01}= 0,3409913$, pour le modèle *GP*, $P_{02}/P_{01}= 0,3183933$, $0,2980382$, et $0,2925519$, pour $P_0=1$ bar, $P_{02}/P_{01}= 0,3190641$, $0,2981216$, et $0,2925766$, pour $P_0=100$ bar, $P_{02}/P_{01}= 0,3207525$, $0,2983873$, et $0,2926618$, pour $P_0=500$ bar.

-si $\beta=60^\circ$, alors $P_{02}/P_{01}= 0,1412191$, pour le modèle *GP*, $P_{02}/P_{01}= 0,1210642$, $0,1039102$, et $0,0994582$, pour $P_0=1$ bar, $P_{02}/P_{01}= 0,1216461$, $0,1039784$, et $0,0994781$, pour $P_0=100$ bar, $P_{02}/P_{01}= 0,1231152$, $0,104196$, et $0,0995466$, pour $P_0=500$ bar.

-si $\beta=80^\circ$, alors $P_{02}/P_{01}= 0.0900775$, pour le modèle *GP*, $P_{02}/P_{01}= 0.0735104$, 0.0599496 , et 0.0565224 , pour $P_0=1$ bar, $P_{02}/P_{01}= 0.0739796$, 0.0600025 , et 0.0565376 , pour $P_0=100$ bar, $P_{02}/P_{01}= 0.0751667$, 0.0601710 , et 0.0565901 , pour $P_0=500$ bar, pour le modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Nous déduisons alors qu'à des vitesses supérieures, l'impact devient plus intense, transformant davantage d'énergie cinétique en chaleur, augmentant ainsi la production d'entropie. Cette transformation accroît l'irréversibilité du processus, entraînant une diminution de la pression totale. De plus, une onde de choc plus prononcée induit une décélération plus marquée de la vitesse normale à l'impact, amplifiant ainsi l'irréversibilité et les pertes de pression totale. Lorsque des modifications de ce modèle sont à nouveau nécessaires, le modèle *GP* commence automatiquement à décliner, ce qui démontre l'avantage d'utiliser le modèle *GR*.





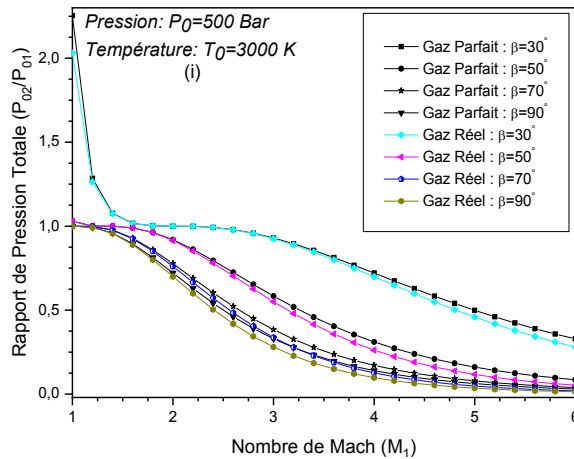


Figure 4.5 : Variation du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

4.2.6 Variation du rapport de Température totale en fonction du nombre de Mach en amont

La figure 4.6 montre la variation du rapport de température totale (T_{02}/T_{01}) à travers les ondes de choc obliques pour les modèles *GP* et *GR* en fonction du nombre de Mach amont, les pressions de stagnation $P_0 = 1 \text{ bar}$, 100 bar et 500 bar , et les températures de stagnation $T_0 = 1000 \text{ K}$, 2000 K et 3000 K . À partir de ce graphe on peut voir que la variation du rapport de température totale dépend clairement de P_0 , T_0 , M_1 , et β et que les valeurs de T_0 et P_0 influent sur le rapport de température totale. Cependant, l'écart entre les modèles *GP* et *GR* augmente si M_1 et β augmentent progressivement. Pour $M_1 < 2,00$ et $\beta \geq 30,0$ degrés, si P_0 et T_0 augmentent, le rapport de température T_{02}/T_{01} est constant pour chaque valeur donnée de β ; en d'autres termes, les quatre courbes coïncident approximativement (avec précision).

En considérant, si $\beta=30^\circ$, alors $T_{02}/T_{01} = 1.000000$, pour le modèle *GP*, $T_{02}/T_{01} = 1.008116$, 1.016265 , et 1.019308 , pour $P_0=1 \text{ bar}$, $T_{02}/T_{01} = 1.008114$, 1.016264 , et 1.019308 , pour $P_0=100 \text{ bar}$, $T_{02}/T_{01} = 1.008104$, 1.016262 , et 1.019307 , pour $P_0=500 \text{ bar}$, si $\beta=50^\circ$, alors $T_{02}/T_{01} = 1.000000$, pour le modèle *GP*, $T_{02}/T_{01} = .9984362$, $.9968872$, et $.9963116$, pour $P_0=1 \text{ bar}$, $T_{02}/T_{01} = .9984367$, $.9968873$, et $.9963115$, pour $P_0=100 \text{ bar}$, $T_{02}/T_{01} = .9984383$, $.9968877$, et $.9963117$, pour $P_0=500 \text{ bar}$, si $\beta=70^\circ$, alors $T_{02}/T_{01} = 1.000000$, pour le modèle *GP*, $T_{02}/T_{01} = .9933884$, $.9868790$, et $.9844649$, pour $P_0=1 \text{ bar}$, $T_{02}/T_{01} = .9933902$, $.9868796$, et $.9844651$, pour $P_0=100 \text{ bar}$, $T_{02}/T_{01} = .9933975$, $.9868813$, et $.9844656$, pour $P_0=500 \text{ bar}$, pour le modèle

GR, avec respectivement les températures correspondantes $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Ainsi, nous concluons que le modèle *GP* peut être appliqué pour obtenir des résultats avec une bonne précision. En revanche, si $M_1 > 2,00$ et $\beta > 30$. 0 degrés, si T_0 augmente, le rapport de température (T_{02}/T_{01}) diminue légèrement pour chaque valeur de P_0 et β donnée, si P_0 augmente, le rapport de température T_{02}/T_{01} augmente légèrement pour chaque valeur de T_0 et β donnée, si β augmente, le rapport de température T_{02}/T_{01} diminue pour chaque valeur de T_0 et P_0 donnée ; en d'autres termes, les quatre courbes commencent à se séparer, ce qui se traduit par l'augmentation de l'écart entre les modèles *GP* et *GR*.

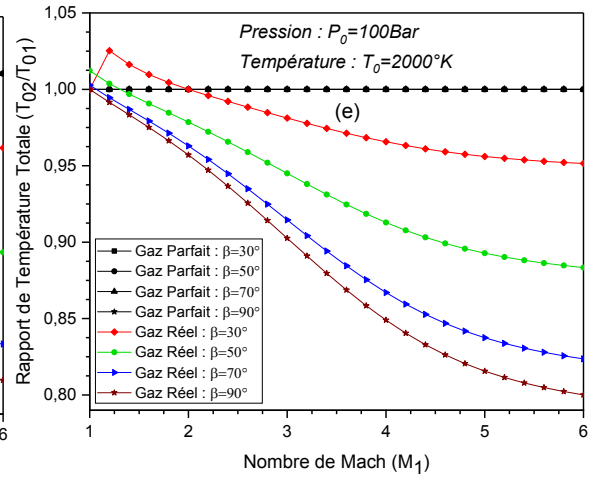
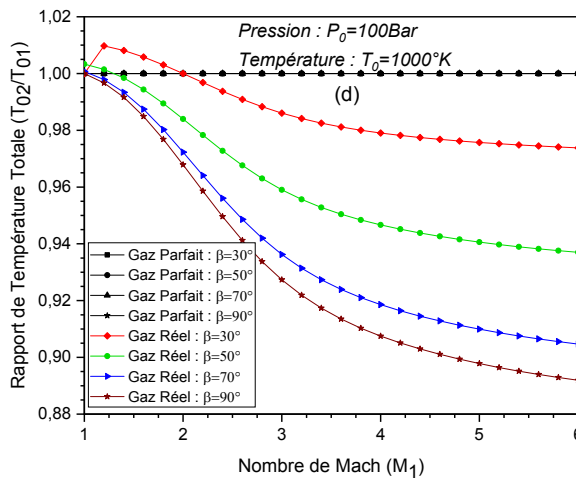
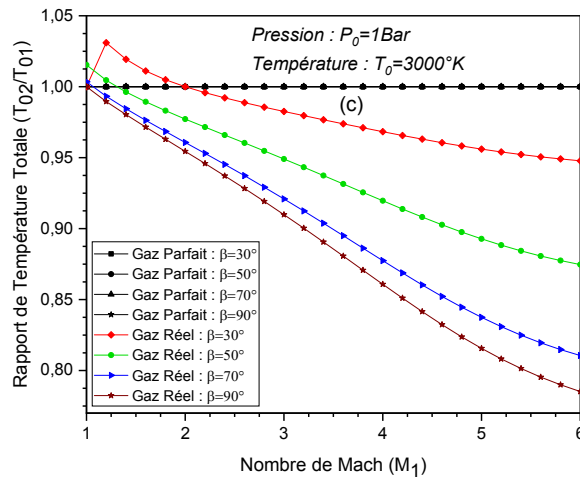
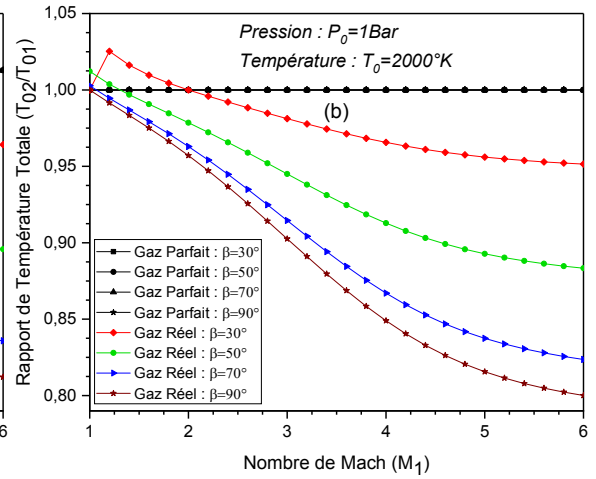
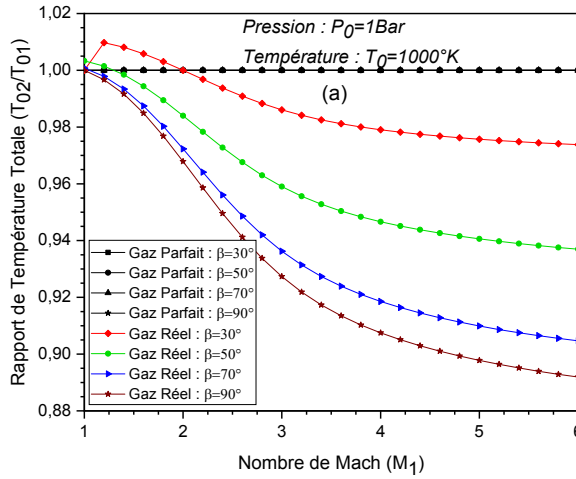
Pour justifier notre conclusion indiquée ci-dessus, nous pouvons considérer le cas où $M_1=4.6$, pour β variable :

-si $\beta=40^\circ$, alors $T_{02}/T_{01}= 1.000000$, pour le modèle *GP*, $T_{02}/T_{01}= .9601704$, $.9299665$, et $.9324110$, pour $P_0=1$ bar, $T_{02}/T_{01}= .9601794$, $.9299677$, et $.9324113$, pour $P_0=100$ bar, $T_{02}/T_{01}= .9602155$, $.9299724$, et $.9324129$, pour $P_0=500$ bar.

-si $\beta=60^\circ$, alors $T_{02}/T_{01}= 1.000000$, pour le modèle *GP*, $T_{02}/T_{01}= .9261879$, $.8703569$, et $.8749196$, pour $P_0=1$ bar, $T_{02}/T_{01}= .9262044$, $.8703592$, et $.8749202$, pour $P_0=100$ bar, $T_{02}/T_{01}= .9262714$, $.8703679$, et $.8749231$, pour $P_0=500$ bar.

-si $\beta=80^\circ$, alors $T_{02}/T_{01}= 1.000000$, pour le modèle *GP*, $T_{02}/T_{01}= .9040732$, $.8315689$, et $.8375109$, pour $P_0=1$ bar, $T_{02}/T_{01}= .9040947$, $.8315719$, et $.8375116$, pour $P_0=100$ bar, $T_{02}/T_{01}= .9041816$, $.8315833$, et $.8375154$, pour $P_0=500$ bar, pour le modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Nous déduisons alors que, lorsqu'une collision, une partie de l'énergie cinétique est convertie en chaleur de manière irréversible. Une partie importante de cette énergie est dissipée (génération d'entropie), ce qui entraîne une diminution de la température globale. Par conséquent, plus l'impact est fort, plus la dissipation est importante, ce qui entraîne une diminution de la température totale. Lorsque des modifications de ce modèle sont à nouveau nécessaires, le modèle *GP* commence automatiquement à décliner, ce qui démontre l'avantage d'utiliser le modèle *GR*.



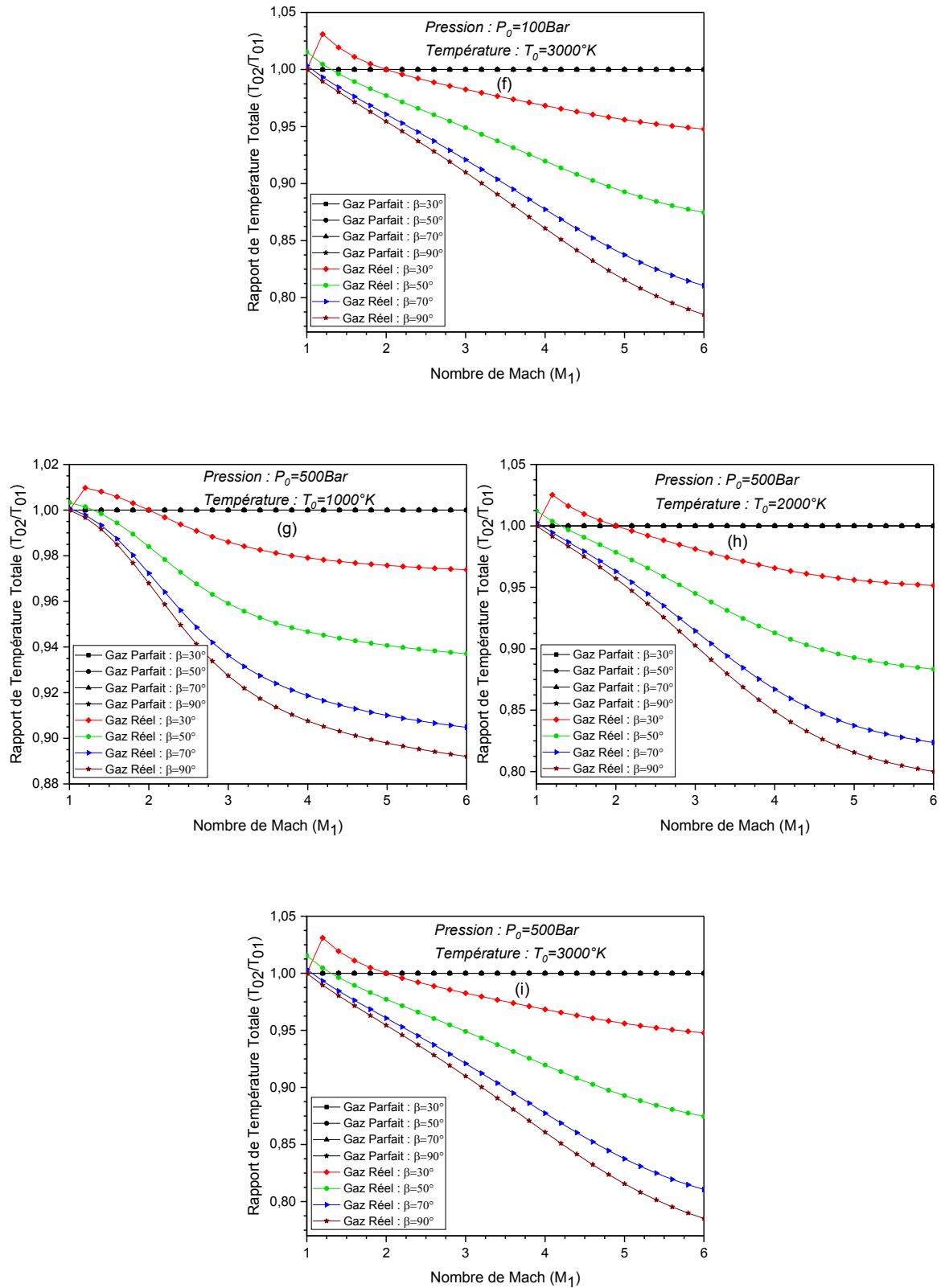


Figure 4.6 : Variation du rapport de température totale T_{02}/T_{01} à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

4.2.7 Variation du nombre de Mach aval en fonction du nombre de Mach en amont

La figure 4.7 montre la variation du nombre de Mach en aval (M_2) à travers les ondes de choc obliques pour les modèles *GP* et *GR* en fonction du nombre de Mach amont, les pressions de stagnation $P_0 = 1$ bar, 100 bar et 500 bar, et les températures de stagnation $T_0 = 1000$ K, 2000 K et 3000 K. À partir de ce graphe on peut voir que la variation du nombre de Mach aval dépend clairement de P_0 , T_0 , M_1 , et β et que les valeurs de T_0 et P_0 influent sur le Nombre de Mach en aval. Cependant, l'écart entre les modèles *GP* et *GR* augmente si M_1 et β augmentent progressivement. Pour $M_1 < 2,00$ et $\beta \geq 30,0$ degrés, si P_0 et T_0 augmentent, le nombre de Mach en aval est constant pour chaque valeur donnée de β ; en d'autres termes, les quatre courbes coïncident approximativement (avec précision).

En considérant, si $\beta = 30^\circ$, alors $M_2 = 2,049229$, pour le modèle *GP*, $M_2 = 2,027198$, 2,027833, et 2,029436, pour $T_0 = 1000$ K, $M_2 = 2,008441$, 2,008516, et 2,008754, pour $T_0 = 2000$ K, $M_2 = 2,003548$, 2,00357, et 2,003646, pour $T_0 = 3000$ K, si $\beta = 50^\circ$, alors $M_2 = 1,281618$, pour le modèle *GP*, $M_2 = 1,283009$, 1,282968, et 1,282865, pour $T_0 = 1000$ K, $M_2 = 1,284244$, 1,284239, et 1,284223, pour $T_0 = 2000$ K, $M_2 = 1,284574$, 1,284573, et 1,284567, pour $T_0 = 3000$ K, si $\beta = 70^\circ$, alors $M_2 = 0,8915878$, pour le modèle *GP*, $M_2 = 0,8920384$, 0,8920246, et 0,8919901, pour $T_0 = 1000$ K, $M_2 = 0,8924668$, 0,892465, et 0,8924593, pour $T_0 = 2000$ K, $M_2 = 0,892586$, 0,8925855, et 0,8925836, pour $T_0 = 3000$ K, pour le modèle *GR*, avec respectivement les pressions correspondantes $P_0 = 1$ bar, 100 bar, et 500 bar.

Ainsi, nous concluons que le modèle *GP* peut être appliqué pour obtenir des résultats avec une bonne précision. En revanche, si $M_1 > 2,00$ et $\beta > 30,0$ degrés, si P_0 augmente, le nombre de Mach en aval diminue légèrement pour chaque valeur de T_0 et β donnée, si T_0 augmente, le nombre de Mach en aval augmente pour chaque valeur de P_0 et β donnée, si β augmente, le nombre de Mach en aval diminue pour chaque valeur de T_0 et P_0 donnée ; en d'autres termes, les quatre courbes commencent à se séparer, ce qui se traduit par l'augmentation de l'écart entre le modèle *GP* et le modèle *GR*.

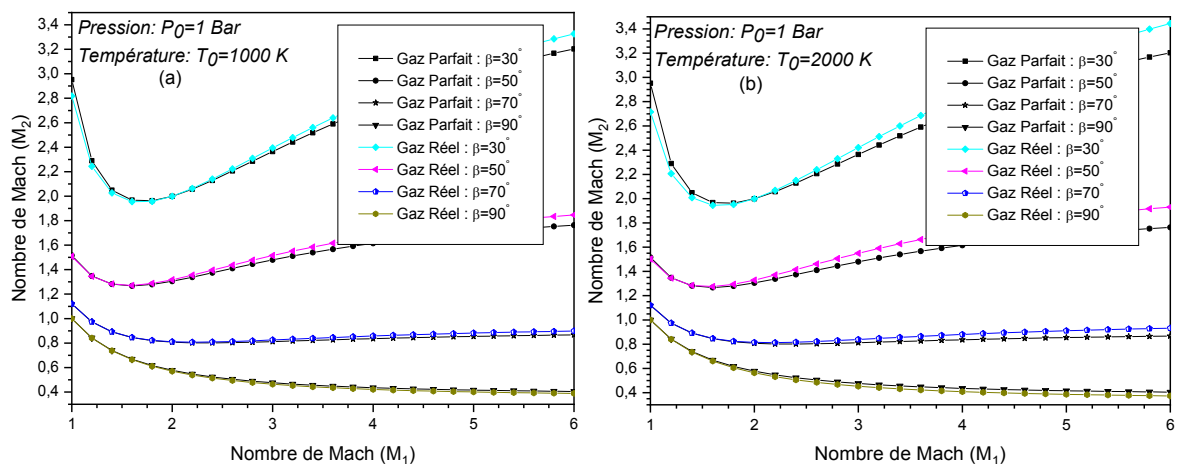
Pour justifier notre conclusion indiquée ci-dessus, nous pouvons considérer le cas où $M_1 = 5,0$, pour β variable :

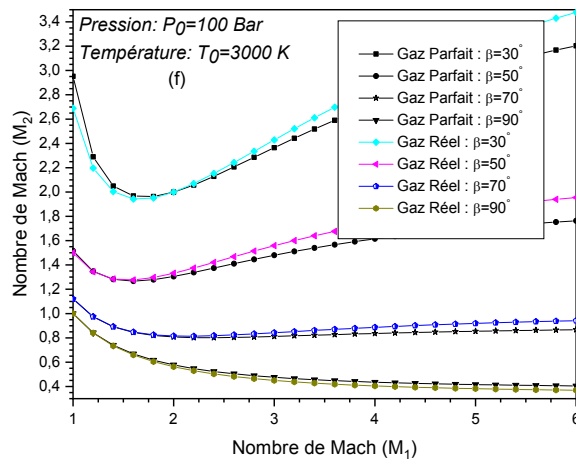
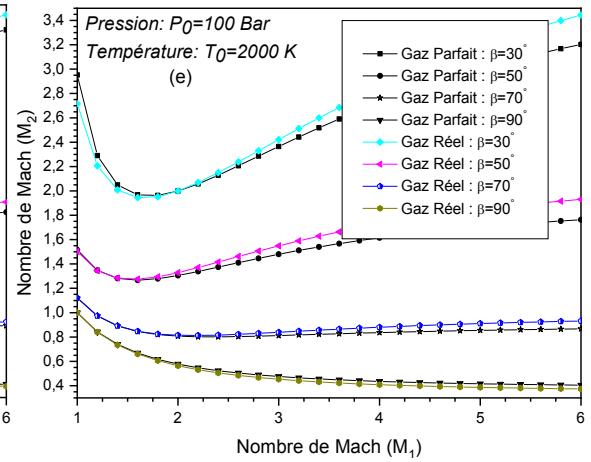
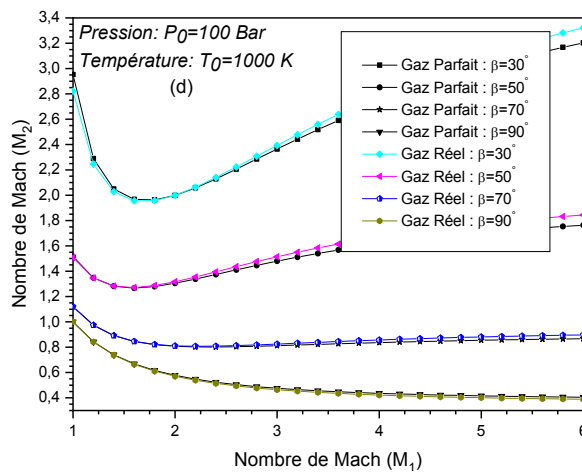
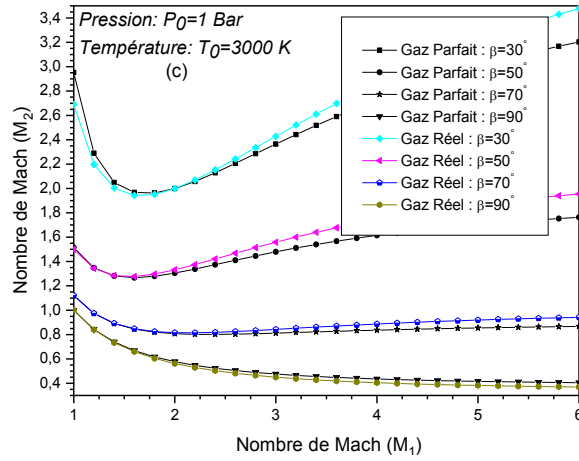
-si $\beta=40^\circ$, alors $M_2= 2,276162$, pour le modèle *GP*, $T_2/T_1= 2,365511$, $2,362749$, et $2,355828$, pour $T_0=1000$ K, $M_2= 2,452834$, $2,452461$, et $2,451276$, pour $T_0=2000$ K, $M_2= 2.477609$, 2.477496 , et 2.477108 , pour $T_0=3000$ K.

-si $\beta=60^\circ$, alors $M_2= 1.239422$, pour le modèle *GP*, $M_2= 1.290267$, 1.288665 , et 1.284658 , pour $T_0=1000$ K, $M_2= 1.341953$, 1.341728 , et 1.341013 , pour $T_0=2000$ K, $M_2= 1.356977$, 1.356909 , et 1.356672 , pour $T_0=3000$ K.

-si $\beta=80^\circ$, alors $M_2= 0.5520659$, pour le modèle *GP*, $M_2= 0.5538333$, 0.5537507 , et 0.5535515 , pour $T_0=1000$ K, $M_2= 0.5573646$, 0.5573457 , et 0.557286 , pour $T_0=2000$ K, $M_2= 0.5586906$, 0.5586843 , et 0.5586624 , pour $T_0=3000$ K, pour le modèle *GR*, avec respectivement les pressions correspondantes $P_0=1$ bar, 100 bar, et 500 bar.

Nous déduisons alors que quand l'angle de choc β augmente (vers un choc plus normal), la composante normale de Mach amont augmente, donc le choc "ressenti" devient plus fort (M_1 reste le même), ce qui réduit davantage la vitesse en aval. Cela signifie que M_2 est plus faible. Lorsque des modifications de ce modèle sont à nouveau nécessaires, le modèle *GP* commence automatiquement à décliner, ce qui démontre l'avantage d'utiliser le modèle *GR*.





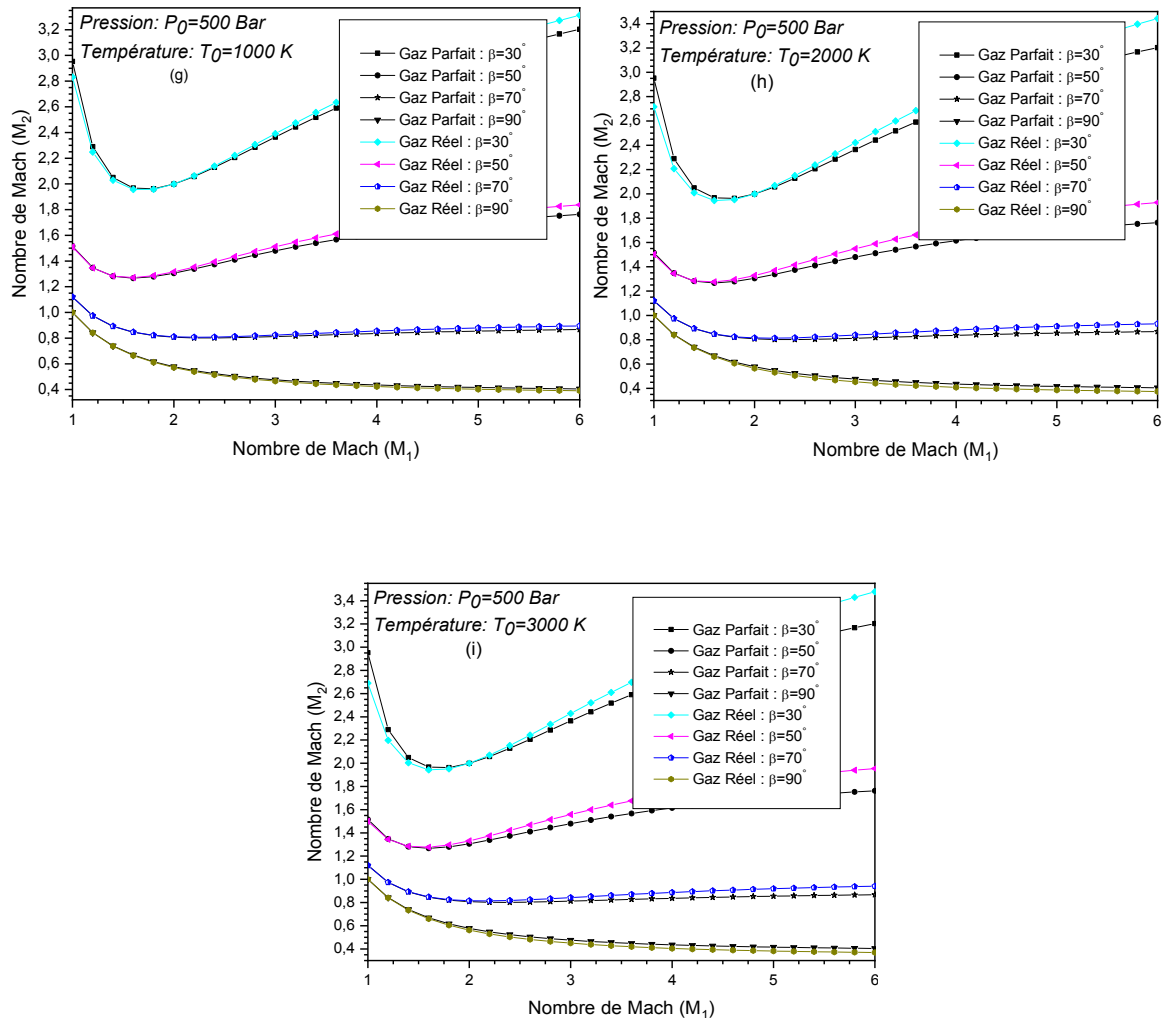


Figure 4.7 : Variation du nombre de Mach aval M_2 à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

4.2.8 Variation de l'entropie en fonction du nombre de Mach en amont

La figure 4.8 montre la variation de l'entropie ($\Delta S_{2-1}/R$) à travers les ondes de choc obliques pour les modèles *GP* et *GR* en fonction du nombre de Mach amont, les pressions de stagnation $P_0 = 1$ bar, 100 bar et 500 bar, et les températures de stagnation $T_0 = 1000$ K, 2000 K et 3000 K. À partir de ce graphe on peut voir que la variation de l'entropie dépend clairement de P_0 , T_0 , M_1 , et β et que les valeurs de T_0 et P_0 influent sur l'entropie. Cependant, l'écart entre les modèles *GP* et *GR* augmente si M_1 et β augmentent progressivement. Pour $M_1 < 2,00$ et $\beta \geq 30,0$ degrés, si P_0 , T_0 et β augmentent, l'entropie $\Delta S_{2-1}/R$ augmente pour chaque valeur donnée de β ; en d'autres termes, les quatre courbes coïncident approximativement (avec précision).

En considérant, si $M_1=1,6$, $\beta=30^\circ$, alors $\Delta S_{2-1}/R = -0,0162016$, pour le modèle *GP*, $\Delta S_{2-1}/R = -0,0160829$, $-0,0159711$, et $-0,0159402$, pour $P_0=1$ bar, $\Delta S_{2-1}/R = -0,0160865$, $-0,0159715$, et $-0,0159403$, pour $P_0=100$ bar, $\Delta S_{2-1}/R = -0,0160955$, $-0,0159730$, et $-0,0159408$, pour $P_0=500$ bar, si $\beta=50^\circ$, alors $\Delta S_{2-1}/R = 0,0100437$, pour le modèle *GP*, $\Delta S_{2-1}/R = 0,0102106$, $0,0103548$, et $0,0103927$, pour $P_0=1$ bar, $\Delta S_{2-1}/R = 0,0102058$, $0,0103543$, et $0,0103926$, pour $P_0=100$ bar, $\Delta S_{2-1}/R = 0,0101935$, $0,0103524$, et $0,0103920$, pour $P_0=500$ bar, si $\beta=70^\circ$, alors $\Delta S_{2-1}/R = 0,0741219$, pour le modèle *GP*, $\Delta S_{2-1}/R = 0,0761374$, $0,0779349$, et $0,0784167$, pour $P_0=1$ bar, $\Delta S_{2-1}/R = 0,0760779$, $0,0779276$, et $0,0784146$, pour $P_0=100$ bar, $\Delta S_{2-1}/R = 0,0759280$, $0,0779042$, et $0,0784071$, pour $P_0=500$ bar, pour le modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Ainsi, nous concluons que le modèle *GP* peut être appliqué pour obtenir des résultats avec une bonne précision. En revanche, si $M_1 > 2,00$ et $\beta > 30,0$ degrés, si P_0 augmente, l'entropie $\Delta S_{2-1}/R$ diminue légèrement pour chaque valeur de T_0 et β donnée, si T_0 augmente, l'entropie augmente pour chaque valeur de P_0 et β donnée, si β augmente, l'entropie $\Delta S_{2-1}/R$ augmente pour chaque valeur de T_0 et P_0 donnée ; en d'autres termes, les quatre courbes commencent à se séparer, ce qui se traduit par l'augmentation de l'écart entre le modèle *GP* et le modèle *GR*.

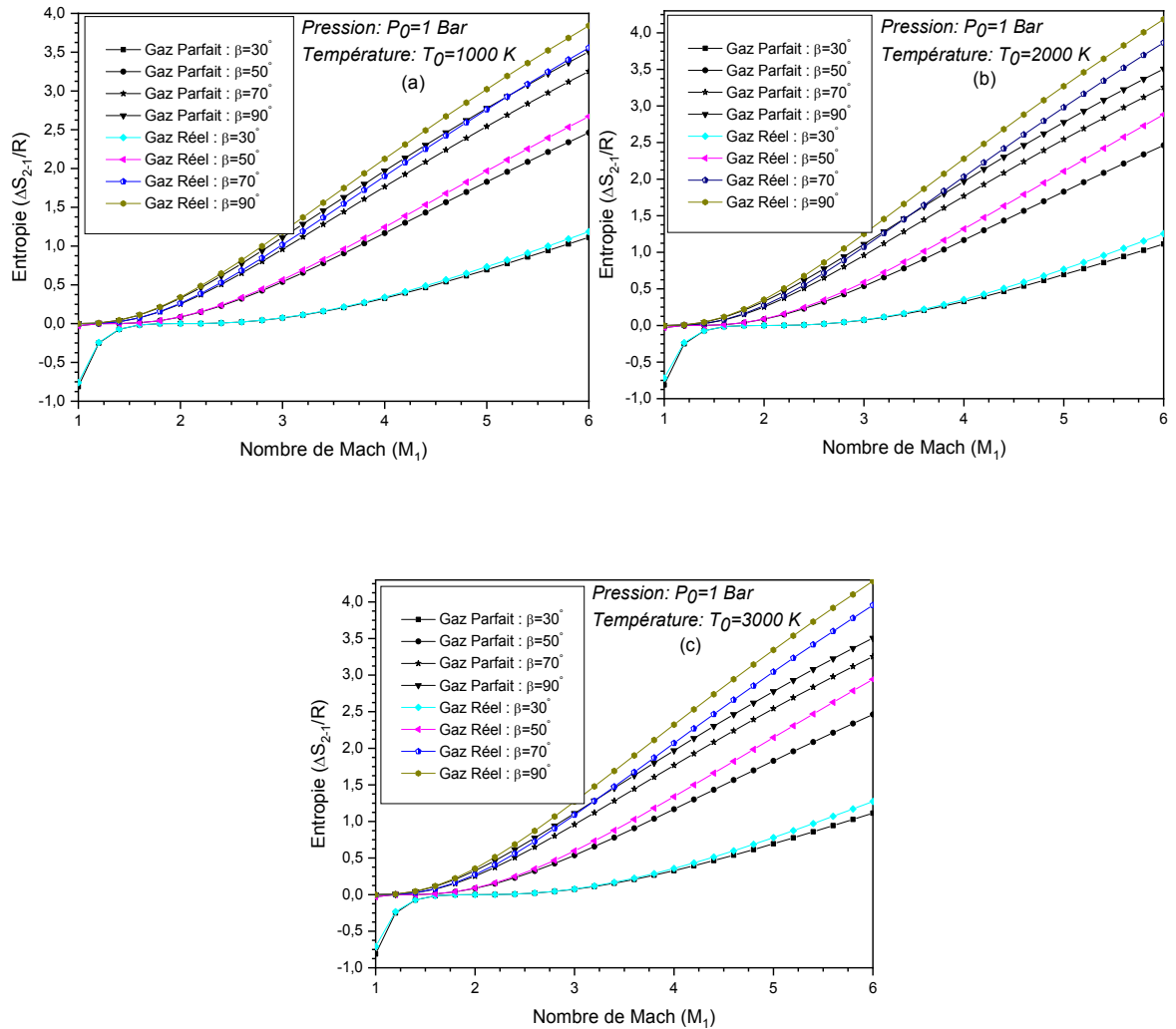
Pour justifier notre conclusion indiquée ci-dessus, nous pouvons considérer le cas où $M_1=5.6$, pour β variable :

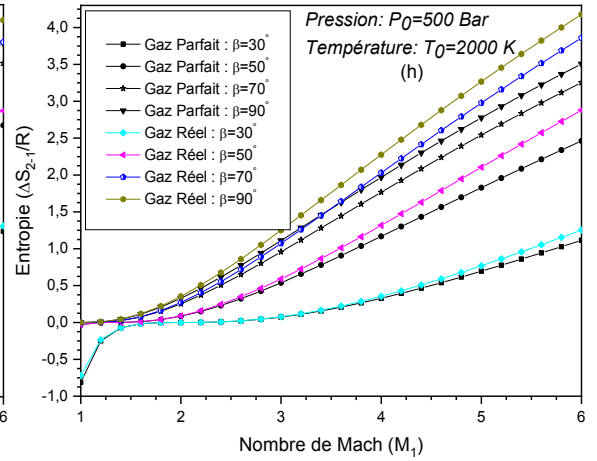
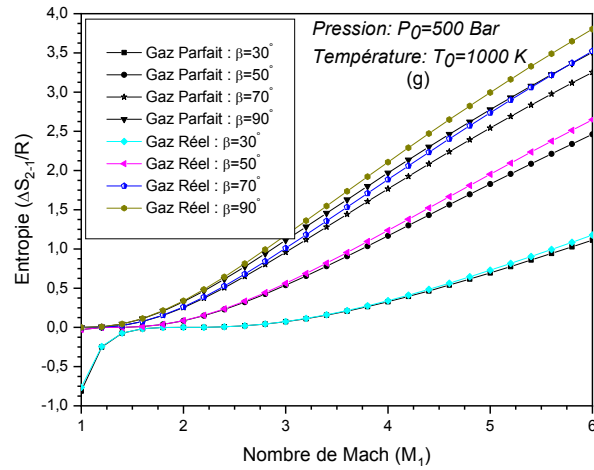
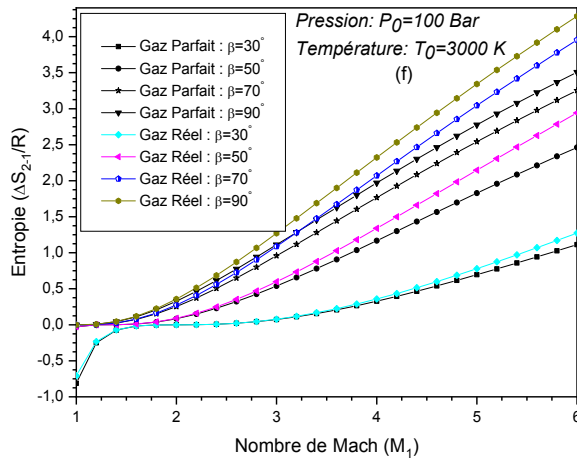
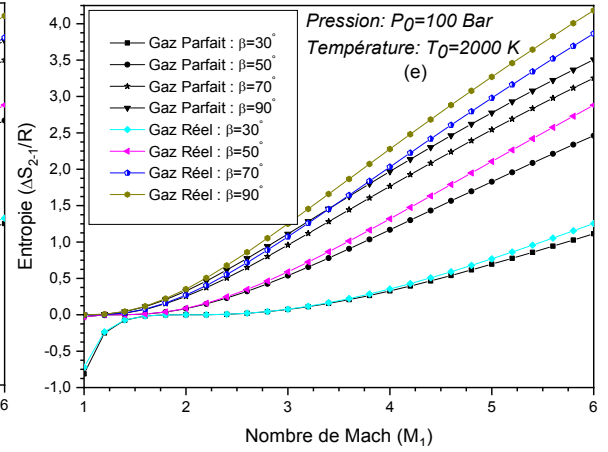
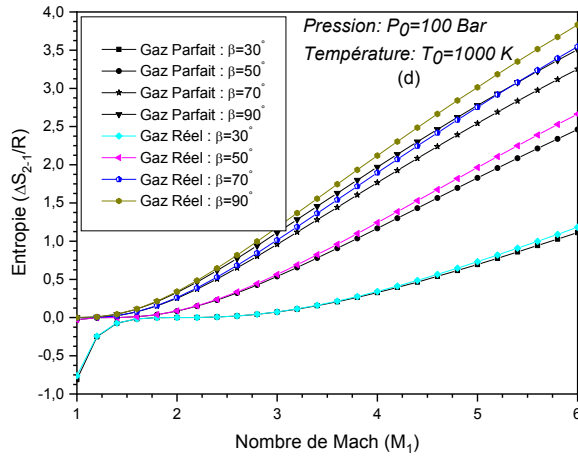
-si $\beta=40^\circ$, alors $\Delta S_{2-1}/R = 1,630659$, pour le modèle *GP*, $\Delta S_{2-1}/R = 1,751022$, $1,869322$, et $1,903018$, pour $P_0=1$ bar, $\Delta S_{2-1}/R = 1,747291$, $1,868816$, et $1,902865$, pour $P_0=100$ bar, $\Delta S_{2-1}/R = 1,737947$, $1,867205$, et $1,902336$, pour $P_0=500$ bar.

-si $\beta=60^\circ$, alors $\Delta S_{2-1}/R = 2,661869$, pour le modèle *GP*, $\Delta S_{2-1}/R = 2,894314$, $3,128826$, et $3,196768$, pour $P_0=1$ bar, $\Delta S_{2-1}/R = 2,887018$, $3,12781$, et $3,196457$, pour $P_0=100$ bar, $\Delta S_{2-1}/R = 2,868768$, $3,124574$, et $3,195386$, pour $P_0=500$ bar.

-si $\beta=80^\circ$, alors $\Delta S_{2-1}/R = 3,162831$, pour le modèle *GP*, $\Delta S_{2-1}/R = 3,454951$, $3,752488$, et $3,839231$, pour $P_0=1$ bar, $\Delta S_{2-1}/R = 3,44574$, $3,751193$, et $3,838833$, pour $P_0=100$ bar, $\Delta S_{2-1}/R = 3,422713$, $3,747069$, et $3,837464$, pour $P_0=500$ bar, pour le modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Nous déduisons alors que L'augmentation de l'énergie cinétique du gaz entraîne un impact plus fort, conduisant à une transformation plus violente et dissipative, ce qui se traduit finalement par une irréversibilité plus importante et une augmentation plus forte de l'entropie. Lorsque des modifications de ce modèle sont à nouveau nécessaires, le modèle GP commence automatiquement à décliner, ce qui démontre l'avantage d'utiliser le modèle GR.





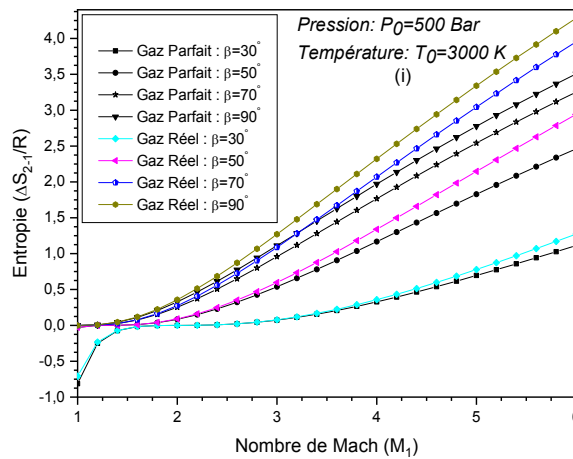


Figure 4.8 : Variation de l'entropie $\Delta S_{2-1}/R$ à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

4.2.9 Variation de l'angle de déviation θ en fonction du nombre de Mach en amont pour un angle de choc oblique β

La figure 4.9 montre la variation de l'angle de déflexion (θ° : degrés) à travers les ondes de choc obliques pour les modèles *GP* et *GR* en fonction du nombre de Mach amont, les pressions de stagnation $P_0 = 1 \text{ bar}$, 100 bar et 500 bar , et les températures de stagnation $T_0 = 1000 \text{ K}$, 2000 K et 3000 K . À partir de ce graphe on peut voir que la variation de l'angle de déviation dépend clairement de P_0 , T_0 , M_1 , et β et que les valeurs de T_0 et P_0 influent sur l'angle de déflexion. Cependant, l'écart entre les modèles *GP* et *GR* augmente si M_1 et β augmentent progressivement. Pour $M_1 < 2,00$ et $\beta \geq 30,0$ degrés, si P_0 , T_0 et β augmentent, l'angle de déviation θ° augmente pour chaque valeur donnée de β ; en d'autres termes, les quatre courbes coïncident approximativement (avec précision).

En considérant, si $M_1 = 1,4$, $\beta = 30^\circ$, alors $\theta^\circ = -17,09015$, pour le modèle *GP*, $\theta^\circ = -17,37541$, $-17,62456$, et $-17,69052$, pour $P_0 = 1 \text{ bar}$, $\theta^\circ = -17,36707$, $-17,62355$, et $-17,69022$, pour $P_0 = 100 \text{ bar}$, $\theta^\circ = -17,34606$, $-17,62034$, et $-17,68921$, pour $P_0 = 500 \text{ bar}$, si $\beta = 50^\circ$, alors $\theta^\circ = 3,298452$, pour le modèle *GP*, $\theta^\circ = 3,374813$, $3,44237$, et $3,460393$, pour $P_0 = 1 \text{ bar}$, $\theta^\circ = 3,372567$, $3,442095$, et $3,460312$, pour $P_0 = 100 \text{ bar}$, $\theta^\circ = 3,36691$, $3,44122$, et $3,460032$, pour $P_0 = 500 \text{ bar}$, si $\beta = 70^\circ$, alors $\theta^\circ = 9,291067$, pour le modèle *GP*, $\theta^\circ = 9,580856$, $9,840928$, et $9,910904$, pour $P_0 = 1 \text{ bar}$, $\theta^\circ = 9,572271$, $9,839865$, et $9,910588$, pour $P_0 = 100 \text{ bar}$, $\theta^\circ = 9,55066$, $9,836473$, et $9,910588$, pour $P_0 = 500 \text{ bar}$.

909503, pour $P_0=500$ bar, pour le modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Ainsi, nous concluons que le modèle *GP* peut être appliqué pour obtenir des résultats avec une bonne précision. En revanche, si $M_1 > 2.00$ et $\beta > 30.0$ degrés, si P_0 augmente, l'angle de déviation θ° diminue légèrement pour chaque valeur de T_0 , et β donnée. Si T_0 augmente, l'angle de déviation θ° augmente pour chaque valeur de P_0 et β donné. Si β augmente, l'angle de déviation θ° augmente pour chaque valeur de T_0 et P_0 . Les courbes de la figure 8 commencent à se séparer, ce qui se traduit par l'augmentation de l'écart entre les modèles *GP* et *GR*.

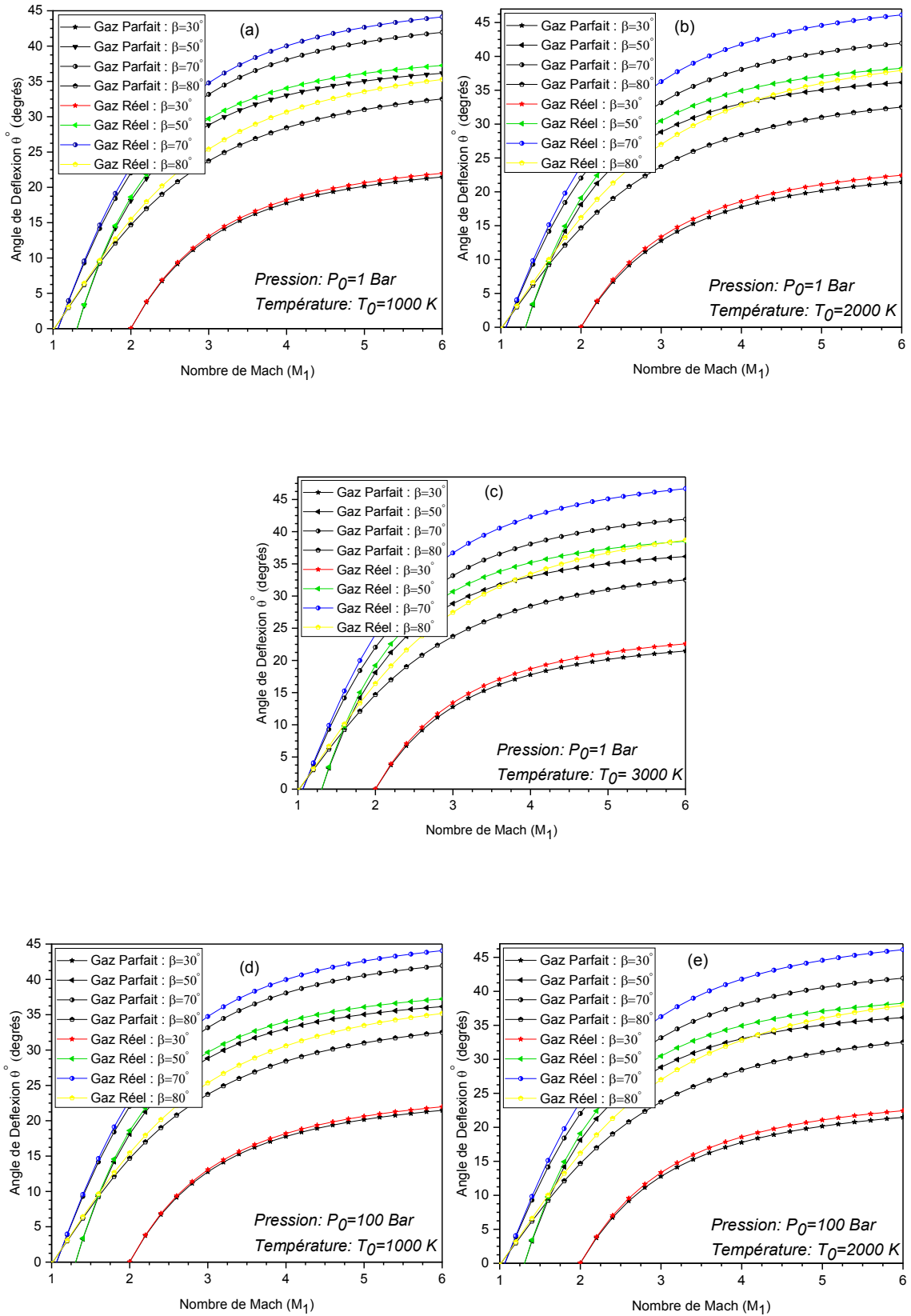
Pour justifier notre conclusion indiquée ci-dessus, nous pouvons considérer le cas où $M_1=5.4$, pour β variable :

-si $\beta=40^\circ$, alors $\theta^\circ = 28,77794$, pour le modèle *GP*, l'angle de déviation θ° prend les valeurs suivantes : $\theta^\circ = 29,54583$, 30. 22657, et 30.40837, pour $P_0=1$ bar, $\theta^\circ = 29.52323$, 30.2238, et 30.40755, pour $P_0=100$ bar, $\theta^\circ = 29.46628$, 30.21498, et 30.40473, pour $P_0=500$ bar.

-si $\beta=60^\circ$, alors $\theta^\circ = 40,39605$, pour le modèle *GP*, $\theta^\circ = 41,92863$, 43,30361, et 43,67329, pour $P_0=1$ bar, $\theta^\circ = 41,88323$, 43,29799, et 43,67162, pour $P_0=100$ bar, $\theta^\circ = 41,76893$, 43,28008, et 43,66589, pour $P_0=500$ bar.

-si $\beta=80^\circ$, alors $\theta^\circ = 31.70152$, pour le modèle *GP*, $\theta^\circ = 34.34553$, 36.90689, et 37.62784, pour $P_0=1$ bar, $\theta^\circ = 34.26408$, 36.89604, et 37.62456, pour $P_0=100$ bar, $\theta^\circ = 34.05991$, 36.86146, et 37. 61327, pour $P_0=500$ bar pour le modèle *GR*, avec respectivement les températures correspondantes $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K.

Nous déduisons alors que la vitesse d'écoulement augmente dans les ondes de choc obliques si le nombre de Mach en amont augmente, ce qui se traduit par une augmentation de l'angle de déflexion (θ°). Lorsque des modifications de ce modèle sont à nouveau nécessaires, le modèle *GP* commence automatiquement à décliner, ce qui démontre l'avantage d'utiliser le modèle *GR*.



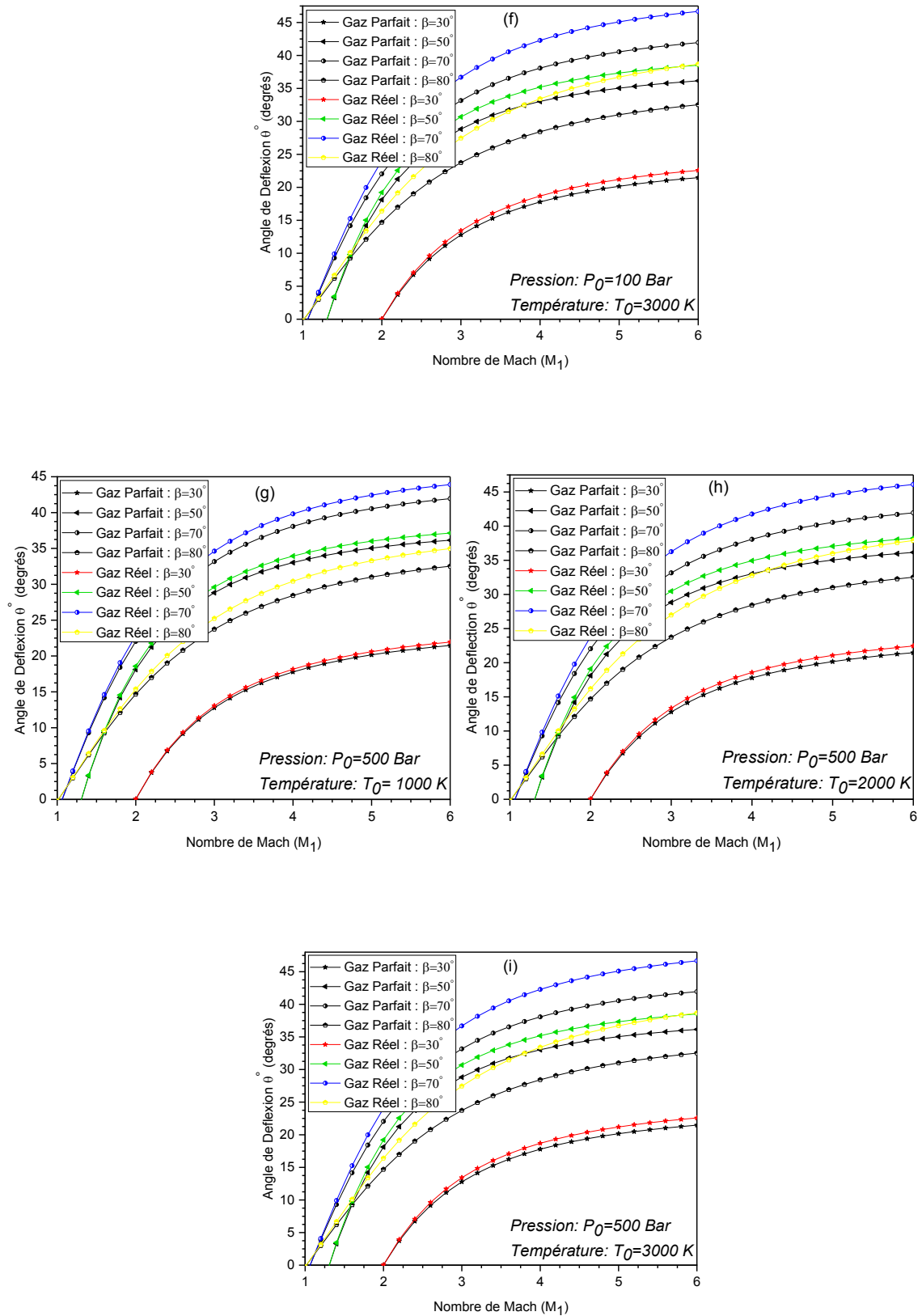


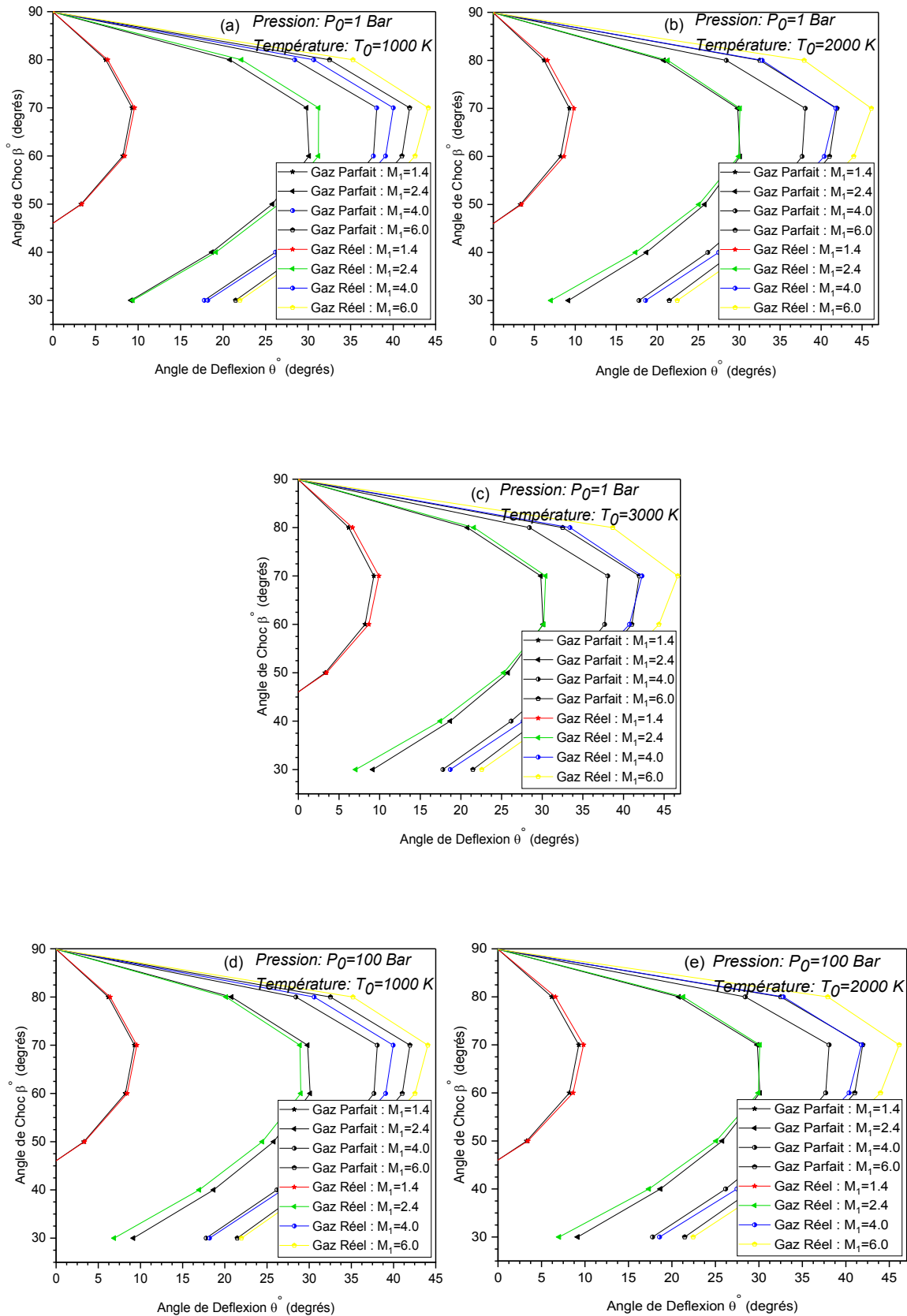
Figure 4.9 : Variation de l'angle de déviation θ° à travers une onde de choc oblique en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

4.2.10 Variation de l'angle de choc β en fonction de l'angle de déflexion θ pour un nombre de Mach amont M_1

La figure 4.10 représente les contours du nombre de Mach amont M_1 pour l'angle de déflexion (θ° : degrés) à travers les ondes de choc obliques pour les modèles *GP* et *GR* en fonction du nombre de Mach amont, les pressions de stagnation $P_0 = 1 \text{ bar}$, 100 bar et 500 bar , et les températures de stagnation $T_0 = 1000 \text{ K}$, 2000 K et 3000 K . A partir de ce graphe on peut voir que la variation de l'angle de déflexion dépend clairement de P_0 , T_0 , M_1 , et β et que les valeurs de T_0 et P_0 influent sur l'angle de déflexion. Cependant, l'écart entre les modèles *GP* et *GR* augmente si M_1 et β augmentent progressivement.

Ainsi, nous concluons que le modèle *GP* peut être appliqué pour obtenir des résultats avec une bonne précision. En revanche, si $\theta < \theta_{\max}$, il existe deux solutions possibles pour chaque valeur de l'angle de déviation θ et du nombre de Mach en amont M_1 , avec deux angles d'onde différents. La plus grande valeur de l'angle de choc β est appelée solution de choc fort, où les rapports des propriétés thermodynamiques sont plus élevés dans l'écoulement, et la plus petite valeur de β est appelée solution de choc faible, où la pression, la température et la densité augmentent moins. Pour une solution de choc fort, l'écoulement derrière le choc devient subsonique. Pour une solution de choc faible, l'écoulement derrière le choc oblique reste supersonique. Toute augmentation supplémentaire de la déflexion entraîne un choc d'arc séparé du coin, où la théorie du choc oblique n'est plus valable. Des angles de déflexion plus élevés produisent un choc plus important (augmente avec) dans l'écoulement jusqu'à une déflexion maximale.

Nous déduisons alors que la vitesse d'écoulement augmente dans les ondes de choc obliques si le nombre de Mach en amont augmente, ce qui se traduit par une augmentation de l'angle de déflexion (θ°). Lorsque des modifications de ce modèle sont à nouveau nécessaires, le modèle *GP* commence automatiquement à décliner, ce qui démontre l'avantage d'utiliser le modèle *GR*.



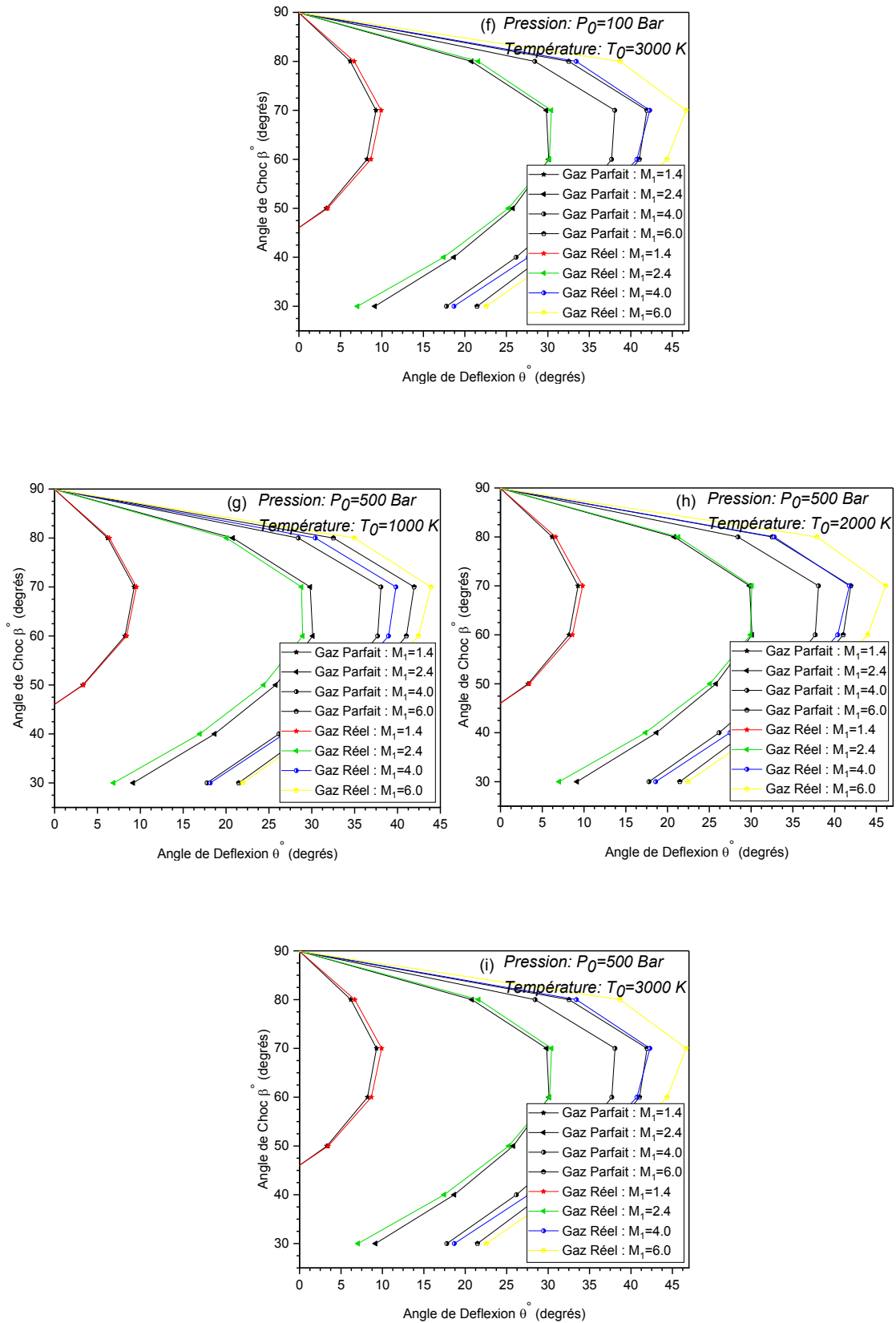


Figure 4.10 : Contours du nombre de Mach amont M_1 pour un angle de déviation θ° et un angle de choc β° donné.

4.3 L'erreurs dues entre les deux modèles GR et GP à travers l'onde de choc

4.3.1 Résultats d'erreurs des paramètres thermodynamiques en fonction du nombre de Mach en amont

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul de l'erreur relative donnée par le modèle du gaz parfait par rapport au modèle du gaz réel, dans le cas d'une onde de choc oblique, dont le but est de comparer les deux modèles et constater la différence entre eux.

L'erreur relative est présentée pour chaque paramètre thermodynamique, à savoir ; la masse volumique, la pression, la température, la pression totale, le nombre de Mach, et l'entropie en fonction du nombre de Mach, Pour différentes valeurs de la pression génératrice $P_0=1\text{Bar}$, $P_0=100\text{Bar}$ et $P_0=500\text{Bar}$ et de la température génératrice $T_0=1000^\circ\text{K}$, $T_0=2000^\circ\text{K}$ et $T_0=3000^\circ\text{K}$ ainsi que l'angle de choc $\beta=30^\circ$, $\beta=50^\circ$, $\beta=70^\circ$ et $\beta=90^\circ$.

La figure 4.11 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de masse volumique ρ_2/ρ_1 , données respectivement par les températures génératrices $T_0=1000\text{k}$, 2000K et 3000K et les pressions génératrices $P_0=1\text{bar}$, 100bar et 500bar et certaines valeurs des ondes de choc obliques $\beta=30^\circ$, 50° , 70° et 90° , en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle GR.

Il est évident que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 , β et M_1 , elle augmente lorsque T_0 et β augmentent. Par exemple, si $T_0 = 1000\text{k}$, $M_1=4.00$ et pour des différentes valeurs de P_0 et β , l'utilisation du modèle GP nous donnera une erreur relative égale à :

Pour $P_0=1\text{bar}$, $\epsilon= 3.6097\%$ pour $\beta=30^\circ$, $6,3021\%$ pour $\beta=50^\circ$, $7,41318\%$ pour $\beta=70^\circ$ et $7,71227\%$ pour $\beta=90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

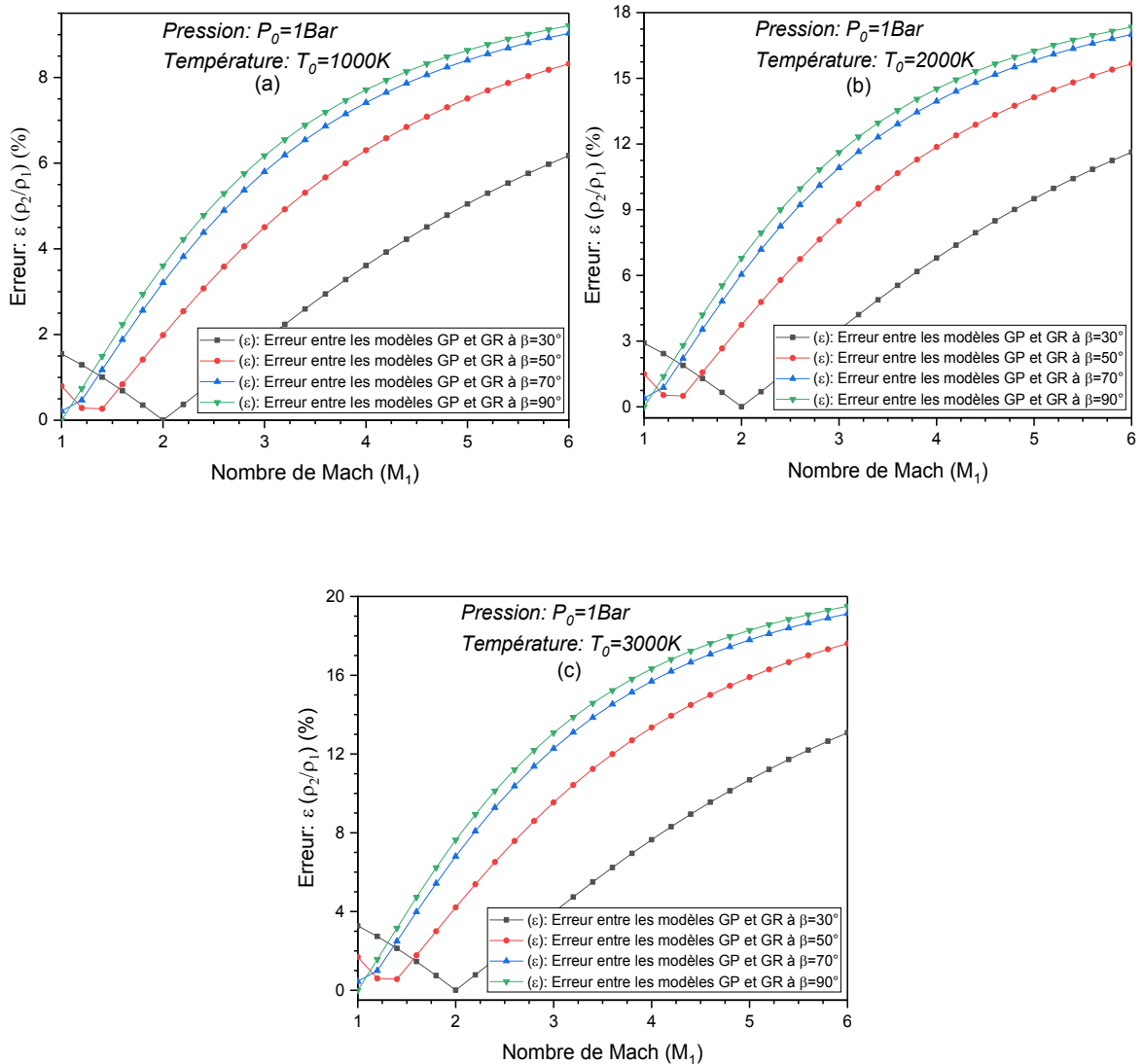
Pour $P_0=100\text{bar}$, $\epsilon= 3,5037\%$ pour $\beta=30^\circ$, $\epsilon= 6,11702\%$ pour $\beta=50^\circ$, $\epsilon= 7,19549\%$ pour $\beta=70^\circ$ et $\epsilon= 7,48578\%$ pour $\beta=90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

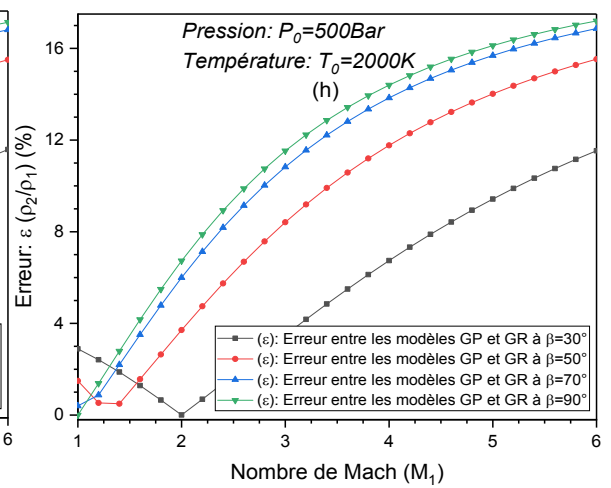
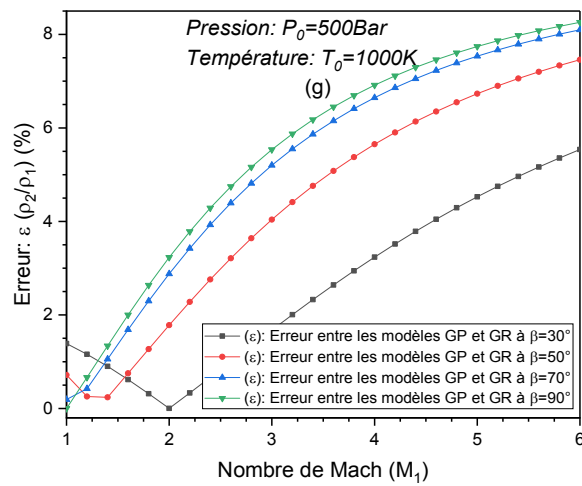
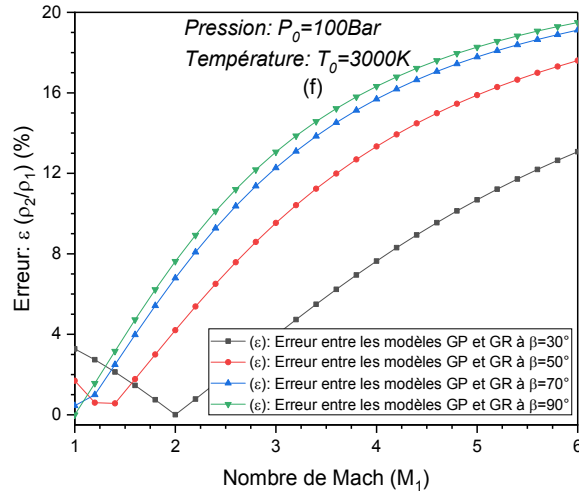
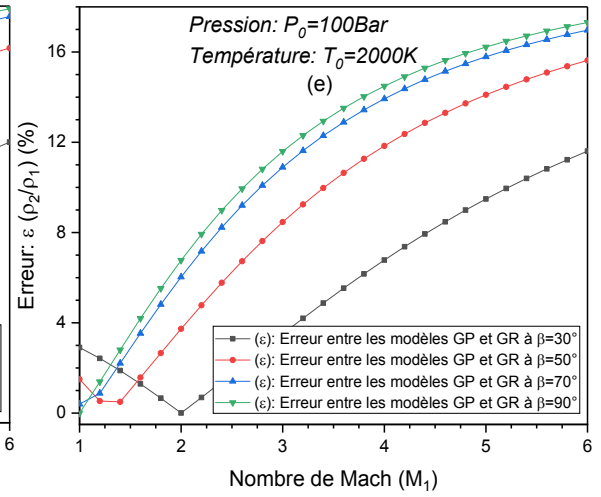
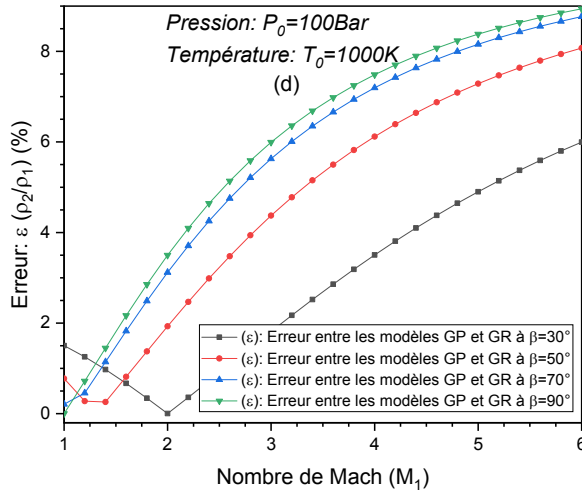
Pour $P_0=500\text{bar}$, $\epsilon=3,23661\%$ pour $\beta=30^\circ$, $\epsilon= 5,65068\%$ pour $\beta=50^\circ$, $\epsilon=$

6,64693% pour $\beta=70^\circ$ et $\varepsilon=6,91509\%$ pour $\beta=90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Il est clair que si l'on choisit une erreur, par exemple inférieure à 5%, le modèle *GP* peuvent être utilisé, si l'angle β est inférieur à 50° pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle *GR* dans un intervalle modéré de M_1 , P_0 et T_0 .

On peut noter que, pour de faibles valeurs de M_1 , T_0 et P_0 , l'erreur est faible ; par contre, lorsque la température T_0 , M_1 et β est plus grande, l'erreur augmente progressivement.





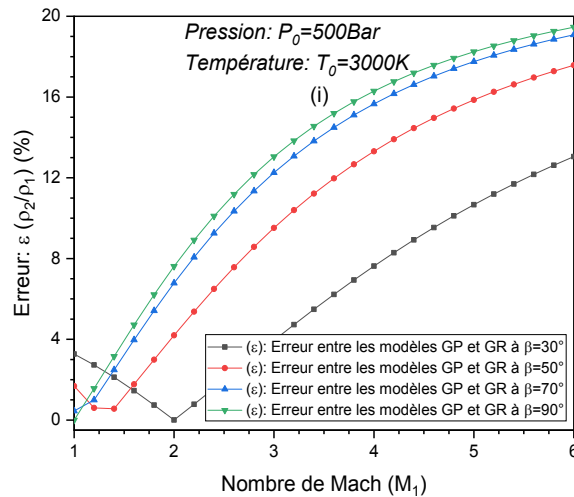


Figure 4.11 : L'évolution de l'erreur relative de la masse volumique ρ_2/ρ_1 en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

La figure 4.12 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de pression P_2/P_1 , données respectivement par les températures génératrices $T_0=1000\text{k}$, 2000K et 3000K et les pressions génératrices P_0 1bar, 100bar et 500bar et certaines valeurs des ondes de choc obliques $\beta=30^\circ$, 50° , 70° et 90° , en fonction du nombre de Mach, du modèle *GP* comparé au modèle *GR*.

Il est évident que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 , β et M_1 , elle diminue lorsque T_0 , P_0 et β augmentent si $M_1 < 2.00$, et augmente après $M_1 > 2.00$. Par exemple, si $T_0 = 1000\text{k}$, $M_1 = 4.00$ et pour des différentes valeurs de P_0 et β , l'utilisation du modèle *GP* nous donnera une erreur relative égale à :

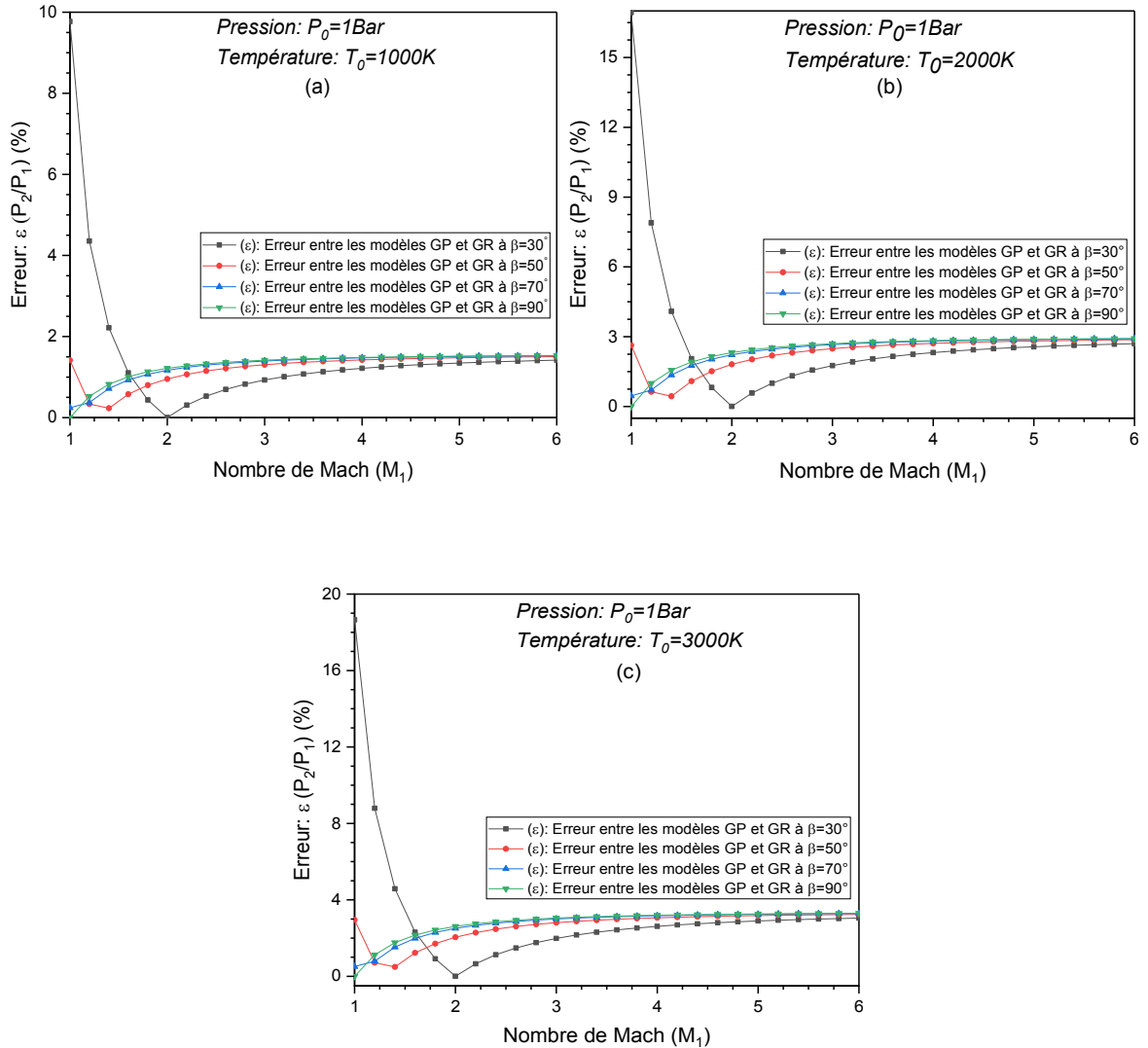
Pour $P_0=1\text{bar}$, $\varepsilon = 1,2179\%$ pour $\beta=30^\circ$, $1,42303\%$ pour $\beta=50^\circ$, $1,47289\%$ pour $\beta=70^\circ$ et $1,48429\%$ pour $\beta=90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

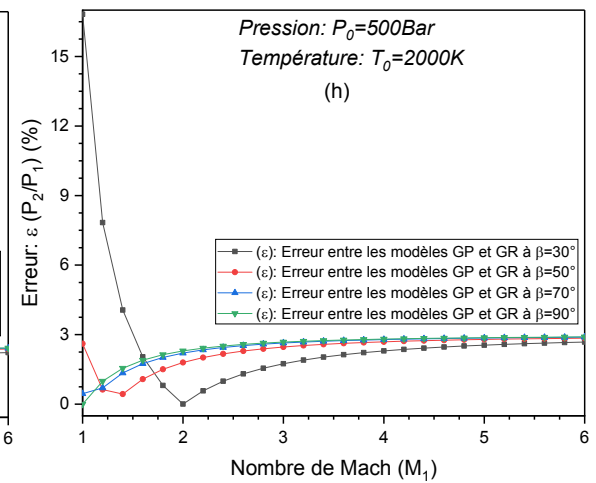
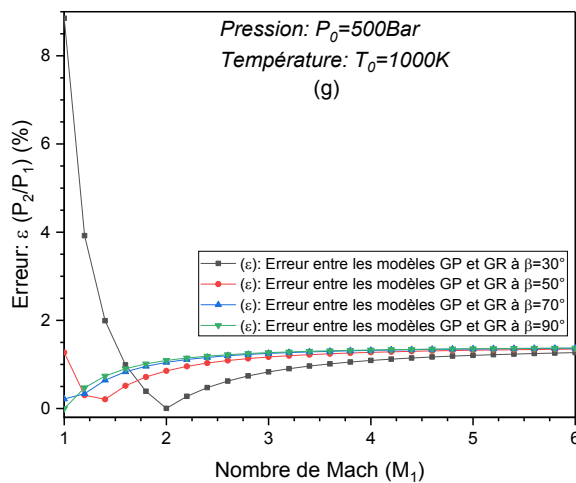
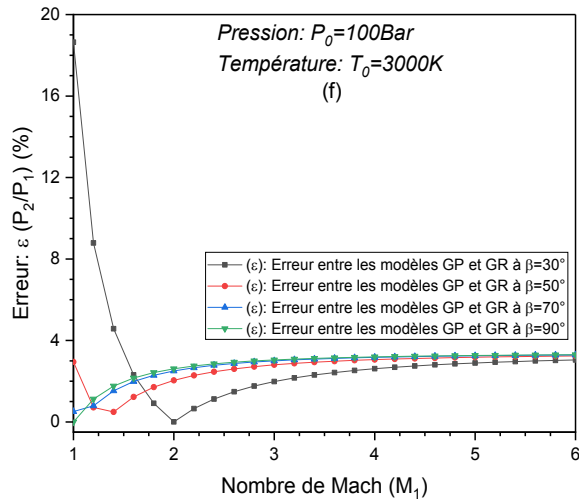
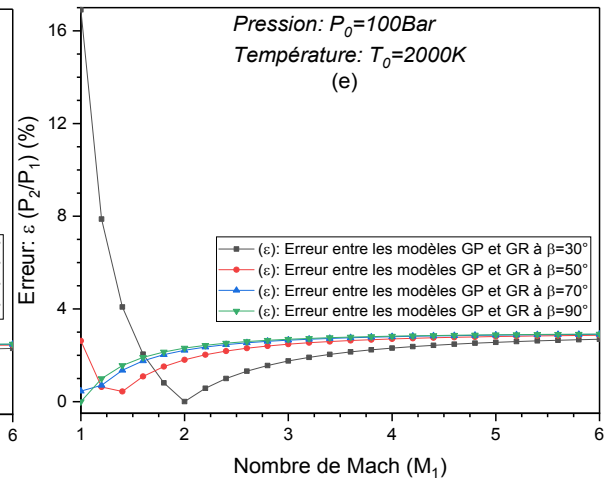
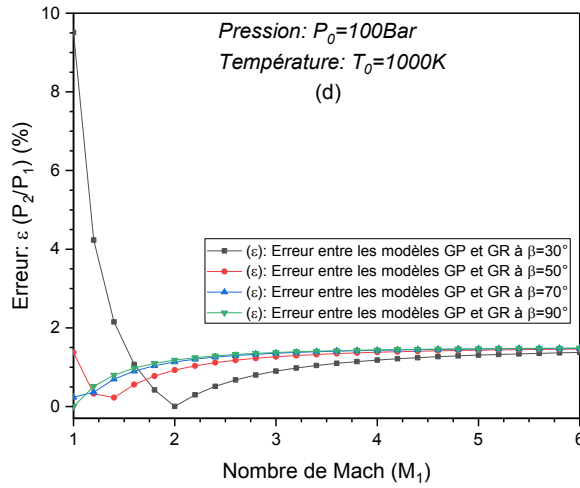
Pour $P_0=100\text{bar}$, $\varepsilon = 1,1817\%$ pour $\beta=30^\circ$, $\varepsilon = 1,38069\%$ pour $\beta=50^\circ$, $\varepsilon = 1,4289\%$ pour $\beta=70^\circ$ et $\varepsilon = 1,44008\%$ pour $\beta=90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Pour $P_0=500\text{bar}$, $\varepsilon=1,09065\%$ pour $\beta=30^\circ$, $\varepsilon = 1,2741\%$ pour $\beta=50^\circ$, $\varepsilon = 1,31859\%$ pour $\beta=70^\circ$ et $\varepsilon=1,3288\%$ pour $\beta=90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Il est clair que si l'on choisit une erreur, par exemple inférieure à 5%, le modèle *GP* peuvent être utilisé, si l'angle β est inférieur à 50° pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle *GR* dans un intervalle modéré de M_1 , P_0 et T_0 .

On peut noter que, pour de faibles valeurs de M_1 , T_0 et P_0 , l'erreur est faible ; sinon, lorsque la pression P_0 est plus grande, l'erreur diminue progressivement.





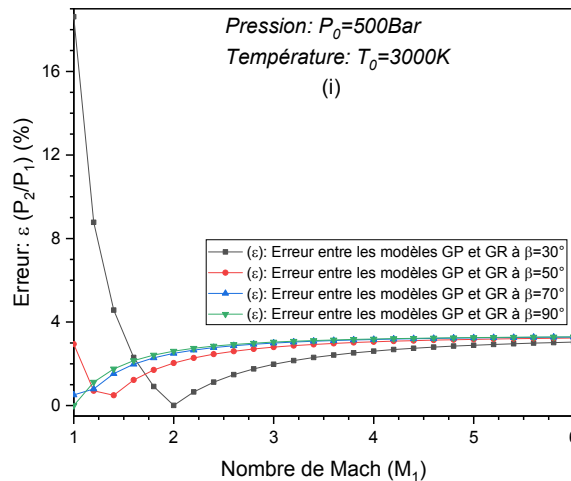


Figure 4.12 : L'évolution de l'erreur relative du rapport de pression P_2/P_1 en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

La figure 4.13 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de température T_2/T_1 , données respectivement par les températures génératrices $T_0=1000\text{k}$, 2000K et 3000K et les pressions génératrices P_0 1bar, 100bar et 500bar et certaines valeurs des ondes de choc obliques $\beta=30^\circ$, 50° , 70° et 90° , en fonction du nombre de Mach, du modèle *GP* comparé au modèle *GR*.

Il est évident que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 , β et M_1 , elle diminue lorsque T_0 , P_0 et β , augmente si $M_1 < 2.00$ et augmente après $M_1 > 2.00$. Par exemple, si $T_0 = 1000\text{k}$, $M_1=4.00$ et pour des différentes valeurs de P_0 et β , l'utilisation du modèle *GP* nous donnera une erreur relative égale à :

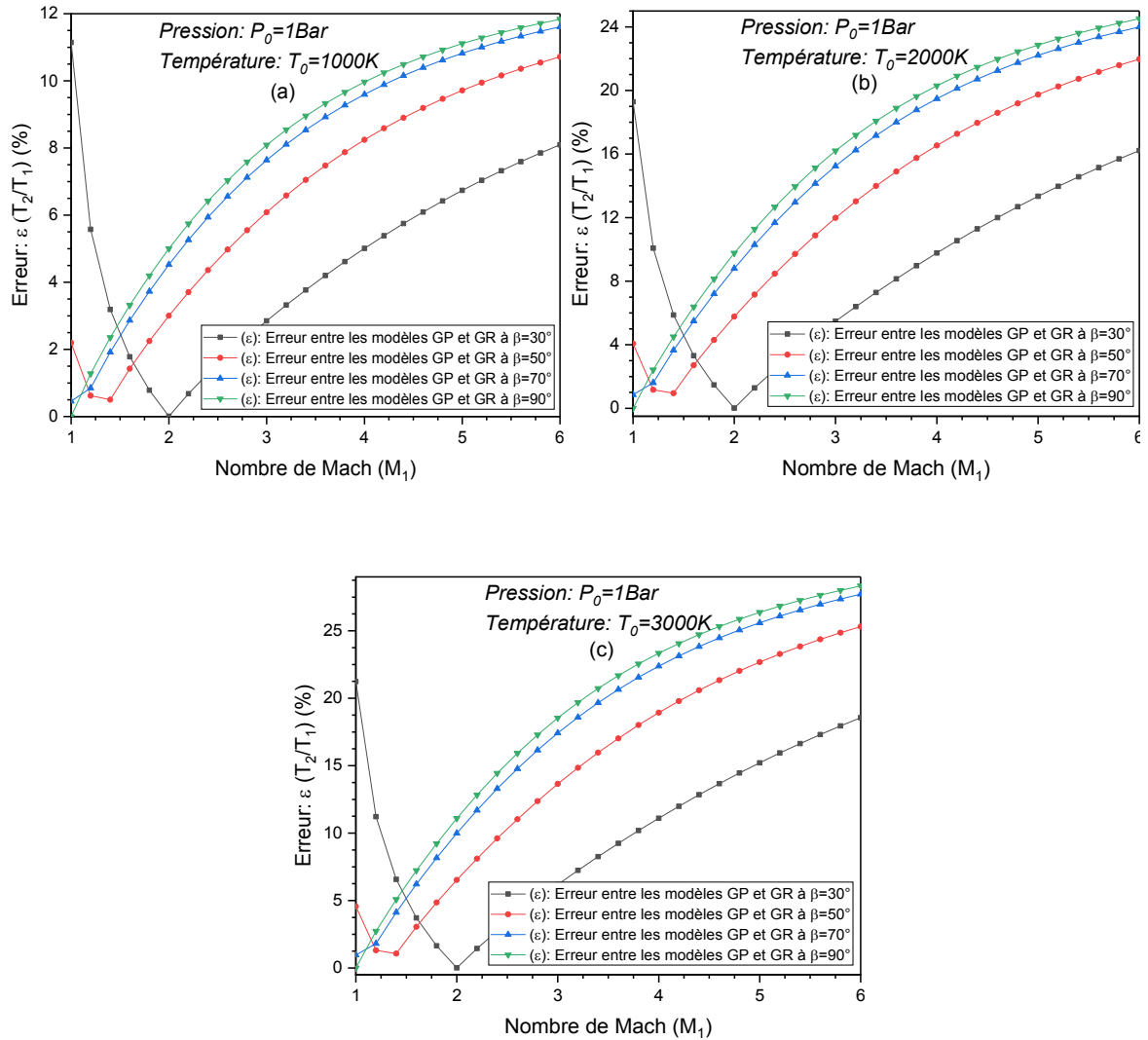
Pour $P_0=1\text{bar}$, $\varepsilon=5,00849\%$ pour $\beta=30^\circ$, $8,24469\%$ pour $\beta=50^\circ$, $9,59754\%$ pour $\beta=70^\circ$ et $9,96513\%$ pour $\beta=90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

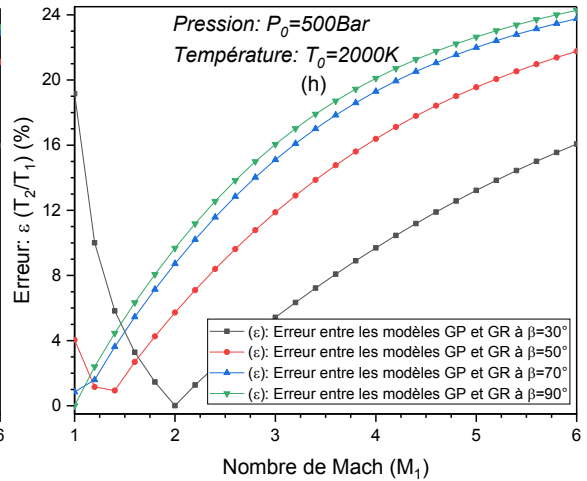
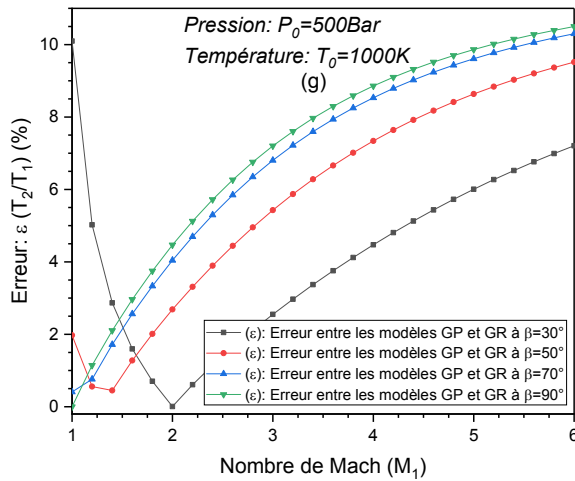
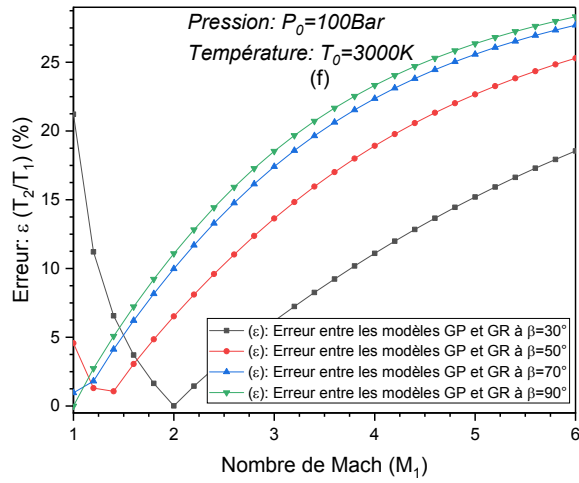
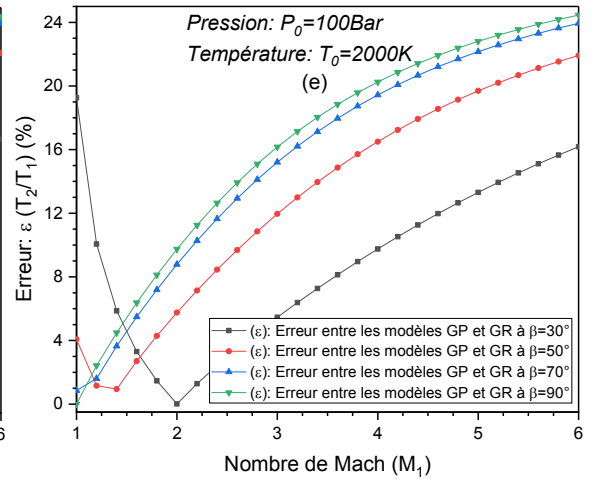
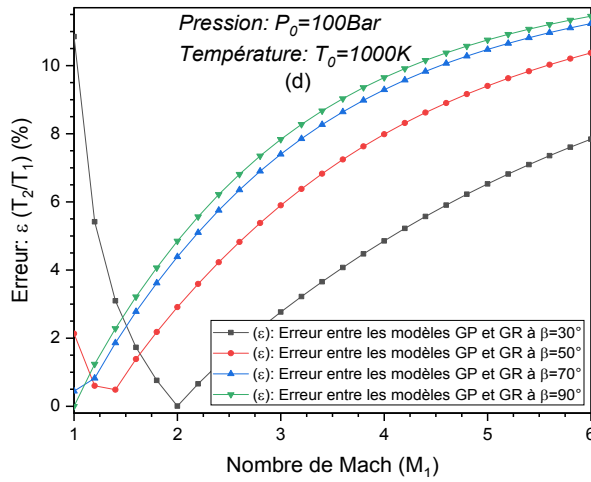
Pour $P_0=100\text{bar}$, $\varepsilon= 4,8556\%$ pour $\beta=30^\circ$, $\varepsilon= 7,98617\%$ pour $\beta=50^\circ$, $\varepsilon= 9,29316\%$ pour $\beta=70^\circ$ et $\varepsilon= 9,6481\%$ pour $\beta=90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Pour $P_0=500\text{bar}$, $\varepsilon=4,47206\%$ pour $\beta=30^\circ$, $\varepsilon= 7,33944\%$ pour $\beta=50^\circ$, $\varepsilon= 8,53271\%$ pour $\beta=70^\circ$ et $\varepsilon=8,85636\%$ pour $\beta=90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Il est clair que si l'on choisit une erreur, par exemple, inférieure à 5%, le modèle *GP* peuvent être utilisé, si l'angle β est inférieur à 50° pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle *GR* dans un intervalle modéré de M_1 , P_0 et T_0 .

On peut noter que, pour de faibles valeurs de M_1 , T_0 et P_0 , l'erreur est faible ; sinon, lorsque la pression T_0 , M_1 , β est plus grande, l'erreur diminue progressivement.





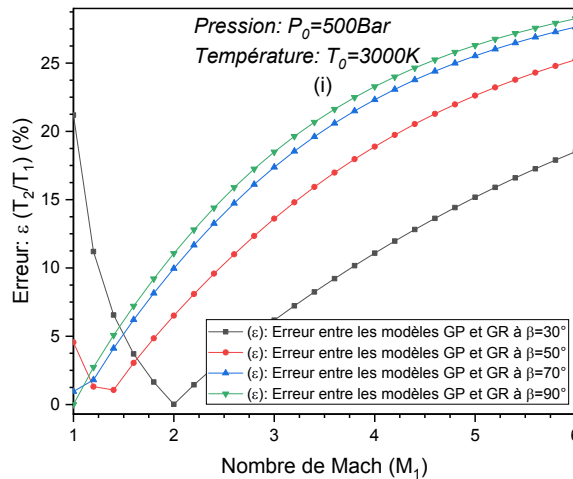


Figure 4.13 : L'évolution de l'erreur relative du rapport de température T_2/T_1 en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

La figure 4.14 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de densité totale (ρ_{02}/ρ_{01}), données respectivement par les températures génératrices $T_0 = 1000\text{K}$, 2000K et 3000K et les pressions génératrices $P_0 = 1\text{bar}$, 100bar et 500bar et certaines valeurs des ondes de choc obliques $\beta = 30^\circ$, 50° , 70° et 90° , en fonction du nombre de Mach, du modèle *GP* comparé au modèle *GR*.

Il est évident que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 , β et M_1 , elle augmente lorsque T_0 et β augmentent. Par exemple, si $T_0 = 1000\text{K}$, $M_1 = 4.00$ et pour des différentes valeurs de P_0 et β , l'utilisation du modèle *GP* nous donnera une erreur relative égale à :

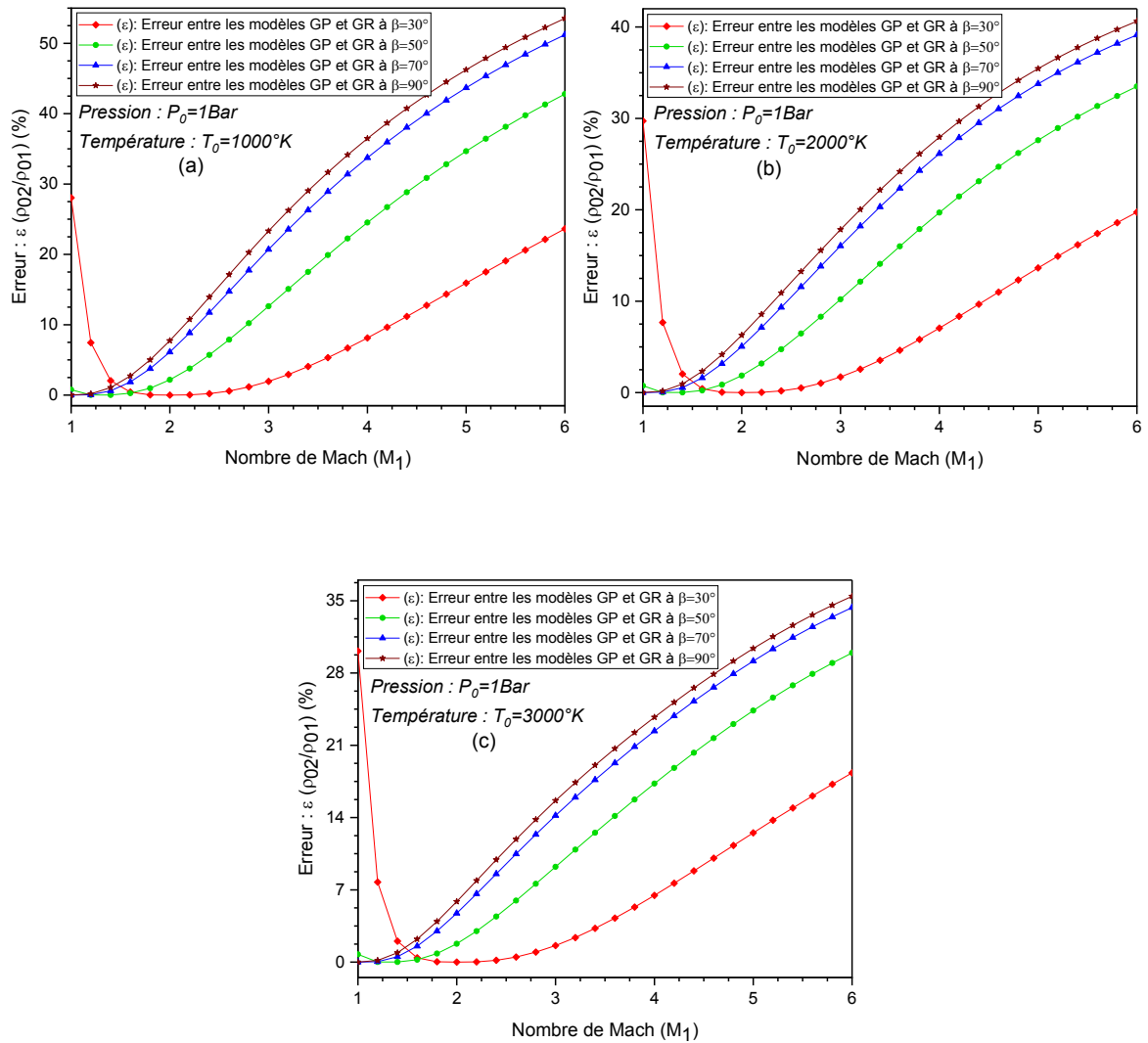
Pour $P_0 = 1\text{bar}$, $\varepsilon = 8,131734\%$ pour $\beta = 30^\circ$, $\varepsilon = 24,529849\%$ pour $\beta = 50^\circ$, $\varepsilon = 33,740972\%$ pour $\beta = 70^\circ$ et $\varepsilon = 36,475584\%$ pour $\beta = 90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

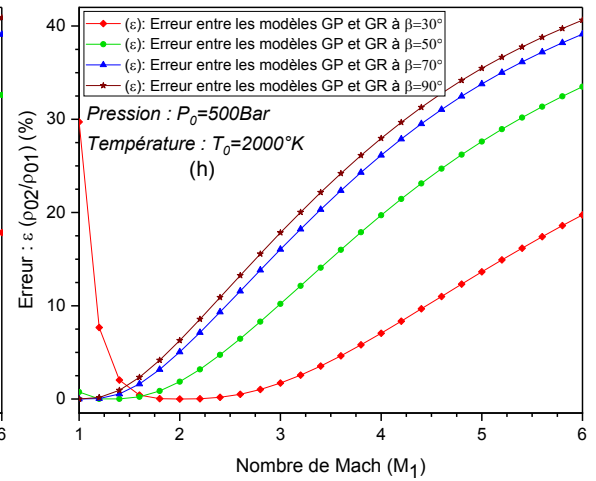
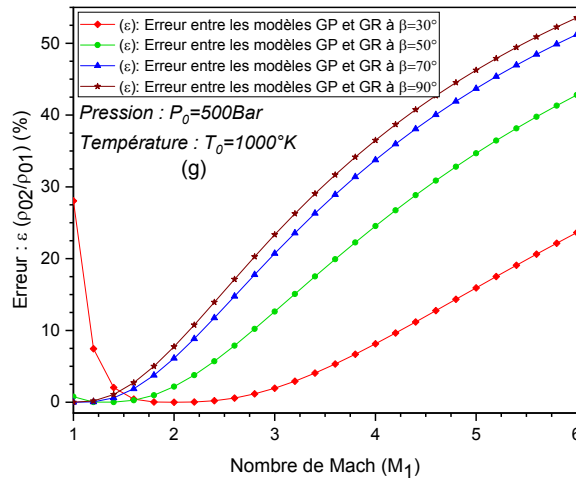
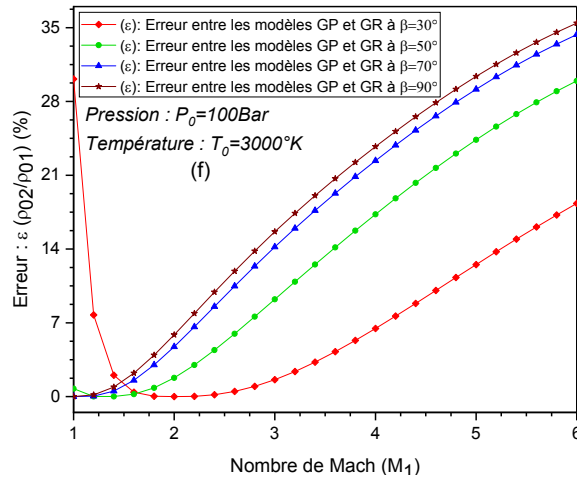
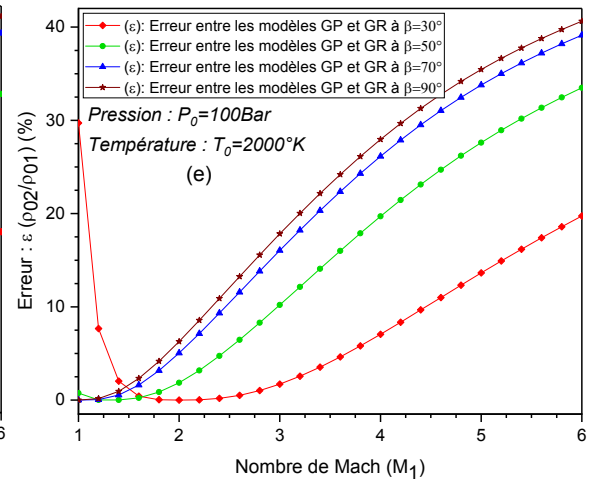
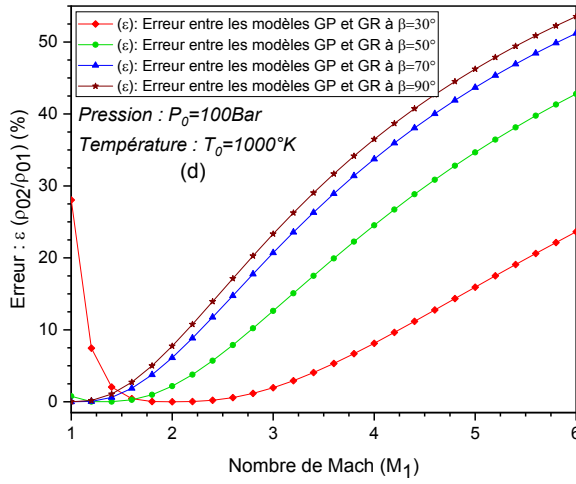
Pour $P_0 = 100\text{bar}$, $\varepsilon = 8,132132\%$ pour $\beta = 30^\circ$, $\varepsilon = 24,531534\%$ pour $\beta = 50^\circ$, $\varepsilon = 33,743539\%$ pour $\beta = 70^\circ$ et $\varepsilon = 36,478446\%$ pour $\beta = 90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Pour $P_0 = 500\text{bar}$, $\varepsilon = 8,133737\%$ pour $\beta = 30^\circ$, $\varepsilon = 24,538326\%$ pour $\beta = 50^\circ$, $\varepsilon = 33,753858\%$ pour $\beta = 70^\circ$ et $\varepsilon = 36,489866\%$ pour $\beta = 90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Il est clair que si l'on choisit une erreur, par exemple inférieure à 5%, le modèle *GP* peuvent être utilisé, si l'angle β est inférieur à 30° pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle *GR* dans un intervalle modéré de M_1 , P_0 et T_0 .

On peut noter que, pour de faibles valeurs de M_1 , T_0 et P_0 , l'erreur est faible ; sinon, lorsque la pression P_0 est plus grande, l'erreur augmente légèrement.





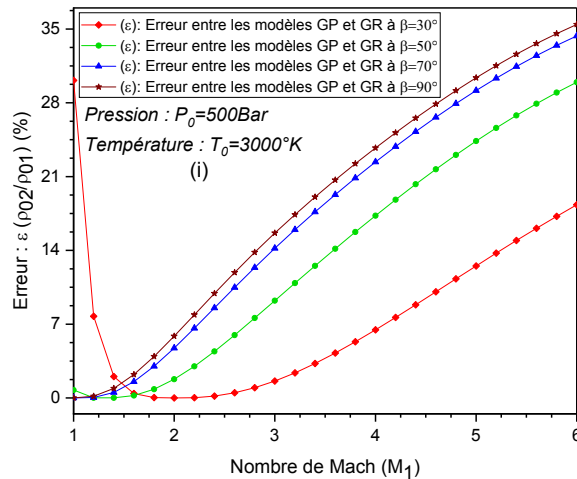


Figure 4.14 : L'évolution de l'erreur relative du rapport de densité totale ρ_{02}/ρ_{01} en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

La figure 4.15 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de pression totale P_{02}/P_{01} , données respectivement par les températures génératrices $T_0 = 1000\text{K}$, 2000K et 3000K et les pressions génératrices P_0 1bar, 100bar et 500bar et certaines valeurs des ondes de choc obliques $\beta = 30^\circ$, 50° , 70° et 90° , en fonction du nombre de Mach, du modèle *GP* comparé au modèle *GR*.

Il est évident que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 , β et M_1 , elle augmente lorsque T_0 et β augmentent. Par exemple, si $T_0 = 1000\text{K}$, $M_1 = 4.00$ et pour des différentes valeurs de P_0 et β , l'utilisation du modèle *GP* nous donnera une erreur relative égale à :

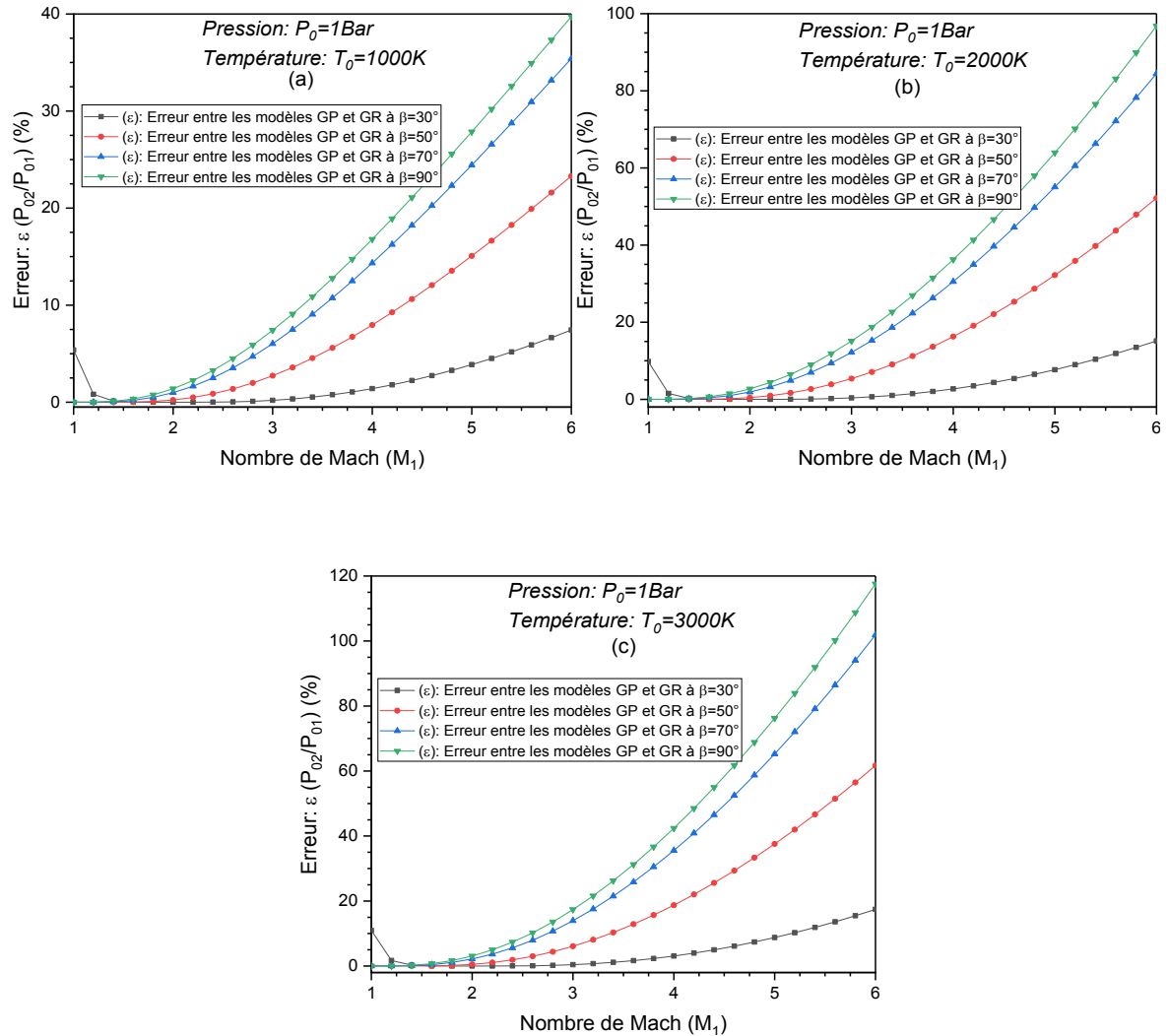
Pour $P_0 = 1\text{bar}$ $\epsilon = 1,40185\%$ pour $\beta = 30^\circ$, $7,96313\%$ pour $\beta = 50^\circ$, $14,34529\%$ pour $\beta = 70^\circ$ et $16,79601\%$ pour $\beta = 90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

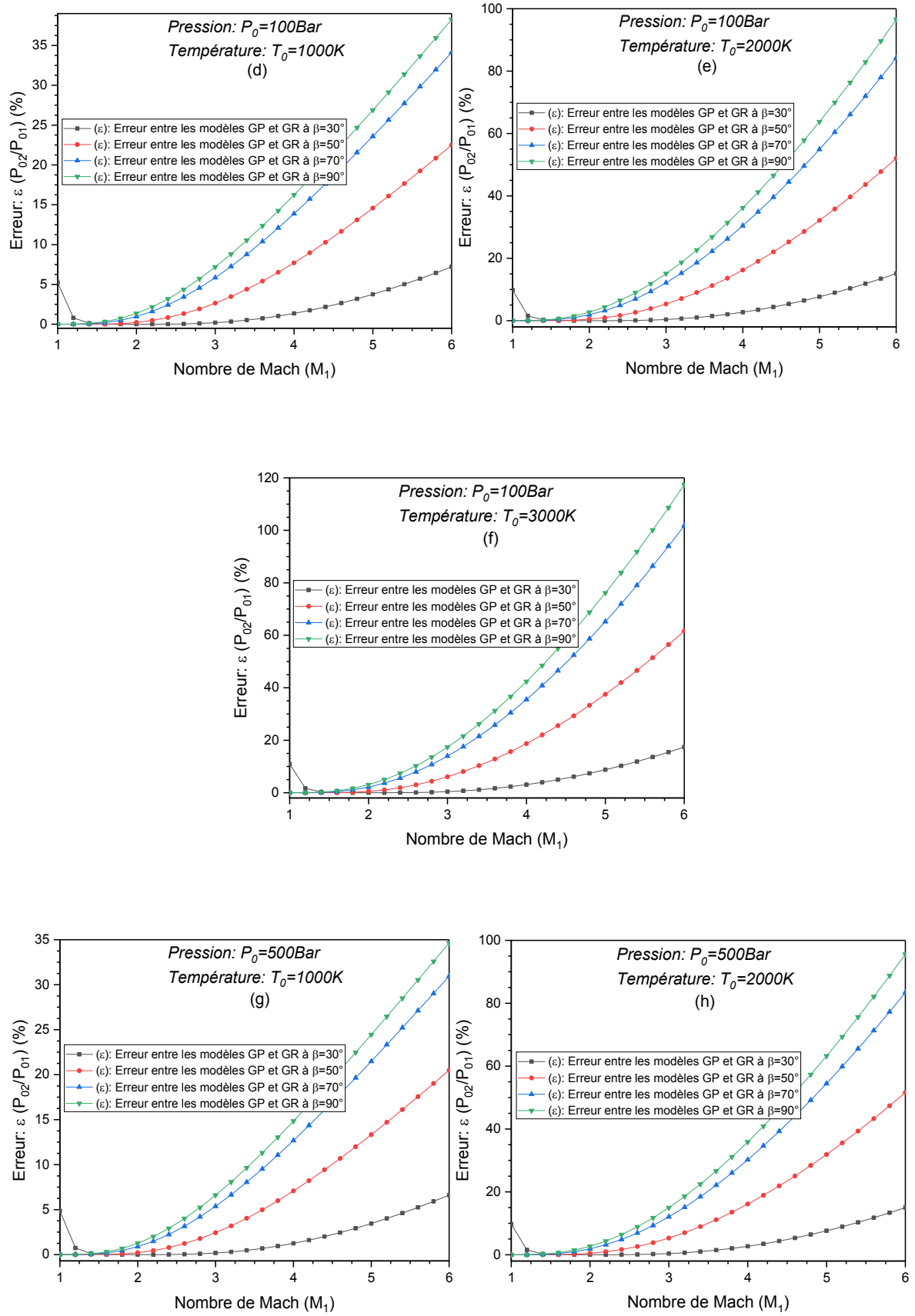
Pour $P_0 = 100\text{bar}$, $\epsilon = 1,3594\%$ pour $\beta = 30^\circ$, $\epsilon = 7,7090\%$ pour $\beta = 50^\circ$, $\epsilon = 13,8703\%$ pour $\beta = 70^\circ$ et $\epsilon = 16,2327\%$ pour $\beta = 90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Pour $P_0 = 500\text{bar}$, $\epsilon = 1,25294\%$ pour $\beta = 30^\circ$, $\epsilon = 7,07469\%$ pour $\beta = 50^\circ$, $\epsilon = 12,68926\%$ pour $\beta = 70^\circ$ et $\epsilon = 14,83427\%$ pour $\beta = 90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Il est clair que si l'on choisit une erreur, par exemple inférieure à 5%, le modèle *GP* peuvent être utilisé, si l'angle β est inférieur à 30° pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle *GR* dans un intervalle modéré de M_1 , P_0 et T_0 .

On peut noter que, pour de faibles valeurs de M_1 , T_0 et P_0 , l'erreur est faible ; sinon, lorsque la pression P_0 est plus grande, l'erreur diminue progressivement.





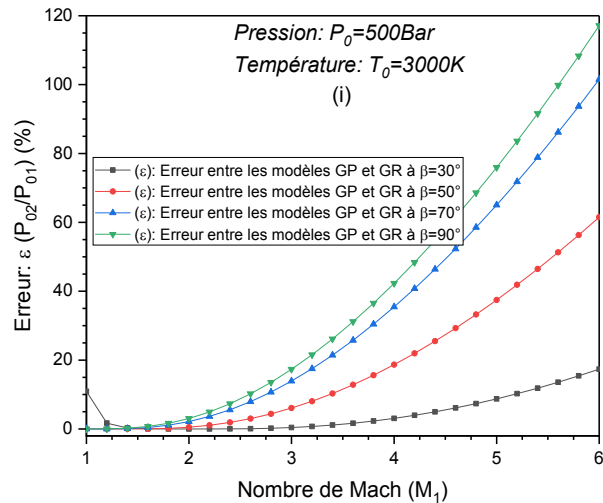


Figure 4.15 : L'évolution de l'erreur relative du rapport de pression totale P_{02}/P_{01} en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

La figure 4.16 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de température totale T_{02}/T_{01} , données respectivement par les températures génératrices $T_0 = 1000 \text{ K}$, 2000 K et 3000 K et les pressions génératrices $P_0 = 1 \text{ bar}$, 100 bar et 500 bar et certaines valeurs des ondes de choc obliques $\beta = 30^\circ$, 50° , 70° et 90° , en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle GR.

Il est évident que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 , β et M_1 , elle augmente lorsque T_0 et β augmentent. Par exemple, si $T_0 = 1000 \text{ K}$, $M_1 = 4.00$ et pour des différentes valeurs de P_0 et β , l'utilisation du modèle GP nous donnera une erreur relative égale à :

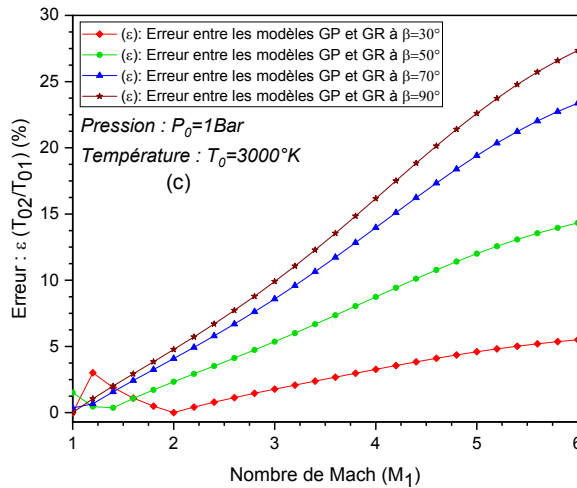
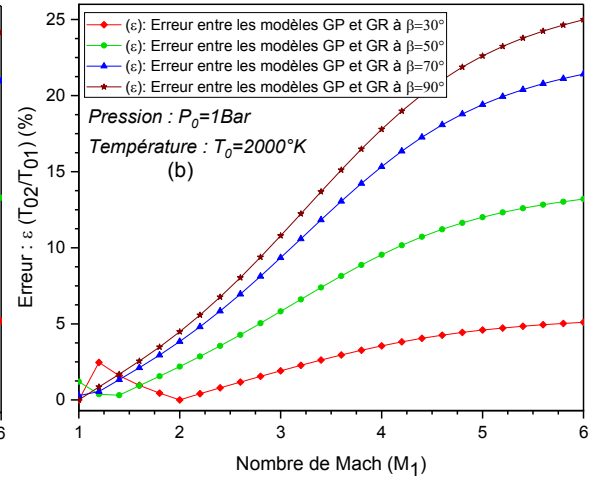
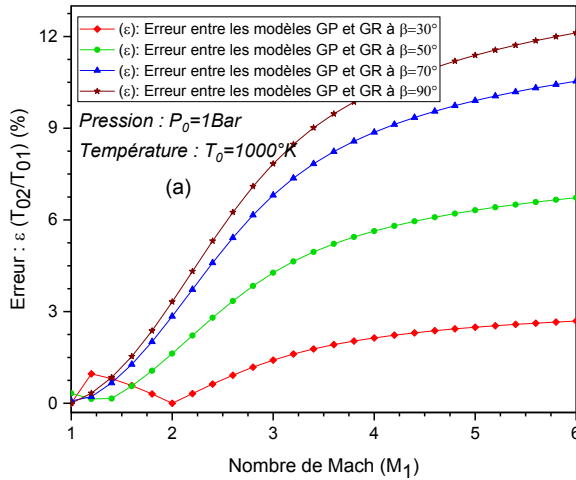
Pour $P_0 = 1 \text{ bar}$, $\varepsilon = 2,140507\%$ pour $\beta = 30^\circ$, $\varepsilon = 5,635796\%$ pour $\beta = 50^\circ$, $\varepsilon = 8,866655\%$ pour $\beta = 70^\circ$ et $\varepsilon = 10,19490\%$ pour $\beta = 90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

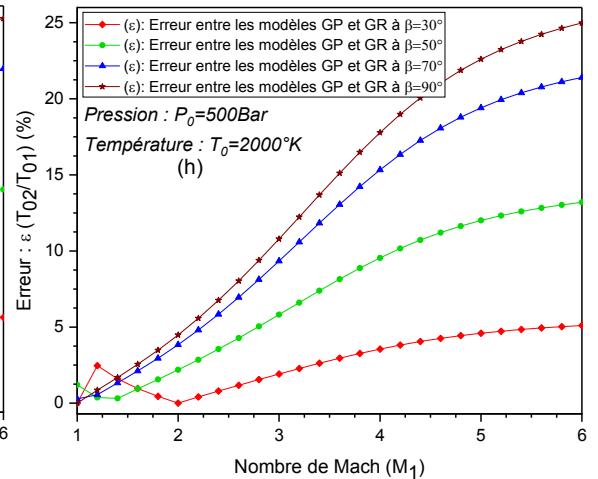
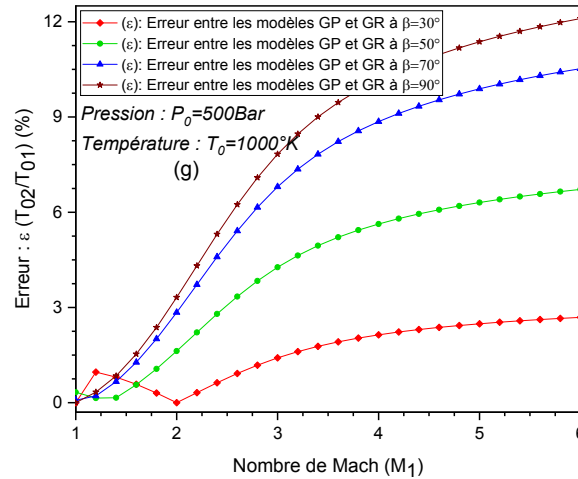
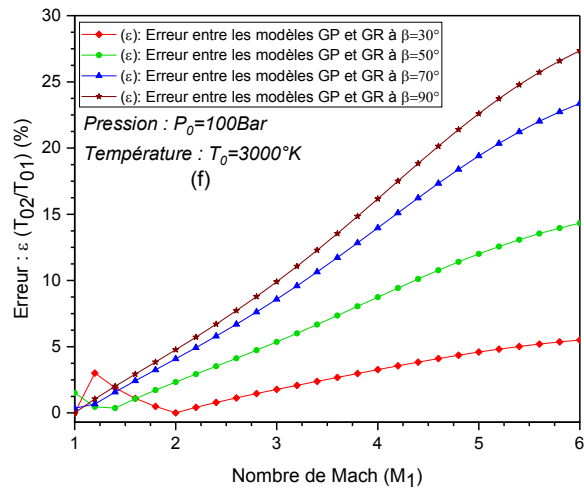
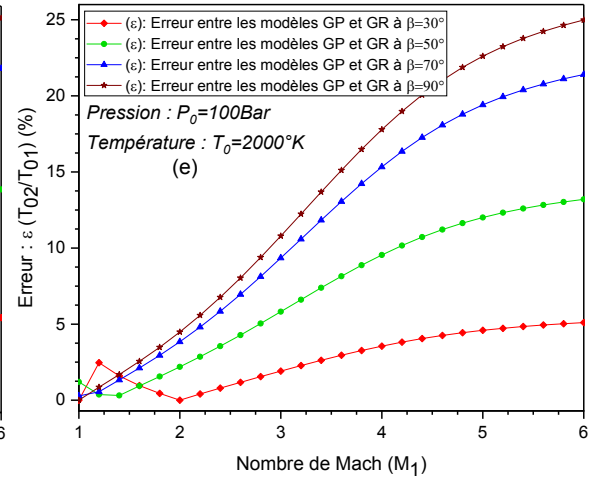
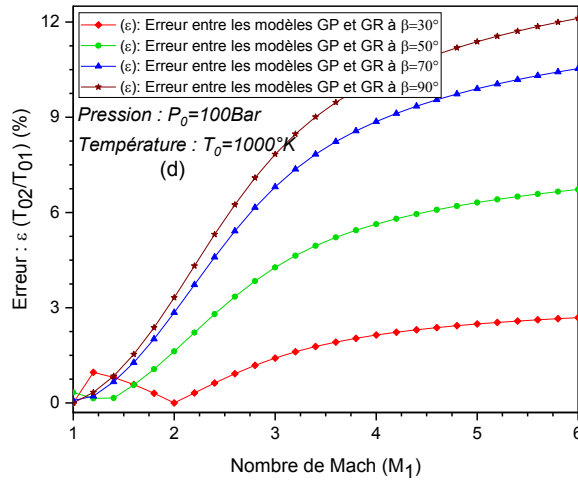
Pour $P_0 = 100 \text{ bar}$, $\varepsilon = 2,14004\%$ pour $\beta = 30^\circ$, $\varepsilon = 5,634557\%$ pour $\beta = 50^\circ$, $\varepsilon = 8,864640\%$ pour $\beta = 70^\circ$ et $\varepsilon = 10,19254\%$ pour $\beta = 90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Pour $P_0 = 500 \text{ bar}$, $\varepsilon = 2,138201\%$ pour $\beta = 30^\circ$, $\varepsilon = 5,62954\%$ pour $\beta = 50^\circ$, $\varepsilon = 8,856523\%$ pour $\beta = 70^\circ$ et $\varepsilon = 10,183112\%$ pour $\beta = 90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Il est clair que si l'on choisit une erreur, par exemple inférieure à 5%, le modèle *GP* peuvent être utilisé, si l'angle β est inférieur à 50° pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle *GR* dans un intervalle modéré de M_1 , P_0 et T_0 .

On peut noter que, pour de faibles valeurs de M_1 , T_0 et P_0 , l'erreur est faible ; sinon, lorsque la pression P_0 est plus grande, l'erreur diminue légèrement.





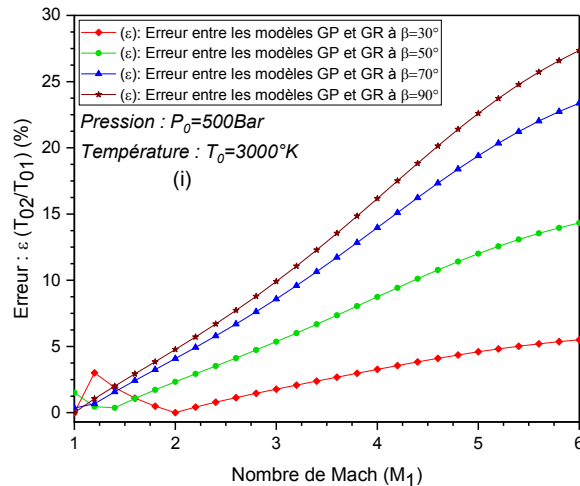


Figure 4.16 : L'évolution de l'erreur relative du rapport de température totale T_{02}/T_{01} en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

La figure 4.17 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage du Nombre de Mach M_2 , données respectivement par les températures génératrices $T_0=1000\text{k}$, 2000K et 3000K et les pressions génératrices $P_0=1\text{bar}$, 100bar et 500bar et certaines valeurs des ondes de choc obliques $\beta=30^\circ$, 50° , 70° et 90° , en fonction du nombre de Mach, du modèle *GP* comparé au modèle *GR*.

Il est évident que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 , β et M_1 , elle diminue lorsque T_0 et β augmentent si $M_1 < 2.00$ et augmente après $M_1 > 2.00$. Par exemple, si $T_0 = 1000\text{k}$, $M_1 = 4.00$, et pour des différentes valeurs de P_0 et β , l'utilisation du modèle *GR* nous donnera une erreur relative égale à :

Pour $P_0=1\text{bar}$, $\varepsilon=2,25819\%$, pour $\beta=30^\circ$, $\varepsilon=3,37915\%$ pour $\beta=50^\circ$, $\varepsilon=2,51016\%$ pour $\beta=70^\circ$ et $\varepsilon=3,33017\%$ pour $\beta=90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

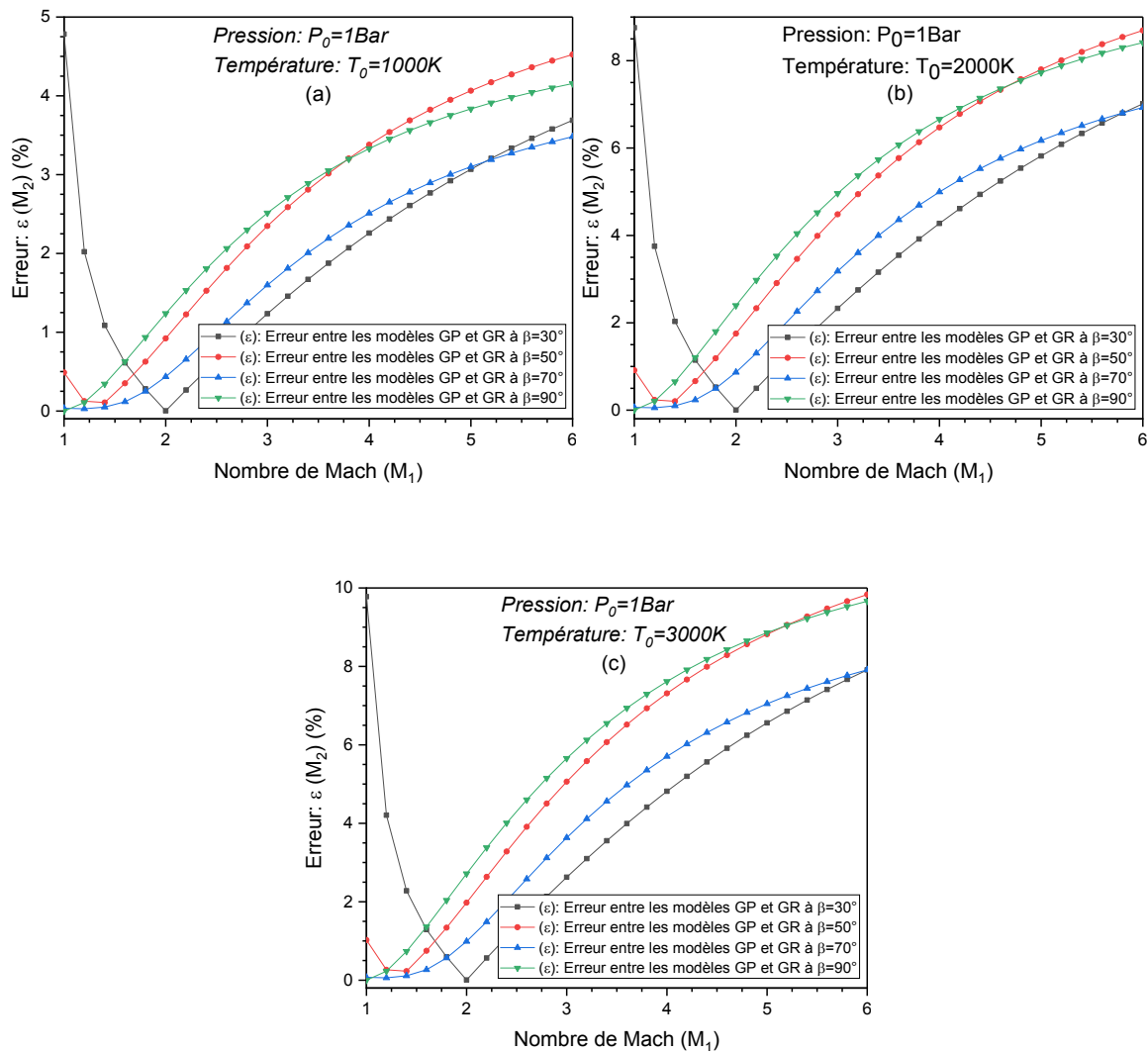
Pour $P_0=100\text{bar}$, $\varepsilon=2,19147\%$ pour $\beta=30^\circ$, $\varepsilon=3,27806\%$ pour $\beta=50^\circ$, $\varepsilon=2,43192\%$ pour $\beta=70^\circ$ et $\varepsilon=3,22612\%$ pour $\beta=90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

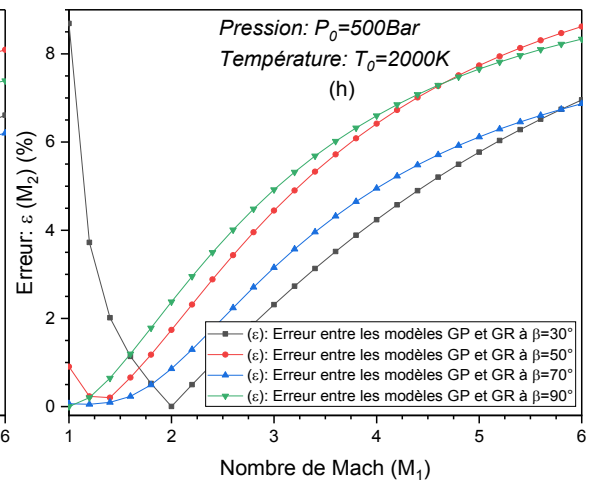
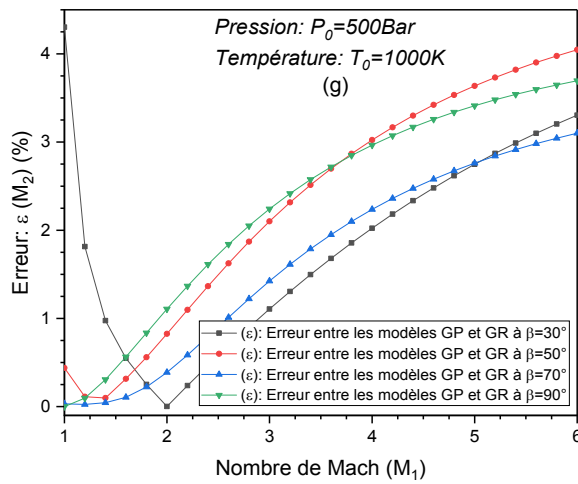
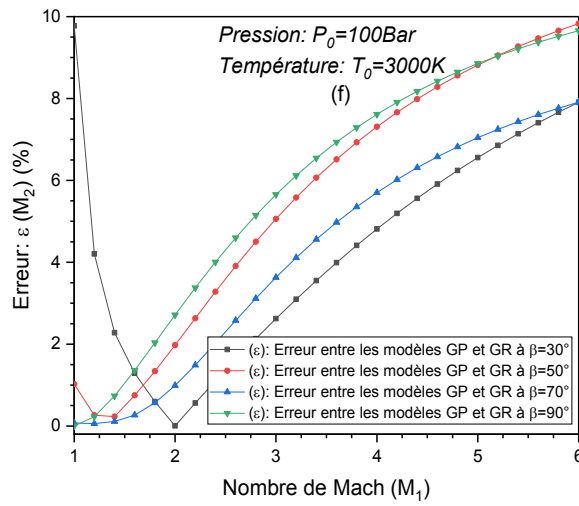
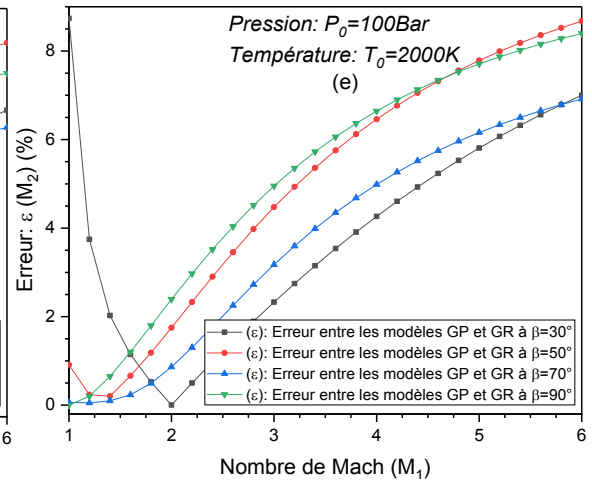
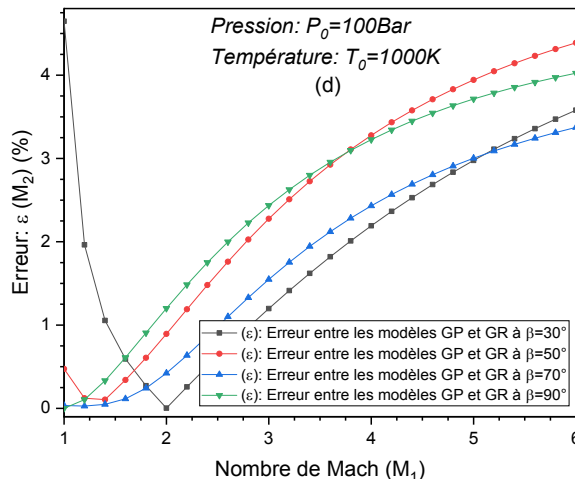
Pour $P_0=500\text{bar}$, $\varepsilon=2,02349\%$ pour $\beta=30^\circ$, $\varepsilon=3,02381\%$ pour $\beta=50^\circ$, $\varepsilon=2,23603\%$ pour $\beta=70^\circ$ et $\varepsilon=2,96571\%$ pour $\beta=90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Il est clair que si l'on choisit une erreur, par exemple inférieure à 5%, le modèle

GP peuvent être utilisés, si l'angle β est inférieur à 90° pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle *GR* dans un intervalle modéré de M_1 , P_0 et T_0 .

On peut noter que, pour de faibles valeurs de M_1 , T_0 et P_0 , l'erreur est faible ; sinon, lorsque la pression P_0 est plus grande, l'erreur diminue progressivement.





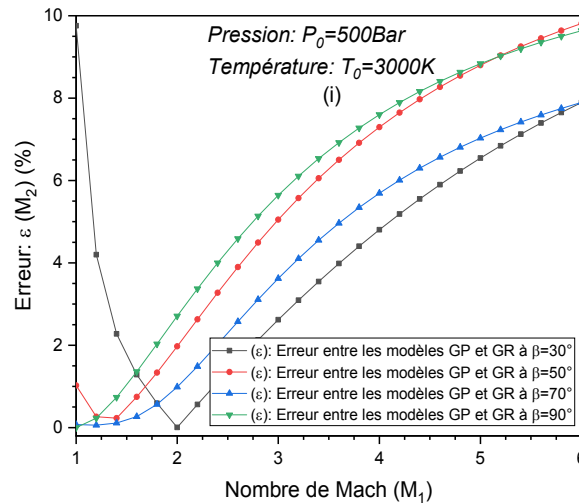


Figure 4.17 : L'évolution de l'erreur relative du nombre de Mach aval M_2 en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

La figure 4.18 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de l'entropie $\Delta S_{2-1}/R$, données respectivement par les températures génératrices $T_0 = 1000 \text{ K}$, 2000 K et 3000 K et les pressions génératrices $P_0 = 1 \text{ bar}$, 100 bar et 500 bar et certaines valeurs des ondes de choc obliques $\beta = 30^\circ$, 50° , 70° et 90° , en fonction du nombre de Mach, du modèle *GP* comparé au modèle *GR*.

Il est évident que l'erreur dépend des valeurs de P_0 , T_0 , β et M_1 , elle diminue lorsque T_0 , P_0 augmentent et β diminue. Par exemple, si $T_0 = 1000 \text{ K}$, $M_1 = 4.00$ et pour des différentes valeurs de P_0 et β , l'utilisation du modèle *GP* nous donnera une erreur relative égale à :

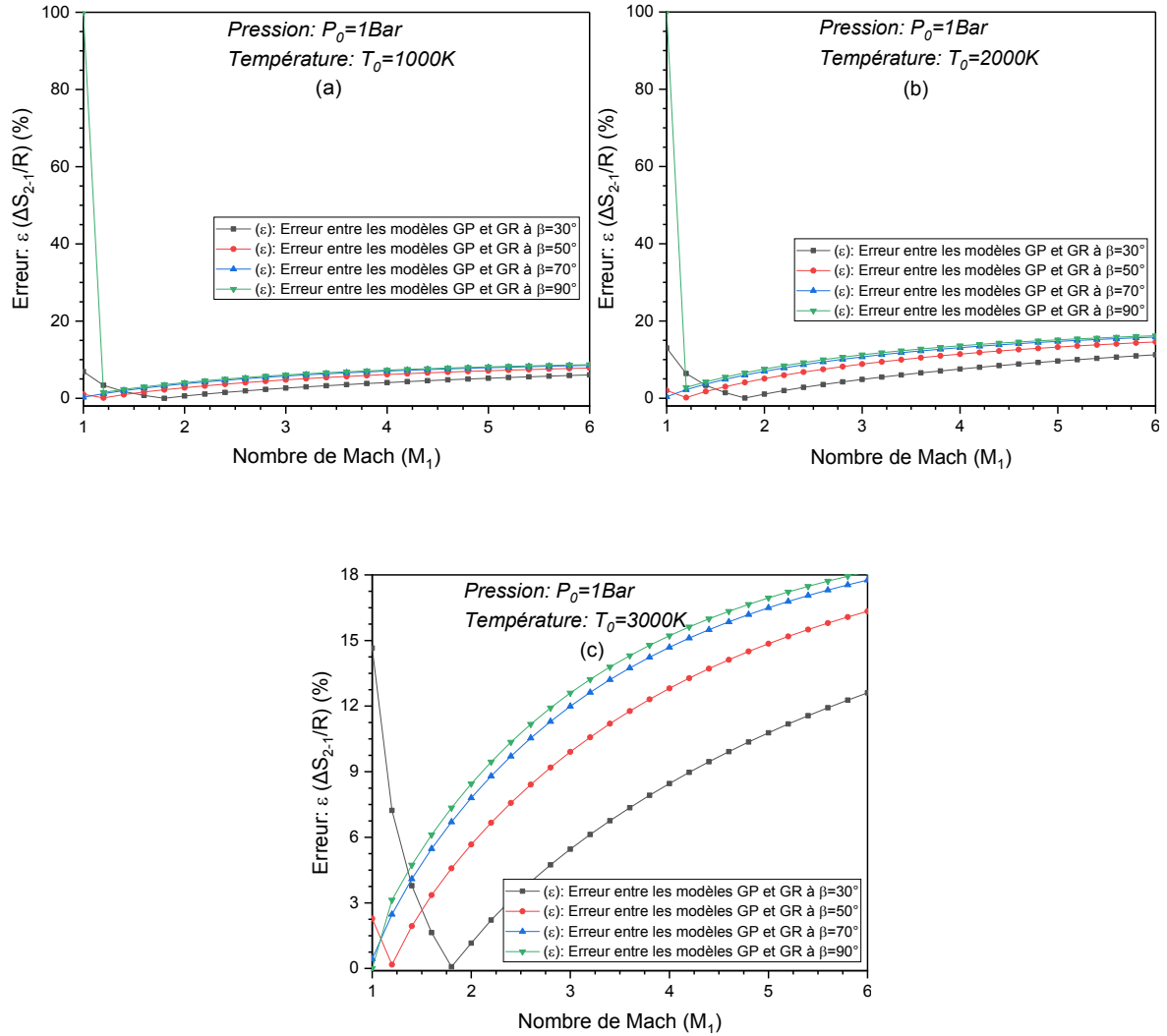
Pour $P_0 = 1 \text{ bar}$, $\varepsilon = 4,0741\%$ pour $\beta = 30^\circ$, $\varepsilon = 6,15674\%$ pour $\beta = 50^\circ$, $\varepsilon = 7,05491\%$ pour $\beta = 70^\circ$ et $\varepsilon = 7,30747\%$ pour $\beta = 90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

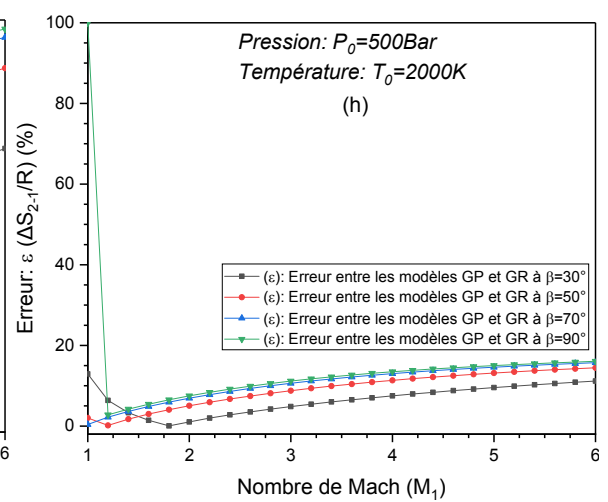
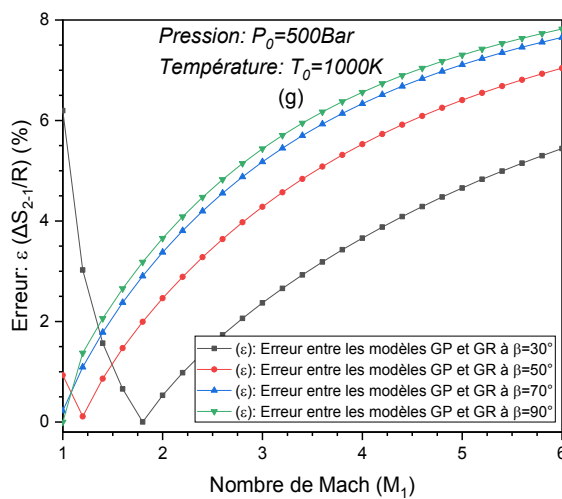
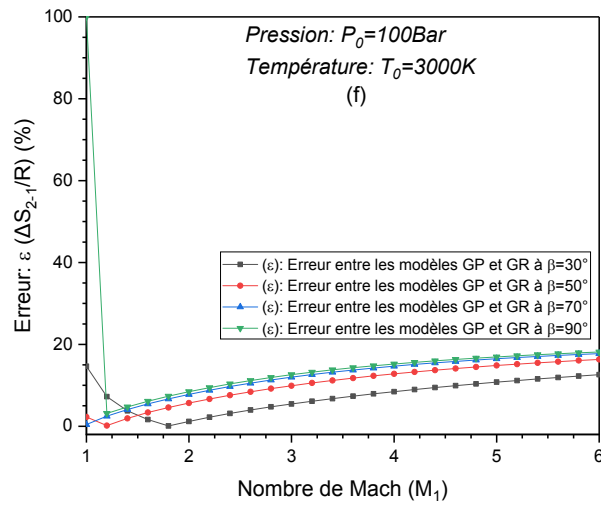
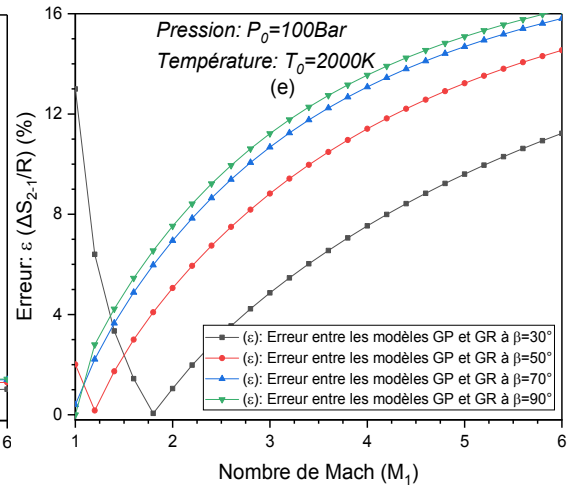
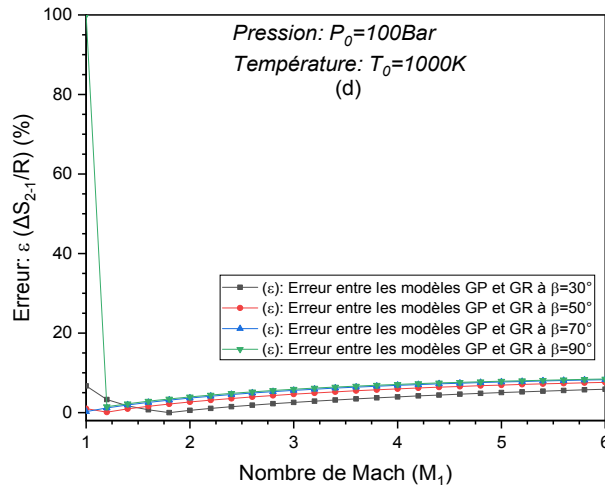
Pour $P_0 = 100 \text{ bar}$, $\varepsilon = 3,9565\%$ pour $\beta = 30^\circ$, $\varepsilon = 5,9787\%$ pour $\beta = 50^\circ$, $\varepsilon = 6,8508\%$ pour $\beta = 70^\circ$ et $\varepsilon = 7,0960\%$ pour $\beta = 90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Pour $P_0 = 500 \text{ bar}$, $\varepsilon = 3,6597\%$ pour $\beta = 30^\circ$, $\varepsilon = 5,52956\%$ pour $\beta = 50^\circ$, $\varepsilon = 6,3357\%$ pour $\beta = 70^\circ$ et $\varepsilon = 6,5625\%$ pour $\beta = 90^\circ$, entre les ondes de choc obliques des deux modèles.

Il est clair que si l'on choisit une erreur, par exemple inférieure à 5%, le modèle *GP* peuvent être utilisé, si l'angle β est inférieur à 30° pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle *GR* dans un intervalle modéré de M_1 , P_0 et T_0 .

On peut noter que, pour de faibles valeurs de M_1 , T_0 et P_0 , l'erreur est faible ; sinon, lorsque la pression P_0 est plus grande, l'erreur diminue progressivement.





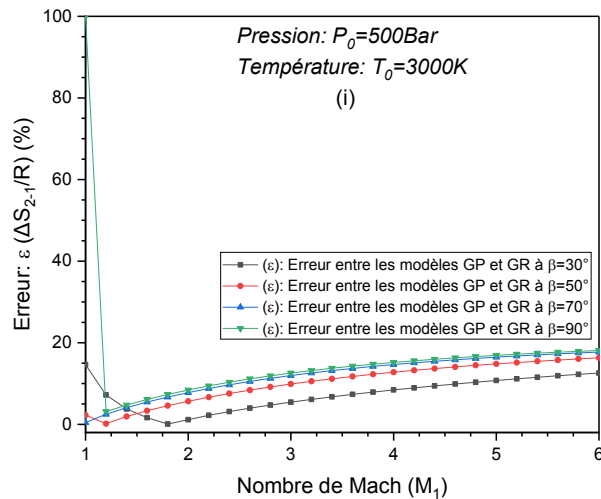


Figure 4.18 : L'évolution de l'erreur relative de l'entropie $\Delta S_{2-1}/R$ en fonction du nombre de Mach en amont M_1 .

4.3.2 Divers résultats

Les tableaux 1 à 9 montrent l'erreur entre le modèle *GP* et le modèle *GR* lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, 2000 K et 3000 K , respectivement, et $M_1 = 4,00$. L'objectif principal est d'évaluer tous les paramètres d'écoulement calculés pour le cas de l'onde de choc oblique pour différentes valeurs de P_0 , T_0 et β . L'effet de T_0 , P_0 et β sur l'écart relatif de tous les paramètres entre les modèles *GP* et *GR* est clairement visible.

L'erreur maximale est trouvée au rapport P_{02}/P_{01} et est égale à 7,96%, 16,26% et 18,72% pour $P_0=1\text{ bar}$ et $\beta=50^\circ$, l'erreur $\varepsilon=14,34\%$, 30,51% et 35,54% pour $P_0=1\text{ bar}$ et pour $\beta=70^\circ$, l'erreur $\varepsilon=7,70\%$, 16,23% et 18,70% pour $P_0=100\text{ bar}$. Si $\beta=50^\circ$, l'erreur $\varepsilon=13,87\%$, 30,44% et 35,52% pour $P_0=100\text{ bar}$ et $\beta=70^\circ$, $\varepsilon=7,07\%$, 16,11% et 18,67% lorsque $P_0=500\text{ bar}$ et $\beta=50^\circ$, $\varepsilon=12,68\%$, 30,20% et 35,44% lorsque $P_0=500\text{ bar}$ et $\beta=70^\circ$, pour $T_0=1000\text{ K}$, 2000 K et $T_0=3000\text{ K}$, respectivement.

Pour le rapport de température T_2/T_1 , à $P_0=1\text{ bar}$ l'erreur peut atteindre une valeur de 8,24%, 16,53% et 18,93%, pour $\beta=50^\circ$, alors que l'erreur est de 9,59%, 19,48% et 22,38%, pour $\beta=70^\circ$. Pour $P_0=100\text{ bar}$ et $\beta=50^\circ$, l'erreur est légèrement du même ordre ($\varepsilon=7,98\%$, 16,50% et 18,92%). Lorsque l'angle β augmente à 70° et que la pression est bien égale à 100 bar , l'erreur augmente simultanément à 9,29%, 19,43% et 22,36%. Pour $P_0=500\text{ bar}$ et $\beta=50^\circ$ l'erreur sera $\varepsilon=7,33\%$, 16,38% et 18,88%, et pour $\beta=70^\circ$, $\varepsilon=8,53\%$, 19,30% et 22,32%, pour $T_0=1000\text{ K}$, 2000 K et $T_0=3000\text{ K}$, respectivement.

Pour l'entropie $\Delta S_{2-1}/R$, l'erreur peut atteindre 6,15%, 11,43% et 12,81%, $T_0=1000$ K, 2000 K et $T_0=3000$ K respectivement pour $P_0=1$ bar et $\beta=50^\circ$, $\varepsilon=7,05\%$, 13,10% et 14,69% pour $P_0=1$ bar et $\beta=70^\circ$, $\varepsilon=5,97\%$, 11,40% et 12,80% pour $P_0=100$ bar et $\beta=70^\circ$, $\varepsilon=5,97\%$, 11,40% et 12,80%, respectivement. 80% pour $P_0=100$ bar et $\beta=50^\circ$, $\varepsilon=6.85\%$, 13.08% et 14.68% pour $P_0=100$ bar et $\beta=70^\circ$, $\varepsilon=5.52\%$, 11.34% et 12.78% lorsque $P_0=500$ bar et $\beta=50^\circ$, $\varepsilon=6.33\%$, 13.00% et 14.65% lorsque $P_0=500$ bar et $\beta=70^\circ$ entre les deux modèles.

Pour le rapport de pression P_2/P_1 , l'erreur est très faible, égale à 1,42%, 2,71% et 3,06% pour $P_0=1$ bar et $\beta=50^\circ$, où $\varepsilon=1,47\%$, 2,80% et 3,17% pour la même pression et $\beta=70^\circ$. Pour $P_0=100$ et $\beta=50^\circ$, $\varepsilon=1,38\%$, 2,70% et 3,06%, il est donc égal à $\varepsilon=1,42\%$, 2,80% et 3,16% pour $P_0=100$ bar et $\beta=70^\circ$. Pour $P_0=500$ bar et $\beta=50^\circ$, l'erreur diminue à $\varepsilon=1,27\%$, 2,69% et 3,05%, et reste dans le même ordre ($\varepsilon=1,31\%$, 2,78% et 3,16%) lorsque $\beta=70^\circ$.

Bien que cette erreur soit faible, elle peut conduire à une non-adaptation de l'entrée d'air, puisque l'épaisseur de l'onde de choc est très faible. Nous notons que l'erreur augmente avec l'augmentation de T_0 et β , ce qui nécessite l'utilisation du modèle *GR* lorsque T_0 augmente pour d'éventuelles corrections. Pour des faibles valeurs de T_0 et β , le modèle *GP* donne de bons résultats. La limite d'utilisation du modèle *GP* dépend de T_0 , M_1 et β . Les erreurs sont présentées pour différentes valeurs de T_0 , P_0 , M_1 et β . Par conséquent, pour tous les paramètres, l'erreur augmente si T_0 ou β augmentent progressivement et, dans le cas contraire, si P_0 augmente, l'erreur diminue.

Table 4.1 : Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle *GP* par rapport au modèle *GR* pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=1000$ °K et $P_0=1$ bar.

Erreur $\varepsilon(\%)$	$\beta=30^\circ$	$\beta=50^\circ$	$\beta=70^\circ$	$\beta=90^\circ$
$\varepsilon (\rho_2/\rho_1)$	3.60	6.30	7.41	7.71
$\varepsilon (P_2/P_1)$	1.21	1.42	1.47	1.48
$\varepsilon (T_2/T_1)$	5.01	8.24	9.59	9.96
$\varepsilon (\rho_{02}/\rho_{01})$	8.13	24.52	33.74	36.47
$\varepsilon (P_{02}/P_{01})$	1.40	7.96	14.34	16.79
$\varepsilon (T_{02}/T_{01})$	2.14	5.63	8.86	10.19
$\varepsilon (M_2)$	2.25	3.37	2.51	3.33
$\varepsilon (\Delta S_{2-1}/R)$	4.07	6.15	7.05	7.30

Table 4.2 : Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle *GP* par rapport au modèle *GR* pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=2000$ °K et $P_0=1\text{bar}$.

Erreur $\varepsilon(\%)$	$\beta=30^\circ$	$\beta=50^\circ$	$\beta=70^\circ$	$\beta=90^\circ$
$\varepsilon(\rho_2/\rho_1)$	6.79	11.86	13.95	14.51
$\varepsilon(P_2/P_1)$	2.31	2.71	2.80	2.83
$\varepsilon(T_2/T_1)$	9.77	16.53	19.48	20.29
$\varepsilon(\rho_{02}/\rho_{01})$	7.05	19.70	26.14	27.94
$\varepsilon(P_{02}/P_{01})$	2.71	16.26	30.51	36.25
$\varepsilon(T_{02}/T_{01})$	3.55	9.54	15.33	17.78
$\varepsilon(M_2)$	4.27	6.47	4.99	6.65
$\varepsilon(\Delta S_{2-1}/R)$	7.54	11.43	13.10	13.57

Table 4.3 : Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle *GP* par rapport au modèle *GR* pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=3000$ °K et $P_0=1$ bar.

Erreur $\varepsilon(\%)$	$\beta=30^\circ$	$\beta=50^\circ$	$\beta=70^\circ$	$\beta=90^\circ$
$\varepsilon(\rho_2/\rho_1)$	7.64	13.34	15.69	16.32
$\varepsilon(P_2/P_1)$	2.61	3.06	3.17	3.19
$\varepsilon(T_2/T_1)$	11.10	18.93	22.38	23.33
$\varepsilon(\rho_{02}/\rho_{01})$	6.46	17.29	22.38	23.72
$\varepsilon(P_{02}/P_{01})$	3.07	18.72	35.54	42.40
$\varepsilon(T_{02}/T_{01})$	3.27	8.73	13.96	16.17
$\varepsilon(M_2)$	4.81	7.31	5.70	7.61
$\varepsilon(\Delta S_{2-1}/R)$	8.45	12.81	14.69	15.21

Table 4.4 : Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle *GP* par rapport au modèle *GR* pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=1000$ °K et $P_0=100$ bar.

Erreur $\varepsilon(\%)$	$\beta=30^\circ$	$\beta=50^\circ$	$\beta=70^\circ$	$\beta=90^\circ$
$\varepsilon(\rho_2/\rho_1)$	3.50	6.11	7.19	7.48
$\varepsilon(P_2/P_1)$	1.18	1.38	1.42	1.44
$\varepsilon(T_2/T_1)$	4.85	7.98	9.29	9.64
$\varepsilon(\rho_{02}/\rho_{01})$	8.13	24.53	33.74	36.47
$\varepsilon(P_{02}/P_{01})$	1.35	7.70	13.87	16.23
$\varepsilon(T_{02}/T_{01})$	2.14	5.63	8.86	10.19
$\varepsilon(M_2)$	2.19	3.27	2.43	3.22
$\varepsilon(\Delta S_{2-1}/R)$	3.95	5.97	6.85	7.09

Table 4.5 : Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle *GP* par rapport au modèle *GR* pour les ondes de choc obliques lorsque $M_1=4,00$, $T_0=2000$ °K et $P_0=100$ bar.

Erreur $\varepsilon(\%)$	$\beta=30^\circ$	$\beta=50^\circ$	$\beta=70^\circ$	$\beta=90^\circ$
$\varepsilon(\rho_2/\rho_1)$	6.78	11.84	13.92	14.48
$\varepsilon(P_2/P_1)$	2.31	2.70	2.80	2.82
$\varepsilon(T_2/T_1)$	9.75	16.50	19.43	20.24
$\varepsilon(\rho_{02}/\rho_{01})$	7.05	19.70	26.14	27.94
$\varepsilon(P_{02}/P_{01})$	2.70	16.23	30.44	36.16
$\varepsilon(T_{02}/T_{01})$	3.55	9.54	15.33	17.78
$\varepsilon(M_2)$	4.26	6.45	4.98	6.64
$\varepsilon(\Delta S_{2-1}/R)$	7.53	11.40	13.08	13.55

Table 4.6 : Erreur (ε %) du modèle *GP* par rapport au modèle *GR* pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=3000$ °K et $P_0=100$ bar.

Erreur $\varepsilon(\%)$	$\beta=30^\circ$	$\beta=50^\circ$	$\beta=70^\circ$	$\beta=90^\circ$
$\varepsilon(\rho_2/\rho_1)$	7.63	13.33	15.68	16.32
$\varepsilon(P_2/P_1)$	2.61	3.06	3.16	3.19
$\varepsilon(T_2/T_1)$	11.10	18.92	22.36	23.32
$\varepsilon(\rho_{02}/\rho_{01})$	6.46	17.29	22.38	23.72
$\varepsilon(P_{02}/P_{01})$	3.07	18.70	35.52	42.38
$\varepsilon(T_{02}/T_{01})$	3.27	8.73	13.96	16.17
$\varepsilon(M_2)$	4.81	7.30	5.70	7.61
$\varepsilon(\Delta S_{2-1}/R)$	8.45	12.80	14.68	15.21

Table 4.7 : Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle *GP* par rapport au modèle *GR* pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=1000$ °K et $P_0=500$ bar.

Erreur $\varepsilon(\%)$	$\beta=30^\circ$	$\beta=50^\circ$	$\beta=70^\circ$	$\beta=90^\circ$
$\varepsilon(\rho_2/\rho_1)$	3.23	5.65	6.64	6.91
$\varepsilon(P_2/P_1)$	1.09	1.27	1.31	1.32
$\varepsilon(T_2/T_1)$	4.47	7.33	8.53	8.85
$\varepsilon(\rho_{02}/\rho_{01})$	8.13	24.53	33.75	36.48
$\varepsilon(P_{02}/P_{01})$	1.25	7.07	12.68	14.83
$\varepsilon(T_{02}/T_{01})$	2.13	5.62	8.85	10.18
$\varepsilon(M_2)$	2.02	3.02	2.23	2.96
$\varepsilon(\Delta S_{2-1}/R)$	3.65	5.52	6.33	6.56

Table 4.8 : Erreur $\varepsilon(\%)$ du modèle *GP* par rapport au modèle *GR* pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=2000$ °K et $P_0=500$ bar.

Erreur $\varepsilon(\%)$	$\beta=30^\circ$	$\beta=50^\circ$	$\beta=70^\circ$	$\beta=90^\circ$
$\varepsilon(\rho_2/\rho_1)$	6.74	11.76	13.84	14.40
$\varepsilon(P_2/P_1)$	2.29	2.69	2.78	2.80
$\varepsilon(T_2/T_1)$	9.69	16.38	19.30	20.10
$\varepsilon(\rho_{02}/\rho_{01})$	7.05	19.70	26.14	27.95
$\varepsilon(P_{02}/P_{01})$	2.69	16.11	30.20	35.87
$\varepsilon(T_{02}/T_{01})$	3.55	9.54	15.33	17.78
$\varepsilon(M_2)$	4.23	6.41	4.95	6.59
$\varepsilon(\Delta S_{2-1}/R)$	7.49	11.34	13.00	13.47

Table 4.9 : Erreur du modèle *GP* par rapport au modèle *GR* pour les ondes de choc obliques pour ; $M_1=4.00$, $T_0=3000$ °K et $P_0=500$ bar.

Erreur $\varepsilon(\%)$	$\beta=30^\circ$	$\beta=50^\circ$	$\beta=70^\circ$	$\beta=90^\circ$
$\varepsilon(\rho_2/\rho_1)$	7.62	13.31	15.66	16.29
$\varepsilon(P_2/P_1)$	2.60	3.05	3.16	3.18
$\varepsilon(T_2/T_1)$	11.07	18.88	22.32	23.27
$\varepsilon(\rho_{02}/\rho_{01})$	6.46	17.29	22.38	23.72
$\varepsilon(P_{02}/P_{01})$	3.06	18.67	35.44	42.28
$\varepsilon(T_{02}/T_{01})$	3.27	8.73	13.96	16.17
$\varepsilon(M_2)$	4.80	7.29	5.69	7.59
$\varepsilon(\Delta S_{2-1}/R)$	8.43	12.78	14.65	15.18

CONCLUSION

La compréhension des effets de la pression de stagnation sur les ondes de choc obliques dans les gaz réels est cruciale pour la conception et l'optimisation des systèmes aérospatiaux, en particulier dans les applications de vol et de propulsion à grande vitesse. Cette étude a ciblé les écarts du comportement des gaz réels par rapport aux gaz idéaux dans les gaz réels et l'impact de la pression de stagnation sur les caractéristiques des ondes de choc obliques.

Grâce à une combinaison d'analyse théorique et de simulations numérique, nous avons pu arriver à des constatations et des conclusions importantes concernant la réaction des ondes de choc obliques dans les gaz réels, avec des applications spécifiques à l'air. Ces résultats ont des implications importantes pour la conception des véhicules supersoniques et hypersoniques, pour lesquels une prédiction précise du comportement des ondes de choc est essentielle pour garantir leurs performances, leur sécurité et leur efficacité.

Les recherches futures dans ce domaine pourraient se concentrer sur le développement de modèles de gaz réels plus précis et de techniques expérimentales afin d'explorer, les effets de la pression de stagnation sur les ondes de choc dans d'autres gaz et d'autres mélanges. En continuant à progresser dans la compréhension de ces phénomènes, nous pouvons améliorer la conception et l'optimisation des systèmes aérospatiaux pour les vols à grande vitesse et, en fin de compte, repousser les limites de ce qui est possible dans l'ingénierie aérospatiale.

Dans cette étude, nous avons suivi une nouvelle approche, qui consiste à reformuler toutes les équations connues des ondes de choc obliques dans le cas d'un gaz parfait à un gaz réel. Afin de voir le comportement de ce dernier et de proposer par la suite un nouveau modèle mathématique dépendant de certaines conditions locales d'écoulement. Ces résultats ne sont disponibles que pour le cas d'un gaz parfait avec des chaleurs spécifiques C_P constantes et un rapport γ constant. En particulier, nous avons mis en évidence le modèle GR proposé et l'avons comparé au modèle GP , appelé modèle classique. À cette fin, plusieurs conclusions ont été tirées de cette étude, qui est mentionnée ci-dessous :

1. Le travail effectué permet de valider numériquement le modèle *GR* comparé au modèle *GP*, déjà validé expérimentalement.
2. Si l'erreur est inférieure à 5%, ce qui est généralement accepté pour les applications aérodynamiques, on étudier une onde de choc oblique en utilisant les équations d'un gaz parfait. Ceci est applicable lorsque T_0 est inférieur à 1000 K pour toute valeur de nombre de Mach en amont, ou lorsque le nombre de Mach est inférieur à 2.
3. L'introduction du modèle du gaz réel nécessite la résolution d'un système d'équations algébriques non linéaires avec la dérivation ou l'intégration de fonctions analytiques complexes, ce qui nécessite une programmation numérique et un traitement des données avec un temps de calcul important. Contrairement au modèle du gaz parfait, celui-ci est représenté par une équation explicite et simple et ne nécessite pas de temps de calcul important.
4. Les équations du modèle du gaz parfait peuvent être obtenues en partant du gaz réel, et en annulant la force intermoléculaire, la taille moléculaire, et la constante d'énergie vibratoire moléculaire. Dans ce cas, le modèle du gaz parfait devient un cas particulier du modèle du gaz réel.
5. À basse pression, température, angle de choc β et nombre de Mach, les différences de résultats entre les deux modèles de gaz peuvent être négligées. Il est donc conseillé d'étudier l'écoulement du modèle de gaz réel en utilisant les équations du modèle de gaz parfait. Cependant, lorsque T_0 , l'angle de choc β et M_1 augmentent, le comportement du gaz idéal diverge de celui du gaz réel, et il est donc nécessaire d'utiliser le modèle du gaz réel.
6. Le programme numérique développé peut traiter tout gaz couramment rencontré en conditions naturelles. Dans ce cas, il faut ajouter la variation de la capacité thermique CP et la constante R du gaz dans les calculs pour le modèle *GR*.
7. La convergence des résultats nécessite un temps de calcul supplémentaire pour le modèle *GR* par rapport au modèle *GP* pour la même précision,

En perspective, nous pouvons étudier notre problème par l'utilisation de la CFD alors il est nécessaire de développer le modèle CFD en utilisant le modèle *GR* avant de faire des tests numériques ou même réaliser des tests expérimentaux sur les écoulements supersoniques. Notre étude est établie pour l'air, mais elle pourrait être généralisée pour d'autres fluides, à cet effet, les équations resteraient valables.

Cependant, il faudrait également déterminer la force intermoléculaire, la taille moléculaire et la constante d'énergie moléculaire vibratoire.

APPENDICE

Liste des Symboles et Abréviations

Notation

M : Nombre de Mach

P : Pression

R : Constante universelle des gaz parfait

S : Entropie

T : Température

V : Vitesse

C_P : Chaleur spécifique à pression constante

C_V : Chaleur spécifique à volume constant

C_T : Constante liée à la température dans l'équation d'état

S_V : Célérité du son

γ : Rapport de chaleur spécifique

ρ : Densité de l'air

$E^{(T)}$: Première fonction de l'équation de l'énergie

$E^{(p)}$: Deuxième fonction de l'équation énergétique

$S^{(T)}$: Première fonction de l'équation de l'entropie

$S^{(p)}$: Deuxième fonction pour l'équation de l'entropie

β : Angle de choc

θ : Angle de déviation

ΔS : Saut d'entropie

a : Constante des forces intermoléculaires

b : Constante de la taille moléculaire

Abréviations

GP : Gaz parfait

GR : Gaz réel

CFD : Computational Fluid Dynamics (Dynamique numérique des fluides)

OSW : Onde de choc oblique

NSW : Onde de choc normale

Indices

0 : Condition de stagnation.

1 : Paramètre juste avant l'onde de choc.

2 : Paramètre juste après l'onde de choc.

RÉFÉRENCES

1. Anderson, J. D. Jr. "Fundamentals of Aerodynamics," 2nd Edition., McGrawHill Book Company, New York, USA, (1988).
2. Anderson, J. D. Jr. "Hypersonic and high temperature gas dynamics," McGraw-Hill Book Company, New York, (1989).
3. Anderson, J. D. Jr. "Modern Compressible Flow With Historical Perspective," 2nd edition, McGraw-Hill Book Company, New York, USA, (1982).
4. Belotserkovskiy, O. M. "Supersonic Gas Flow Around Blunt Bodies Theoretical and Experimental Investigations," NASA TT F-453, (1967).
5. Bendor, G. "Shock Wave Reflection Phenomena," Second Edition, SpringerVerlag Berlin Heidelberg, PP. 15-17, (2007).
6. Briggs, B. R. "The Numerical Calculation of Flow Past Conical Bodies Supporting Elliptic Conical Shock Waves at Finite Angles of Incidence," NASA TN D-340, (1960).
7. Chen, S. X. and Li D. N. "Supersonic flow past a symmetrically curved cone," Indiana University Mathematical Journal, Vol. 49, PP. 1411 -1435, (2000).
8. Chiang, C. W. and Wagner, R. D. Jr. " Analysis of Supersonic Conical Flows," NASA TN D-5884, (1970).
9. Comolet, R. "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux, " Tome 1, 3ème Edition, Masson, (1979).
10. Démidovitch, B. and Maron, I. "Eléments de calcul numérique, " Editions MIR, Moscow, Russia, (1987).
11. Eastman, E. W., and Omar, M. E. "Flow Fields About Highly Yawed Cones by the Inverse Method, " AIAA Journal, Vol. 3, N° 9, PP. 1782-1784, (1965).
12. Emanuel, G. "Gasdynamic: Theory and Application " AIAA Educational Series, New York, (1986).
13. Ferri, A. "Supersonic Flow Around Circular Cones at Angles of Attack, "NACA Rep. 1045, (Supersedes NACA TN 2236.), (1951).
14. Fletcher, C. A. J. "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories, " Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1988).
15. Goldsmith, E. L. and Seddon, J. "Intake Aerodynamics, "Blackwell Science, Second Edition, (1999).

16. Gonidou, R. "Supersonic Flows Around Cones at Incidence, "NASA TT F-11,473, (1968).
17. Hord, R. A. "An Approximate Solution for Axially Symmetric Flow Over a Cone With an Attached Shock Wave, "NACA TN 3485, (1955).
18. Iserles, A. "A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations," Cambridge University Press, (1996).
19. Jones, D. J. "Numerical Solution of the flow field for conical bodies in a supersonic stream," National Research Council of Canada, Aeronautical Report, LR-507, Ottawa, (1968).
20. Jones, D. J. "Tables of Inviscid Supersonic Flow About Circular Cones at Incidence $\gamma = 1.4$," AGARDograph 137, Pts. I and II, Nov. (1969).
21. Kenneth, E. T. "Computation of thermally perfect properties of oblique shock waves, "NASA CR-4749, (1996).
22. Kenneth, E. T. "Computation of thermally perfect oblique shock waves properties, "AIAA-97-0868, 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Aerospace Sciences Meetings, 06-09 January (1997).
23. Klunker, E. B., South, J. C. Jr. and Ruby, M. D. "Calculation of nonlinear conical flows by the method of lines, "NASA TR R-374, (1971).
24. Kopal, Z. "Tables of Supersonic Flow Around Cones, "Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering Tech. Report No. 1, Cambridge, Mass., (1947).
25. Kopal, Z. "Tables of Supersonic Flow Around Cones of Large Yaw, "Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering, Tech. Report No. 5, Cambridge, Mass., (1949).
26. Maccoll, J. W. "The conical shock wave formed by a cone moving at high speed, " Proceedings of the Royal Society of London A, N° 159, PP. 459-472, (1937).
27. Maslen, S. H. "Supersonic Conical Flow, "NACA TN 2651, (1952).
28. McBride, B. J., Gordon, S., and Reno, M. A. "Coefficients for Calculating Thermodynamic and Transport Properties of Individual Species, "NASA TM 4513, (1993).
29. McBride B. J., Gordon S. and Reno M. A. "Thermodynamic Data for Fifty Reference Elements, "NASA TP-3287, January (1993).
30. Merzbach, U. C. and Boyer, C. B. "A history of mathematics " John Wiley and sons., 3rd edition, (2011).

31. Mouris, K. "Mathematical thought from ancient to modern times, "Vol. 1, Oxford university press, (1972).
32. Newton, L. G., and Randall, M. "Thermodynamics, "2nd Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, (1961).
33. Oosthuisen, P. H., and Carscallen, W. E. "Compressible Fluid Flow, "Mc Graw Hill, New York, (1997).
34. Parker, V. B., Wagman, D. D., and Evans, W. H. "Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties, "NBS TN 270-6, (1971).
35. Peterson, C. R., and Hill, P. G. "Mechanics and Thermodynamics of Propulsion, "Addition-Wesley Publishing Company Inc., New York, USA, (1965).
36. Raltson, A., and Rabinowitz, A. "A First Course in Numerical Analysis, "McGraw Hill Book Company, (1985).
37. Stoer, J., and Burlisch, B. "Introduction to Numerical Analysis, "text in Applied Mathematics, 12, Springer, 3rd Edition (2002).
38. Sutton, G. P., and Biblarz, O. "Rocket Propulsion Elements," 8ème édition, John Wiley and Sons., (2010).
39. Taibi, H. "Ecoulement supersonique à haute température autour d'un dièdre, "[dissertation] Mémoire de Magister, Department of Aeronautics, Faculty of Technology, University of Blida 1, January (2011).
40. Thompson, A. P. "Compressible Fluid Dynamics," McGraw-Hill Company, (1995).
41. Van Wylen, G. J. "Fundamentals of classical thermodynamics," John Wiley and Sons, Inc, (1973).
42. Yahya, S. M. "Gas tables for compressible flow calculation, " Fifth edition, New Age International Publishers, New Delhi, (2006).
43. Zucro, M. J., and Hoffman, J. D. "Gas Dynamics, "Vol. 1 and 2, Wiley, New York, (1976).
44. Zebbiche T., and Boun-jad, M. "Numerical quadrature for the Prandtl-Meyer function at high temperature with application for air, "Thermophysics and Aeromechanics, Vol. 19, No. 3, PP. 381 -384, (2012).
45. Zebbiche, T., and Youbi, Z. "Effect of stagnation temperature on the supersonic flow parameters with application for air in nozzles, "The Aeronautical Journal, Vol. 111, N° 1115, PP. 31 -40, (2007).

46. Zebbiche, T., and Youbi, Z. "Supersonic Flow Parameters at High Temperature. Application for Air in nozzles, "German Aerospace Congress, DGLR-2005-0256, 26-29 Sep. 2005, Friedrichshafen, Germany. (2005).
47. Zebbiche, T. "Effect of Stagnation Temperature on the Normal Shock Wave, "International Journal of Aeronautical and Mpace Sciences, Vol. 10, N° 01, PP. 1 -14, (2009).
48. Zebbiche, T. "Stagnation temperature effect on the Prandtl Meyer function, "AIAA Journal. Vol. 45, N° 4, PP. 952–954, (2007).
49. Zebbiche, T. "New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at high Temperature, "AIAA-2006-3674, 25th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, California, 5-8 ,(2006).
50. Zebbiche, T. "Prandtl Meyer Function at High Temperature. Application for Air, "Proceeding of the 4th Meeting of the Saudi Physical Society, 11 -12 November 2008, King Abdulaziz City for Sciences and Technology, Riyadh, Saudi Arabia, (2008).
51. Tsien, H. S. "One-Dimensional Flow of a Gas Characterized by Van Der Waal's Equation of State,". Jour. of Math. And Phy., vol. XSV, no. 6, pp. 301-324. (Jan. 1947),
52. Annamalai, K., Ishwar, K. P., and Milind, A. J. "Advanced Thermodynamics engineering," 2nd edition, CRC press, Taylor and Francis Group, USA, (2011).
53. Picard, Ch. "Thermochimie," 2ème Edition, Bruxelles, Belgium (1996).
54. Shapiro, A. H. "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow," Vol. 1, The Ronald Press Company, New York, (1953).
55. Singh, O. "Applied Thermodynamics," new age international limited publishers, New Delhi, India, (2003).
56. Zucker, R. D., and Bilbarz, O. "Fundamentals of Gas Dynamics," John Wiley and Sons, New Jersey, USA. (2002),
57. Van Wylen, J.J., and Sonntag, R.E. "Fundamentals of classical thermodynamics," 2ème edition, John Willey and sons, Inc. (1976),
58. Nag, P. K. "Engineering Thermodynamics. "4th Edition, McGraw-Hill, New Delhi, INDIA, (2008).
59. Demidovitch, B., and Maron, I. "Eléments de calcul numérique," Edition MIR, Moscou, Russia. (1987).

60. Rhyning, I. L. "Dynamique des fluides," Press polytechnique Romandes, Lausanne, Suisse. (1984).
61. Zebbiche, T., and Youbi, Z. "Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," AIAA-4599, 42st, (2006)
62. Zebbiche, T. "Tuyères Supersoniques à Haute Température," Edition Universitaires Européennes, ISBN 978-613-1-50997-1, (May 2010).
63. Berger, M. "Géométrie : Convexes et Polyèdres réguliers, aires et Volumes," Tome 3, Fernand Nathan, Paris, (1978).
64. Sod, G. A. "Numerical Methods in Fluid Dynamics," Cambridge University Press, (1985), Cambridge.
65. Birkhoff, G. "Interpolation to Boundary Data in Triangles," J. of Math. Anal. And Appl., Vol. 42, (1973), 474-484.
66. Zebbiche, T., and Youbi, Z. "Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," Chinese Journal of Aeronautics, Vol. 20, n° 01, (2007), 29-39.
67. Press, W. H., et al. "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing," Cambridge University Press, UK, (1986).
68. Raviart, P. A., and Thomas, J. M. "Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles," Masson, (1983).
69. Salhi, M., and Roudane, M. "Numerical investigation of the thermal caloric imperfections on entropy enhancement across normal shock waves. " High Temperatures High Pressures. 48, (4), (2019).
70. Salhi, M., Zebbiche, T., and Mehalem, A. "Stagnation pressure effect on the supersonic flow parameters with application for air in nozzles. "The Aeronautical Journal., 120, (1224), (2016).
71. Rodio, M, G., Congedo, P.M., and Abgrall, R. "Two phase flow numerical simulation with real gas effects and occurrence of rarefaction shock waves. "European Journal of Mechanics B/Fluids. (45), (2014).
72. Gupta, N., and Sharma, V. D. "Dissipative waves in real gases. "International Journal of Non-Linear Mechanics. (95), (2017).
73. Navarro, C.I. "Quasi One Dimensional Flow through a Nozzle with a Shock. "University of California, Irvine, (2019).

74. Ali, Amir Hussein. "Numerical Study of Oblique Shock Wave. "Basrah Journal of Science., 41(01), (2023).
75. Malina, F. J. "Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect gases, "J. Franklin Inst., Vol. 230, PP. 433-450, (1940).
76. NEVILLE, R. G. "The Discovery of Boyle's Law," J. Chem. Educ., 39-356 (1962).
77. Ortega, J., and Rheinboldt, W. "Iterative Solution of Nonhinear Equations in Several Variables", New York, Academic Press, (1970).
78. Powell, M. J. D. "On the Maximum Error of Polynomial Approximation Defined by Interpolation and by Least Squares Criteria, "Comput. J., Vol. 9,404-407, (1978).
79. Ralston, A., and Rabinowitz, P. "A First Course in Numerical Analysis, "McGraw-Hill Book Company, (1985).
80. Raltson, A. "A Family of Quadrature Formulas Which Achieve High Accuracy in Composite Rules," J. Ass. Comput. Mach, Vol. 8, PP. 384-394, (1984).
81. Rao, G.V.R. "Exhaust Nozzle Contour for Optimum Thrust," Marquadt Aircraft Co. Presented atthe ARC Semi Annual Meeting, San Fransisco, (June 10-13 1957).
82. Rizkalla, O. "Inviscid Design and Analysis of Square Supersonic Nozzles GASLTL 304, ", (December 1988).
83. Geoing, M. "La conception de la buse par l'optimisation de la méthode de caractéristiques," AIAA-1 990 2024, 26111 AIAA/ASME/SAE/ASEE propulsion mixte, conférence (du 16 au 18 juillet 1990), Orlando, Floride.
84. Sims, J. L. "Tables for Supersonic Flow Around Right Circular Cones at Zero Angle of Attack", NASA SP-3004, 1964.
85. Eggers, A. J. "One-dimensional flows of an imperfect diatomic gas" (Vol. 959). National Advisory Committee for Aeronautics, (1949).
86. Kouremenos, D. A., and Antonopoulos, K. A. "Real gas normal shock waves with the redlich-kwong equation of state". Acta mechanica, 76(3), 223-233. (1989).
87. Kakatsios, X. K., and Houzouris, G. E. "Analytical study and empirical relations for the oblique and normal shock-waves in real air". Energy conversion and management, 39(5-6), 421-436, (1998).

88. Tarnavskii, G. A. "Influence of Flow Angularities in a Hypersonic Ramjet Diffuser on the Formation of the Shock-Wave Structure of the Real Gas Flow". *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 77(3), 651-662. (2004),
89. Soltani, M. R., Daliri, A., and Sepahi Younis, J. "Effects of shock wave/boundary-layer interaction on performance and stability of a mixed-compression inlet". *Scientia Iranica*, 23(4), 1811-1825. (2016).
90. Boun-jad, M., and Zebbiche, T. "High temperature gas effect on the normal shock wave parameters". *Int. J. Mech. Prod. Eng*, 5, 78-85. (2017).
91. D'Angelo, S., Vimercati, D., and Guardone, A. "A unified description of oblique waves in ideal and non-ideal steady supersonic flows around compressive and rarefactive corners". *Acta Mechanica*, 229(6), 2585-2595. (2018).
92. Elaichi, T., and Zebbiche, T. "Stagnation temperature effect on the conical shock with application for air". *Chinese Journal of Aeronautics*, 31(4), 672-697. (2018).
93. Takhnouni, R., Yahiaoui, T., and Allali, A. "Stagnation temperature effect on the supersonic flow around pointed airfoils with application for air". *Mechanics and Industry*, 19(3), 312. (2018).
94. Vimercati, D., Gori, G., and Guardone, A. "Non-ideal oblique shock waves". *Journal of Fluid Mechanics*, 847, 266-285. (2018).
95. Patel, A., and Singh, M. "Exact solution of shock wave structure in a non-ideal gas under constant and variable coefficient of viscosity and heat conductivity". *Shock Waves*, 29, 427-439. (2019).
96. Wu, K., and Dong Kim, H. "Numerical study on the shock vector control in a rectangular supersonic nozzle". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 233(13), 4943-4965. (2019).
97. Zebbiche, T. "Stagnation pressure effect on the supersonic minimum length nozzle design". *The Aeronautical Journal*, 123(1265), 1013-1031. (2019).
98. Huang, Z., and Wang, H. Linear interaction of two-dimensional free-stream disturbances with an oblique shock wave. *Journal of Fluid Mechanics*, 873, 1179-1205. (2019).
99. Kraiko, A. N., et al. "Internal shocks in supersonic flows past the contours of optimal bodies and nozzles". *Fluid Dynamics*, 55, 840-857. (2020).

100. Arefyev, K. Yu., et al. "Experimental research of gasdynamic liquid drops breakup in the supersonic flow with an oblique shock wave". *High Temperature*, 58, 884-892. (2020).
101. Yahiaoui, T., et al. "Gas effect for oblique and conical shock waves at high temperature". *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 15, 73. (2020).
102. Miaomiao, W. A. N. G., and Ziniu, W. U. "Reflection of a moving shock wave over an oblique shock wave". *Chinese Journal of Aeronautics*, 34(5), 399-403. (2021).
103. Zuo, J., et al. "Effects of shock waves interaction on hydrocarbon fueled supersonic film cooling with combustion". *Aerospace Science and Technology*, 113, 106693. (2021).
104. Xiang, G., et al. "Oblique detonation waves induced by two symmetrical wedges in hydrogen-air mixtures". *Fuel*, 295, 120615. (2021).
105. Chernyshov, M.V., et al. "Stationary Mach Configurations with Pulsed Energy Release on the Normal Shock. *Fluids*", 6(12), 439. (2021).
106. Bulat, P., et al. "Refraction of Oblique Shock Wave on a Tangential Discontinuity". *Fluids* 2021, 6, 301. (2021).
107. Von Sohsten, V.L., Pichorin, G.A., and Batista de Araujo, P.P. "COB-1661 Oblique Shock Wave For Air At High Temperature". (2021).
108. Li, Yiqiao., et al. "The effect of different pressure conditions on shock waves in a supersonic steam ejector". *Energies*, 15(8), 2903. (2022).