

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA 1

**Faculté de technologie
Département de mécanique**

THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCE

**Filière : Génie mécanique
Spécialité : Génie mécanique**

**Effet de la température génératrice sur l'écoulement
supersonique autour d'un profil d'aile pointu**

Par

Rahima TAKHNOUNI

Devant le jury composé de :

Roudane Mohamed	Prof	Université de Blida 1	Président
Hamaidia Walid	MCA	E.S.T.A Dar El Beida,Alger	Examineur
Azzouzi Djelloul	Prof	Université Khemis-Miliana	Examineur
Zaaraoui Abdelkader	Prof	Université Khemis-Miliana	Examineur
Ali Benyahia Brahim	MCA	Université de Blida 1	Examineur
Yahiaoui Toufik	Prof	Université de Blida 1	Rapporteur

Blida, 29 Mai 2025

RESUME

Le but de ce travail consiste à développer un nouveau programme de calcul numérique permettant de déterminer l'effet de la température génératrice ainsi que l'effet du gaz générateur sur le calcul de l'écoulement supersonique autour d'un profil d'aile pointu, en utilisant les équations régissant le choc oblique, et la détente de Prandtl Meyer, appliquées au modèle d'un gaz à haute température, calorifiquement imparfait et thermiquement parfait, inférieure au seuil de dissociation des molécules. La chaleur spécifique à pression constante ne reste plus constante et devient variable avec la température. Le nouveau modèle permettant de faire des corrections au modèle de gaz parfait conçu pour faible température génératrice, faible nombre de Mach, faible angle incidence et faible épaisseur de profil. La température génératrice est un paramètre important dans notre modèle. Le profil d'aile doit être pointu au bord d'attaque, pour permettre de voir une solution de choc attaché, de plus il est discrétisé en plusieurs panneaux sur l'extrados et l'intrados, placés l'un adjacent à l'autre. La distribution de l'écoulement sur le panneau considéré donne une compression ou une détente selon la déviation de l'écoulement par rapport au panneau précédant. L'application est faite pour l'air et 6 autres gaz qui sont H_2 , O_2 , N_2 , CO , CO_2 et $H_2O_{(Vapeur)}$. Le programme détermine toutes les caractéristiques dynamiques de l'écoulement et en particulier les coefficients aérodynamiques et les coefficients dynamiques de gaz. La précision de calcul dépend du nombre de panneaux considérés sur le profil d'aile. L'application est faite pour des valeurs élevées de température génératrice allant de 500K à 3500K, de nombre de Mach de 1.5 à 5 et de l'épaisseur de profil. Une comparaison entre le modèle développé et le modèle d'un gaz parfait est présenté, afin de déterminer une limite d'application de ce dernier.

Mots clé: écoulement supersonique , profil pointu, onde de choc oblique, haute température, coefficients aérodynamique, coefficients dynamiques de gaz, gaz générateur, fonction de Prandtl Meyer , gaz calorifiquement imparfait, gaz thermiquement parfait, Chaleur spécifique à pression constante, erreur de calcul

Abstract

The aim of this work is to develop a new numerical calculation program to determine the effect of the stagnation temperature as well as the effect of the generating gas on the calculation of the supersonic flow around a pointed airfoils using the equations for oblic shock wave and the Prandtl Meyer expansion, under the model at high temperature, calorically imperfect and thermally perfect gas, lower than the dissociation threshold of the molecules. The specific heat at constant pressure does not remain constant and varies with the temperature. The new model allows making corrections to the perfect gas model designed for low stagnation temperature, low Mach number, low incidence angle and low airfoil thickness. The stagnation temperature is an important parameter in our model. The airfoil should be pointed at the leading edge to allow an attached shock solution to be seen. The airfoil is discretized into several panels on the extrados and the intrados, placed one adjacent to the other. The distribution of the flow on the panel in question gives a compression or an expansion according to the deviation of the flow with respect to the old adjacent panel. The application is made for air and 6 other gases which are H_2 , O_2 , N_2 , CO , CO_2 , and $H_2O_{(steam)}$. The program determines all the dynamic characteristics of the flow and in particular the aerodynamic coefficients and the gas dynamic coefficients. The calculation accuracy depends on the number of panels considered on the airfoil. The application is made for high values of stagnation temperature from 500K to 3500K, Mach number from 1.5 to 5 and airfoil thickness. A comparison between our high temperature model and the perfect gas model is presented, in order to determine an application limit of the latter.

keywords : supersonic flow, pointed airfoil, oblique shock, high temperature, aerodynamic coefficients, gas dynamic coefficients, gas generator, Prandtl Meyer function, calorically imperfect gas, thermally perfect gas, specific heat at constant pressure, error of computation

ملخص

يهدف هذا العمل إلى تطوير برنامج حسابي رقمي لتحليل الجريان فوق صوتي حول مقطع جناح حاد، مع أخذ تأثير درجة الحرارة المولدة ونوع الغاز المولد بعين الاعتبار. تعتمد هذه المقاربة على معادلات الصدمة المائلة وتمدد برانتل-ماير، وذلك في إطار نموذج غاز عند درجات حرارة عالية، يكون حرارياً مثالياً ولكنه غير مثالي من الناحية الحرارية، دون تجاوز عتبة تفكك الجزيئات.

على عكس فرضية الغاز المثالي، حيث تعتبر الحرارة النوعية عند ضغط ثابت ثابتة، يأخذ نموذجنا في الاعتبار تغيرها مع درجة الحرارة. هذه التصحيحات ضرورية في الحالات التي تصبح فيها فرضيات الغاز المثالي محدودة، لا سيما عند درجات حرارة مولدة مرتفعة، وأعداد ماخ كبيرة، وزوايا هجوم ملحوظة، ومقاطع جناح ذات سماكة أكبر.

يتم تقسيم مقطع الجناح إلى عدة لوحات على السطحين العلوي والسفلي، مما يسمح بتحليل محلي لديناميكية الجريان، حيث يتم تحديد مناطق الانضغاط والتمدد وفقاً لانحراف الجريان من لوحة إلى أخرى. تم تطبيق البرنامج على الهواء وستة غازات أخرى H_2 ، O_2 ، N_2 ، CO ، CO_2 ، H_2O غاز ويقدم جميع الخصائص الديناميكية للجريان، لا سيما معاملات الديناميكا الهوائية والمعاملات الديناميكية للغازات.

تعتمد دقة النتائج على عدد اللوحات المستخدمة في تقسيم مقطع الجناح. وقد تم إجراء الدراسة لحالات تكون فيها درجة الحرارة المولدة، وعدد ماخ، وسماكة المقطع مرتفعة. وأخيراً، تتم مقارنة نموذجنا بنموذج الغاز المثالي لتحديد حدود صلاحية الأخير.

REMERCIEMENTS

L'aboutissement de cette thèse est le fruit de plusieurs années de travail, d'échanges et de soutien, et il ne saurait être complet sans exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à cette aventure.

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance à mon directeur de thèse, Pr Yahiaoui Toufik pour sa patience, ses conseils avisés et son encadrement bienveillant. Son expertise et son exigence scientifique ont été une source d'enrichissement et de motivation tout au long de cette recherche.

Je remercie également les membres du jury, Pr Roudane Mohamed, Dr Hamaidia Walid, Pr Azzouzi Djelloul, Pr Zaaraoui Abdelkader et Dr Ali Benyahia Brahim pour avoir accepté d'évaluer mon travail et pour leurs remarques pertinentes qui contribueront, sans aucun doute, à son amélioration.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Pr Sellam Mohamed pour m'avoir chaleureusement accueilli au sein de laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry (LMEE). Son hospitalité, sa bienveillance et son accompagnement tout au long de mon séjour ont été d'une grande valeur pour moi.

Je souhaite aussi exprimer ma gratitude envers ma famille, et en particulier mes parents, mon conjoint, mes enfants, mon frère et mes sœurs, pour leur amour, leur patience et leurs encouragements inconditionnels. Vos mots de soutien et votre présence ont été une véritable source de force et de persévérance.

Enfin, à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à cette aventure, par un conseil, un soutien ou un simple sourire, merci du fond du cœur.

TABLE DES MATIERES

RESUME	i
REMERCIEMENTS	iv
TABLE DES MATIERES	v
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	xiv
LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS	xvi
INTRODUCTION	1
 CHAPITRE1: RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE ET ETAT DE L'ART	
1.1. Introduction	5
1.2. Etat de l'art	7
1.3. Position du problème	10
 CHAPITRE 2: PARAMETRES THERMODYNAMIQUE A HAUTE TEMPERATURE	
2.1. Introduction	14
2.2. Variation du nombre de mach avec la température	14
2.3. Variation de la masse volumique avec la température	16
2.4. Variation de la pression avec la température	17
2.5. Détermination de la chaleur spécifique de l'air en fonction de la température	17
2.6. Détermination de la chaleur spécifique des différents types de gaz en fonction de la température	20
2.7. Calcul numérique des paramètres thermodynamiques	21
2.8. Modèle du gaz parfait	23
 CHAPITRE 3: ONDE DE CHOC ET ONDE DE DETENTE	
3.1. Introduction	24
3.2. Ondes dans un écoulement supersonique	25
3.3. Onde de choc oblique à haute température	26

3.4. Détente de Prandtl Meyer à haute température	31
3.5. La Température totale et la pression totale	37
3.6. La variation d'entropie	38

CHAPITRE 4: CALCUL DE L'AERODYNAMIQUE NUMERIQUE D'UN PROFIL D'AILE POINTU

4.1. Introduction	39
4.2. Méthode de discrétisation	39
4.2.1. Calcul de l'angle de déviation de l'écoulement ψ	39
4.2.2. Discrétisation des profils	42
4.3. Centre dynamique des gaz	45
4.4. Présentation des profils d'ailes supersonique utilisés	47

CHAPITRE 5: RESULTATS ET DISCUSSION

5.1 Effet de la température génératrice sur l'écoulement supersonique de l'air	49
5.1.1 Variation de la déviation de l'écoulement le long de la corde de profil	50
5.1.2 Variation des paramètres thermodynamiques le long de la surface de Profil	51
5.1.3 Effet de la température génératrice T_0 sur les coefficients aérodynamiques	58
5.1.4. Effet de α à HT sur les coefficients aérodynamiques pour M_0 et t/C fixes	65
5.1.5. Effet de M_0 à HT sur les coefficients aérodynamiques pour α et t/C fixes	71
5.1.6. Effet de t/C à HT sur les coefficients aérodynamiques pour M_0 et α fixes	76
5.1.7. Variation de l'erreur de modèle GP par rapport au modèle HT en fonction de M_0	81
5.2. Effet de la nature des gaz sur l'écoulement supersonique autour du profil d'aile pointu	86

5.2.1. Paramètres à haute température de l'écoulement à travers l'onde de choc oblique et la détente de Prandtl Meyer	89
5.2.2. Coefficients dynamiques des gaz à haute température	90
5.2.3. Effet des gaz à haute température en fonction de α	92
5.2.4. Effet des gaz à haute température en fonction de M_∞	94
5.2.5. Effet des gaz à haute température en fonction de T_0	96
5.2.6. Effet des gaz à haute température en fonction de t/C	98
5.2.7. Comparaison entre gaz et air	100
5.2.8. Validation et interprétation des résultats	107
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	110
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	113

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 :	Courbe de variation de la fonction $F_\rho(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T_0]$.	22
Figure 3.1 :	Formation d'ondes de mach.	25
Figure 3.2 :	Onde de choc oblique.	27
Figure 3.3 :	Expansion supersonique	32
Figure 3.4 :	Variation de la fonction $F_v(T)$	35
Figure 4.1 :	Déviati on de l'écoulement sur l'extrados selon l'angle ψ	40
Figure 4.2 :	Compression sur l'extrados.	40
Figure 4.3 :	Détente sur l'extrados.	41
Figure 4.4 :	Compression sous l'intrados.	41
Figure 4.5 :	Détente sous l'intrados.	41
Figure 4.6 :	cas de $\psi = 0$.	42
Figure 4.7 :	Discrétisation de profil	42
Figure 4.8 :	Présentation des forces sur un panneau.	44
Figure 4.9 :	Présentation du centre dynamique des gaz	46
Figure 4.10 :	Losange symétrique	47
Figure 4.11 :	Profil courbé symétrique.	48
Figure 4.12 :	Profil courbé non symétrique.	48
Figure 5.1 :	Variati on de l'angle de déviati on de l'écoulement le long de la corde des trois types de profil.	50
Figure 5.2 :	Effet de T_0 sur la variati on de M le long de la surface du profil losange symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.	52
Figure 5.3 :	Effet de T_0 sur la variati on de M le long de la surface du profil courbé symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.	52
Figure 5.4 :	Effet de T_0 sur la variati on de M le long de la surface du profil courbé non symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.	53
Figure 5.5 :	Effet de T_0 sur la variati on de T/T_0 le long de la surface du profil losange symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.	53

Figure 5.6 :	Effet de T_0 sur la variation de T/T_0 le long de la surface du profil courbé symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.	54
Figure 5.7 :	Effet de T_0 sur la variation de T/T_0 le long de la surface du profil courbé non symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.	54
Figure 5.8 :	Effet de T_0 sur la variation de ρ/ρ_0 le long de la surface du profil losange symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.	55
Figure 5.9 :	Effet de T_0 sur la variation de ρ/ρ_0 le long de la surface du profil courbé symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.	55
Figure 5.10 :	Effet de T_0 sur la variation de ρ/ρ_0 le long de la surface du profil courbé non symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.	56
Figure 5.11 :	Effet de T_0 sur la variation de P/P_0 le long de la surface du profil losange symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.	56
Figure 5.12:	Effet de T_0 sur la variation de P/P_0 le long de la surface du profil courbé symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.	57
Figure 5.13:	Effet de T_0 sur la variation de P/P_0 le long de la surface du profil courbé non symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.	57
Figure 5.14 :	Variation de C_D en fonction de T_0 pour le profil losange symétrique.	60
Figure 5.15 :	Variation de C_D en fonction de T_0 pour le profil courbé symétrique.	61
Figure 5.16 :	Variation de C_D en fonction de T_0 pour le profil courbé non symétrique.	61
Figure 5.17 :	Variation de C_L en fonction de T_0 pour le profil losange symétrique.	62
Figure 5.18:	Variation de C_L en fonction de T_0 pour profil courbé symétrique.	62
Figure 5.19 :	Variation de C_L en fonction de T_0 pour le profil courbé non symétrique.	63
Figure 5.20 :	Variation de C_m en fonction de T_0 pour le profil losange symétrique.	63

Figure 5.21 :	Variation de C_m en fonction de T_0 pour le profil courbé symétrique.	64
Figure 5.22 :	Variation de C_m en fonction de T_0 pour e profil courbé non symétrique	64
Figure 5.23 :	Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de α pour le profil losange symétrique.	66
Figure 5.24 :	Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de α pour le profil courbé symétrique.	66
Figure 5.25 :	Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de α pour le profil courbé non symétrique.	67
Figure 5.26 :	Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de α pour le profil losange symétrique	67
Figure 5.27 :	Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de α pour le profil courbé symétrique.	68
Figure 5.28 :	Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de α pour le profil courbé non symétrique.	68
Figure 5.29 :	Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de α pour le profil losange symétrique.	69
Figure 5.30 :	Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de α pour le profil courbé symétrique	69
Figure 5.31:	Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de α pour le profil courbé non symétrique	70
Figure 5.32 :	Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de M_0 pour le profil losange symétrique	70
Figure 5.33 :	Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.	72
Figure 5.34 :	Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de M_0 pour le profil courbé non symétrique.	73
Figure 5.35 :	Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de M_0 pour le profil losange symétrique.	73
Figure 5.36 :	Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.	74

Figure 5.37 :	Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de M_0 pour le profil courbé non symétrique.	74
Figure 5.38 :	Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de M_0 pour le profil losange symétrique.	75
Figure 5.39 :	Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.	75
Figure 5.40 :	Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de M_0 pour le profil courbé non symétrique.	76
Figure 5.41 :	Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de t/C pour le profil losange symétrique.	77
Figure 5.42 :	Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de t/C pour le profil courbé symétrique.	77
Figure 5.43 :	Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de t/C pour le profil courbé non symétrique.	78
Figure 5.44 :	Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de t/C pour le profil losange symétrique.	78
Figure 5.45 :	Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de t/C pour le profil courbé symétrique.	79
Figure 5.46 :	Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de t/C pour le profil courbé non symétrique.	79
Figure 5.47 :	Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de t/C pour le profil losange symétrique.	80
Figure 5.48 :	Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de t/C pour le profil courbé symétrique.	80
Figure 5.49 :	Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de t/C pour le profil courbé non symétrique.	81
Figure 5.50 :	Variation de l'erreur relative commise par le modèle <i>PG</i> par rapport au modèle <i>HT</i> sur le coefficient C_D en fonction de M_0 pour le profil losange symétrique.	81
Figure 5.51 :	Variation de l'erreur relative commise par le modèle <i>PG</i> par rapport au modèle <i>HT</i> sur le coefficient C_D en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.	82

Figure 5.52 :	Variation de l'erreur relative commise par le modèle <i>PG</i> par rapport au modèle <i>HT</i> sur le coefficient C_D en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.	83
Figure 5.53 :	Variation de l'erreur relative commise par le modèle <i>PG</i> par rapport au modèle <i>HT</i> sur le coefficient C_L en fonction de M_0 pour le profil losange symétrique.	83
Figure 5.54 :	Variation de l'erreur relative commise par le modèle <i>PG</i> par rapport au modèle <i>HT</i> sur le coefficient C_L en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.	84
Figure 5.55 :	Variation de l'erreur relative commise par le modèle <i>PG</i> par rapport au modèle <i>HT</i> sur le coefficient C_L en fonction de M_0 pour le profil courbé non symétrique.	84
Figure 5.56 :	Variation de l'erreur relative commise par le modèle <i>PG</i> par rapport au modèle <i>HT</i> sur le coefficient C_m en fonction de M_0 pour le profil losange symétrique.	85
Figure 5.57 :	Variation de l'erreur relative commise par le modèle <i>PG</i> par rapport au modèle <i>HT</i> sur le coefficient C_m en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.	85
Figure 5.58 :	Variation de l'erreur relative commise par le modèle <i>PG</i> par rapport au modèle <i>HT</i> sur le coefficient C_m en fonction de M_0 pour le profil courbé non symétrique.	86
Figure 5.59 :	Figure 5.59. Effet des gaz sur la variation de C_D en fonction de α pour le profil symétrique courbé	93
Figure 5.60 :	Effet des gaz sur la variation de C_L en fonction de α pour le profil symétrique courbé	93
Figure 5.61 :	Effet des gaz sur la variation de C_m en fonction de α pour le Profil symétrique courbé	94
Figure 5.62 :	Effet des gaz sur la variation de C_D en fonction de M_∞ pour le profil symétrique courbé	95
Figure 5.63 :	Effet des gaz sur la variation de C_L en fonction de M_∞ pour le profil symétrique courbé	95
Figure 5.64 :	Effet des gaz sur la variation de C_m en fonction de M_∞ pour le profil symétrique courbé	96

Figure 5.65 :	Effet des gaz sur la variation de C_D en fonction de T_0 pour le profil symétrique courbé	97
Figure 5.66 :	Effet des gaz sur la variation de C_L en fonction de T_0 pour le profil symétrique courbé	97
Figure 5.67 :	Effet des gaz sur la variation de C_m en fonction de T_0 pour le profil symétrique courbé	98
Figure 5.68 :	Effet des gaz sur la variation de C_D en fonction de t/C pour le profil symétrique courbé	99
Figure 5.69 :	Effet des gaz sur la variation de C_L en fonction de t/C pour le profil symétrique courbé	99
Figure 5.70 :	Effet des gaz sur la variation de C_m en fonction de t/C pour le profil symétrique courbé	100
Figure 5.71 :	Comparaison de C_D entre gaz et air en fonction de α	100
Figure 5.72:	Comparaison de C_L entre gaz et air en fonction de α	101
Figure 5.73:	Comparaison de C_m entre gaz et air en fonction de α	101
Figure 5.74 :	Comparaison de C_D entre gaz et air en fonction de M_∞	102
Figure 5.75:	Comparaison de C_L entre gaz et air en fonction de M_∞	102
Figure 5.76 :	Comparaison de C_m entre gaz et air en fonction de M_∞	103
Figure 5.77:	Comparaison de C_D entre gaz et air en fonction de T_0	104
Figure 5.78:	Comparaison de C_L entre gaz et air en fonction de T_0	104
Figure 5.79:	Comparaison de C_m entre gaz et air en fonction de T_0	105
Figure 5.80:	Comparaison de C_D entre gaz et air en fonction de t/C	105
Figure 5.81:	Comparaison de C_L entre gaz et air en fonction de t/C	106
Figure 5.82 :	Comparaison de C_m entre gaz et air en fonction de t/C	106

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 :	Variation de C_p et γ en fonction de la température pour air	18
Tableau 2.2 :	Coefficients de polynôme $C_p(T)$	19
Tableau 2.3 :	Coefficients de $C_p(T)$ et des constantes R pour différents types de gaz	21
Tableau 5.1 :	Effet de T_0 sur C_D, C_L, C_m et $\Delta S_{21}/R$ pour le losange lorsque $\alpha = 2.0^\circ$, $M_0 = 4.00$ et $t/C = 0.1$	58
Tableau 5.2 :	Erreur de modèle GP par rapport au modèle HT selon le tableau (6.1)	59
Tableau 5.3 :	Effet de T_0 sur C_D, C_L, C_m et $\Delta S_{21}/R$ pour le profil courbé symétrique lorsque $\alpha = 2.0^\circ$, $M_0 = 4.00$ et $t/C = 0.1$	59
Tableau 5.4 :	Erreur de modèle GP par rapport au modèle HT selon le tableau (6.3)	59
Tableau 5.5 :	Effet de T_0 sur C_D, C_L, C_m et $\Delta S_{21}/R$ pour le profil courbé non symétrique lorsque $\alpha = 2.0^\circ$, $M_0 = 4.00$, $t/C = 0.03$ et $t_E/C = 0.1$	59
Tableau 5.6 :	Erreur de modèle GP par rapport au modèle HT selon le tableau (6.5)	60
Tableau 5.7 :	Effet de T_0 sur l'angle de portance nulle pour le profil courbé non symétrique en fonction de M_0 .	70
Tableau 5.8 :	Effet de T_0 sur l'angle de moment nul pour le profil courbé non symétrique en fonction de M_0 .	70
Tableau 5.9 :	La légende des figures	88
Tableau 5.10 :	les données principales de l'application	88
Tableau 5.11 :	Exemple sur l'effet du gaz sur les paramètres de l'onde de choc oblique pour $M_1=5.00$, $T_0=3500$ K et $\psi = 10^\circ$.	89
Tableau 5.12 :	Exemple sur l'effet du gaz sur les paramètres de la détente de Prandtl Meyer pour $M_1=5.00$, $T_0=3500$ K et $\psi = 10^\circ$.	90

Tableau 5.13:	comparaison des coefficients dynamiques des gaz avec l'air	91
Tableau 5.14 :	Effet du gaz sur la variation d'entropie et la position du centre dynamique du gaz	92
Tableau 5.15 :	Différence entre gaz et air pour les données du problème du tableau (5.10)	107

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

a	Vitesse du son [m/s]
C	corde de profil [m]
C_D	coefficient de trainée.
C_L	coefficient de portance.
C_m	coefficient de moment de tangage.
C_P	chaleur spécifique à pression constante [J/kg.K].
C_v	chaleur spécifique à volume constant [J/kg.K]
D	force de trainée [N]
dx	Déplacement infinitésimal [m]
e	épaisseur maximal de profil [m]
f_E	Equation de l'extrados de profil .
f_i	Equation de l'intrados de profil.
H	Enthalpie [J/kg]
HT	haute température.
k	nombre des nœuds sur l'extrados.
L	force de portance
l	nombre des nœuds sur l'intrados.
M	nombre de Mach.
m	moment de tangage [N.m]
n	nombre total des nœuds sur le profil.
P	Pression [Pa].
PG	gaz parfait.
PM	Prandtl Meyer.
Q	Quantité de mouvement
r	Constant des gaz parfait [J/kg.K].
S	surface de référence [m ²]
T	Température [K]
U	Vitesse [m/s]
x, y	Position du point sur le profil.
x_{CGD}	Abscisse de centre dynamique du gaz

y_{CGD} ordonné de centre dynamique du gaz

Symboles grecques

α	Angle incidence
β	déviation de l'onde de choc.
θ	angle de déviation du segment de profil
ΔS	variation totale de l'entropie [J/kg.K].
ε	erreur de calcul.
λ_D	Coefficient de comparaison de trainée du gaz par rapport à l'air
λ_L	Coefficient de comparaison de portance du gaz par rapport à l'air
λ_m	Coefficient de comparaison de moment de tangage du gaz par rapport à l'air
μ	angle de Mach
ρ	Masse volumique [kg/m ³]
ψ	angle de déviation de l'écoulement.
γ	rapport de chaleur spécifique
ν	fonction de Prandtl-Meyer

Indices

0	condition d'arrêt à l'infini amont.
1	Etat amont au panneau considéré.
2	Etat de panneau considéré.
E	Extrados.
I	Intrados.
p	Point pour le calcul de moment de tangage
∞	infini
Min	minimum
Max	maximum

Introduction

L'aérodynamique numérique, ou l'étude des problèmes de l'aérodynamique par voie numérique, est un domaine de recherche relativement récent. La plupart des travaux précédents que ce soit théoriques, numériques ou même expérimentaux (en soufflerie) qui étudiaient les écoulements supersoniques autour des profils aérodynamiques sont dévoués pour des profils aérodynamiques arrondis au bord d'attaque c'est-à-dire développement d'une onde de choc détachée. Ces études sont généralement basées sur la résolution numérique des équations d'Euler.

La forme pointue du profil d'aile au bord d'attaque donne la possibilité d'avoir l'apparition d'une onde de choc attaché, où une technique numérique peut être utilisée pour évaluer les paramètres aérodynamique de l'écoulement. Vu que l'écoulement est supersonique à l'air libre, loin de la présence d'autre obstacle, cette technique permet de suivre progressivement l'écoulement sur la surface de profil d'aile en fonction des paramètres de l'écoulement amont.

Vu la complexité des méthodes employées en aérodynamique supersonique, et en particulier celle présentée dans cette étude, nommée par méthode de choc détente, les auteurs utilisent une technique analytique nommée par théorie des profils minces pour évaluer approximativement les paramètres de l'écoulement et en particulier le calcul des coefficients aérodynamiques. Cette méthode donne des résultats acceptables pour de très faibles épaisseurs de profil et de nombre de Mach amont.

La première étude sur l'utilisation de la méthode de choc détente est présentée dans la référence [1]. Cette méthode est utilisée pour le gaz calorifiquement parfait et thermiquement parfait. Ils supposent dans ce cas que la chaleur spécifique à pression constante C_P est constante et ne dépende pas de la température, ce qui donne des résultats acceptable uniquement si les trois paramètres M_0 , T_0 et t/C soient très petites. Il est à noter que ce modèle PG ne dépend pas de la température génératrice T_0 .

Le premier volet de ce travail consiste à élaborer un nouveau modèle mathématique et de développer dans ce contexte un code de calcul numérique permettant de déterminer l'effet de la température génératrice sur l'écoulement supersonique autour d'un profil d'aile pointu, en utilisant les équations d'un choc oblique et de la détente de Prandtl Meyer dans le cas d'un gaz à *HT*, calorifiquement imparfait et thermiquement parfait, inférieure au seuil de dissociation des molécules, afin de déterminer les caractéristiques aérodynamiques, présentés par les coefficients de portance, de trainée et de moment de tangage en fonction de nombre de Mach amont, angle d'incidence, forme de profil et épaisseur de profil et surtout de la température génératrice, lorsqu'ils soient élevés. Dans ce cas la chaleur spécifique à pression constante ne reste plus constante et varie avec l'augmentation de la température, qui sera tenu en compte dans notre modèle à *HT*. La température T_0 est un paramètre important dans notre modèle, qui va démontrer des corrections considérables aux résultats donnés par le modèle *PG*. Ce dernier donne de bons résultats uniquement si les valeurs de M_0 , T_0 , α , t/C sont très petites.. Alors vu les applications actuelles en aérodynamique supersonique demandent des valeurs de M_0 , T_0 élevées qui dépassent respectivement 2.00, 1000°K et qui peuvent arriver respectivement à 5.00 et 3500°K, dans ce cas, le modèle *PG* tombe à défaut et les résultats donnés par ce modèle deviennent très loin de la réalité, ce qui nécessite de faire des corrections à ce modèle, d'où l'intérêt de l'application du modèle développé *HT*. Dans ce cas et pour la fonction C_P , on trouve dans la bibliographie une série des valeurs tabulées de la variation de C_P entre la température 55°K et 3550°K (limite pour ne pas avoir une dissociation des molécules). Alors une interpolation polynomiale est faite à ces valeurs, après plusieurs essais, afin de trouver une fonction analytique à la variation de $C_P(T)$ avec la température. Un choix sur un polynôme de 9ème degré est effectué, donnant une erreur maximale inférieure à 0.01%. Pour cette partie l'application est pour l'air.

Le second volet est de voir l'effet des gaz sur l'écoulement supersonique à haute température autour d'un profil d'aile pointu puisque les calculs actuels de l'écoulement extérieur autour d'un véhicule sont limités seulement par l'application de l'aérodynamique en utilisant l'air comme un gaz générateur. L'avantage de l'air est qu'il existe en grande quantité dans la nature, à faible coût et qu'il ne nécessite

pas de technologie avancée pour son stockage [2] Pour l'aérodynamique interne c'est le cas contraire, où l'air doit être stocké sous forme solide ou liquide pour une éventuelle utilisation dans la propulsion spatiale [3]. Les performances apportées aux engins par l'utilisation de l'air comme gaz générateur dans la propulsion restent actuellement débattues étant donné que l'utilisation d'autres gaz de propulsion à la place de l'air a actuellement un usage modeste dans la majorité des applications aérospatiales. Les résultats obtenus ont démontré qu'il est possible d'améliorer les performances de la machine en utilisant certains gaz qui apportent des améliorations remarquables des performances. Il est à noter qu'il est possible aujourd'hui de diviser la liste des gaz existant dans la nature en trois parties selon la qualité de leurs performances par rapport à l'air. La première partie concerne les gaz ayant de meilleures performances par rapport à l'air. La deuxième liste regroupe les gaz ayant des performances médiocres par rapport à l'air et la troisième liste regroupe les gaz qui ont presque les mêmes performances que l'air.

En se basant sur les travaux de la référence [1] ainsi que des références [4-5], un programme de calcul numérique a été développé pour étudier l'effet du gaz générateur sur le calcul de l'écoulement supersonique à HT autour d'un profil d'aile pointu dans le but de déterminer les coefficients dynamiques des gaz de traînée, de portance et de moment de tangage avec l'introduction de trois nouveaux coefficients de comparaison $\lambda_D, \lambda_L, \lambda_m$ des coefficients C_D, C_L et C_m du gaz avec l'air afin de retrouver et diviser directement la gamme des gaz de la nature en trois parties comprenant les gaz ayant les meilleures performances, d'autres avec des mauvaises performances et le reste avec des performances égales à celles de l'air. L'application est faite pour 7 différents gaz générateurs qui sont $H_2, O_2, N_2, CO, CO_2, H_2O_{(Vapeur)}$ et air. L'application est faite pour un profil symétrique courbé, dont l'étude est valable pour tous types de profils supersoniques. Le calcul aérodynamique devient un cas particulier de notre étude, où les coefficients aérodynamiques ne sont plus nommés par ce nom avec une extension vers un nom par les coefficients dynamiques des gaz compte tenu de l'utilisation de différents gaz à la place de l'air. Une amélioration de la traînée avec le moment de tangage ou une amélioration de la portance peuvent être obtenues pour développer une nouvelle technologie de construction de nouvelles

machines spatiales basée sur l'utilisation de gaz au lieu de l'air comme valeur ajoutée pour la communauté internationale de la fabrication aérospatiale. L'application peut être étendue à la conception de futurs véhicules atmosphériques et spatiaux.

CHAPITRE 1

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE ET ETAT DE L'ART

1.1. Introduction

L'interaction entre un fluide compressible tel que l'air et un corps solide plongé dans son écoulement est à l'origine de l'apparition de forces aérodynamiques qui influencent directement le comportement dynamique de ce corps. Lorsqu'un écoulement d'air traverse un profil aérodynamique (notamment les profils d'aile, éléments fondamentaux des structures portantes en aéronautique et astronautique) des forces élémentaires de pression normale et de frottement tangentiel se développent le long de la surface du profil. Ces forces résultent des gradients de pression et de vitesse autour du corps, en interaction avec les propriétés physiques du fluide telles que la viscosité, la compressibilité et la conductivité thermique.

Par projection de ces forces élémentaires dans un système de coordonnées lié au corps, on obtient les composantes classiques de la force aérodynamique : la portance (force perpendiculaire à l'écoulement libre), la traînée (force parallèle à l'écoulement) et le moment aérodynamique (lié à la répartition asymétrique des pressions). Ces grandeurs dépendent de plusieurs paramètres : la géométrie du profil, son angle d'incidence par rapport au vecteur vitesse de l'écoulement, le régime de vol (subsonique, transsonique, supersonique ou hypersonique), ainsi que les propriétés thermodynamiques du fluide (masse volumique, température, viscosité, chaleur spécifique, etc.)[6].

Les profils d'aile jouent un rôle essentiel dans la dynamique des véhicules aériens et spatiaux. Ces véhicules évoluent souvent à des vitesses élevées, parfois supersoniques, voire hypersoniques ($> \text{Mach } 5$), notamment dans le cas des missiles, des engins de rentrée atmosphérique, ou des lanceurs spatiaux. Le vol de ces engins se divise généralement en plusieurs phases (montée, croisière, manœuvre, rentrée...), chacune soumise à des conditions aérodynamiques spécifiques. Par conséquent, la

prédiction précise des forces de portance et de traînée, ainsi que la compréhension de leur variation avec les conditions de vol, constitue un enjeu fondamental de l'ingénierie aérospatiale moderne.

Face à cette complexité, l'aérodynamique qu'elle soit théorique, expérimentale ou numérique vise à modéliser, prédire et optimiser les phénomènes d'écoulement autour de corps immergés. Les approches théoriques, basées sur les équations de la mécanique des fluides (notamment les équations de Navier–Stokes ou d'Euler en écoulement parfait), permettent d'obtenir des solutions analytiques dans des cas idéalisés. Toutefois, ces équations deviennent rapidement non linéaires et complexes dès que l'on introduit des effets réalistes tels que la viscosité, la turbulence, les ondes de choc ou encore la variation des propriétés thermodynamiques avec la température.

Pour surmonter ces limitations, l'expérimentation a longtemps constitué l'outil de référence. Les souffleries, en particulier, permettent de reproduire en laboratoire une grande diversité de régimes d'écoulement autour de maquettes à échelle réduite, et de mesurer avec précision les forces et moments générés. Néanmoins, la mise en œuvre de telles campagnes expérimentales reste coûteuse, techniquement exigeante, et parfois inaccessible pour des géométries ou conditions extrêmes (régimes hypersoniques, hautes températures, milieux réactifs...).

C'est dans ce contexte que la simulation numérique, ou mécanique des fluides numérique (CFD, Computational Fluid Dynamics), s'est progressivement imposée comme un pilier incontournable de l'analyse aérodynamique. Grâce aux avancées remarquables en calcul haute performance, aux méthodes de discrétisation (volumes finis, éléments finis, différences finies) et aux modèles de turbulence, la CFD permet aujourd'hui de simuler des écoulements tridimensionnels compressibles avec des degrés de précision comparables aux données expérimentales. Elle offre la possibilité d'étudier des géométries complexes, de réaliser des analyses paramétriques poussées, et de prédire les comportements aérodynamiques dans des régimes difficilement accessibles autrement.

Cependant, même avec ces progrès, la modélisation des écoulements dans des conditions réalistes demeure un défi. En particulier, les effets de la température sur les propriétés thermodynamiques du fluide, tels que la variation de la chaleur spécifique

(Cp) sont souvent négligés dans les modèles classiques qui considèrent le gaz comme parfait. Or, à des vitesses supersoniques, l'échauffement de l'écoulement peut entraîner des températures de stagnation très élevées, rendant invalides les hypothèses de linéarité thermique. Cela justifie la nécessité de recourir à des modèles plus complexes, dits modèles de gaz à haute température (modèles HT), qui prennent en compte la dépendance des propriétés thermodynamiques à la température, et parfois aux réactions chimiques.

1.2. Etat de l'art

L'aérodynamique, en tant que discipline scientifique, puise ses fondements dans l'évolution historique de la mécanique des fluides, enrichie au fil des siècles par les contributions théoriques, expérimentales et numériques. Les premières avancées remontent au XVIII^e siècle, période durant laquelle les bases fondamentales de l'écoulement des fluides ont été posées. En 1738, Daniel Bernoulli énonce, dans son ouvrage *Hydrodynamica*, le principe de conservation de l'énergie dans les fluides parfaits et incompressibles, qui deviendra la célèbre équation de Bernoulli. Ce principe établit une relation entre la pression, la vitesse et la hauteur dans un écoulement stationnaire, et demeure l'une des pierres angulaires de l'hydrodynamique moderne. Quelques années plus tard, en 1755, Leonhard Euler généralise la description du mouvement des fluides par l'établissement d'un système d'équations gouvernant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans un fluide idéal, c'est-à-dire non visqueux. Ces équations, dites équations d'Euler, restent aujourd'hui un outil essentiel dans la modélisation des écoulements compressibles, particulièrement dans les régimes supersoniques où les effets visqueux peuvent être négligés à grande échelle.

Au XIX^e siècle, la compréhension des fluides réels évolue considérablement grâce à l'introduction de la notion de viscosité. Claude-Louis Navier, en 1823, puis George Gabriel Stokes, en 1845, intègrent les forces de frottement interne dans les équations de la mécanique des fluides. Ce développement conduit à l'établissement des équations de Navier–Stokes, qui permettent de décrire de manière plus réaliste les écoulements internes et externes en tenant compte des effets dissipatifs dus à la viscosité. À cette époque, d'autres savants comme Poisson et Saint-Venant contribuent également à la formalisation des équations du mouvement des fluides

visqueux. Toutefois, l'ajout de la viscosité complexifie considérablement la résolution analytique de ces équations, rendant la majorité des problèmes réels inaccessibles sans approximations ou simplifications.

La fin du XIX^e siècle est marquée par une avancée significative dans la compréhension des écoulements grâce à l'introduction des paramètres adimensionnels. Osborne Reynolds introduit en 1883 le célèbre nombre de Reynolds, qui permet de distinguer les régimes laminaire et turbulent en comparant l'importance relative des forces d'inertie et des forces visqueuses dans un écoulement. En parallèle, Ernst Mach définit le nombre de Mach, rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son, critère fondamental pour caractériser les régimes subsonique, transsonique, supersonique et hypersonique. Ces deux nombres adimensionnels, toujours utilisés aujourd'hui, ont permis de généraliser les résultats expérimentaux et théoriques à des cas variés. Dans le même esprit, les travaux de Rankine et Hugoniot entre 1870 et 1887 aboutissent aux relations éponymes qui décrivent le comportement des variables thermodynamiques de part et d'autre d'une onde de choc. Ces relations, dérivées des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, ont permis de mieux comprendre les discontinuités observées dans les écoulements à haute vitesse.

À la même époque, la réalité physique des ondes de choc commence à être confirmée par l'observation expérimentale. En 1876, Ernst Mach parvient à photographier une onde de choc formée autour d'un projectile à grande vitesse, apportant une preuve directe des discontinuités théorisées auparavant. Il est alors établi que le passage d'un écoulement subsonique à un régime supersonique provoque une onde de choc accompagnée d'une élévation brutale de la pression, de la température et de l'entropie. À l'inverse, une expansion de l'écoulement supersonique à travers une géométrie divergente provoque un phénomène isentropique appelé détente de Prandtl-Meyer, également modélisé mathématiquement au début du XX^e siècle.

C'est dans ce contexte théorique en plein essor que l'expérimentation devient une composante essentielle de l'aérodynamique. Dès 1909, Ludwig Prandtl, l'un des fondateurs de la mécanique des fluides moderne, met au point les premières

souffleries, rapidement suivies par les travaux de Gustave Eiffel. Ces installations expérimentales permettent de reproduire à l'échelle réduite les conditions de vol réelles et d'obtenir des données fiables sur la distribution des pressions, les coefficients de portance et de traînée, ou encore la formation d'ondes de choc autour de maquettes. Depuis, l'expérimentation en soufflerie reste une méthode de référence pour la validation des modèles théoriques et le développement de nouvelles configurations aérodynamiques. Cependant, la mise en œuvre de telles campagnes expérimentales est souvent très coûteuse, longue, et exigeante en moyens techniques, rendant leur accessibilité limitée, notamment dans les projets académiques ou les phases initiales de conception.

Avec l'apparition de l'informatique moderne et des premières méthodes numériques après la Seconde Guerre mondiale, une nouvelle ère s'ouvre pour l'aérodynamique. L'introduction progressive de la simulation numérique, désormais connue sous le nom de mécanique des fluides numérique (CFD – Computational Fluid Dynamics), permet d'envisager la résolution directe des équations de Navier–Stokes dans des configurations tridimensionnelles complexes. Les premières approches, basées sur les différences finies, évoluent rapidement vers des méthodes plus robustes telles que les volumes finis et les éléments finis, couplées à des schémas de discrétisation adaptés aux écoulements compressibles. Ces avancées ont permis de modéliser des phénomènes auparavant inaccessibles, comme les écoulements autour de configurations géométriques réalistes, les interactions fluide-structure, ou encore les effets thermiques dans les couches limites.

Le développement des solveurs numériques entre 1945 et 1990 a été spectaculaire, tant sur le plan algorithmique que matériel. L'implémentation de modèles de turbulence (comme $k-\varepsilon$, $k-\omega$ ou RANS), la résolution efficace de l'équation de Poisson pour la pression, ainsi que l'optimisation des ressources de calcul ont rendu possible l'analyse numérique de configurations réalistes avec une précision remarquable. Aujourd'hui, la CFD est largement utilisée dans l'industrie aéronautique et spatiale, ainsi que dans la recherche académique, pour concevoir, optimiser et valider des configurations aérodynamiques dans tous les régimes de vol.

Néanmoins, malgré ces progrès, certaines limites persistent, notamment dans les régimes extrêmes où les propriétés thermo-physiques du fluide varient de manière significative avec la température. En particulier, à des vitesses supersoniques ou hypersoniques, l'échauffement du fluide provoque une élévation importante de la température de stagnation, rendant les hypothèses du gaz parfait obsolètes. La chaleur spécifique C_p , souvent supposée constante, devient fortement dépendante de la température, ce qui impose l'utilisation de modèles plus avancés, dits modèles de gaz à haute température (modèles HT). Ces modèles permettent de prendre en compte la variation de C_p , mais aussi parfois des réactions chimiques ou des effets de dissociation moléculaire, pour simuler de manière plus réaliste les écoulements en environnements extrêmes.

Dans ce cadre, il devient nécessaire de réexaminer les formulations classiques des ondes de choc, de la détente de Prandtl–Meyer et des paramètres aérodynamiques associés, en intégrant ces effets thermiques. Ce besoin constitue un moteur essentiel des recherches récentes dans le domaine de l'aérodynamique compressible, qui vise à développer de nouveaux modèles mathématiques adaptés aux conditions de haute température, à valider leurs prédictions via la simulation numérique, et à élargir leur champ d'application à différents gaz générateurs au-delà de l'air.

1.3. Position du problème

L'étude des écoulements supersoniques autour des corps profilés constitue un champ de recherche essentiel en aérodynamique, notamment dans les domaines de l'aéronautique, de l'astronautique et de la propulsion avancée. Lorsqu'un écoulement à vitesse supersonique entre en interaction avec un profil aérodynamique, des phénomènes physiques complexes apparaissent le long de la surface du corps, parmi lesquels figurent principalement les ondes de choc et les éventails de détente. Ces discontinuités sont générées par la nécessité pour l'écoulement de s'adapter à la géométrie du profil, ce qui entraîne des changements brusques des variables thermodynamiques telles que la pression, la température, la densité et la vitesse. La prédiction et la compréhension de ces phénomènes sont cruciales pour déterminer les performances aérodynamiques d'un profil donné, en particulier en ce qui concerne les

coefficients de portance, de traînée, ainsi que les efforts mécaniques exercés sur la structure.

La majorité des travaux disponibles dans la littérature scientifique portent sur l'écoulement autour de profils à bord d'attaque arrondi. Cette géométrie, relativement simple et largement utilisée dans les applications subsoniques et transsoniques, induit généralement la formation d'ondes de choc détachées, qui se développent à une certaine distance en amont du profil. Ces ondes ont été largement étudiées, tant expérimentalement que numériquement, et leurs caractéristiques sont aujourd'hui bien connues. En revanche, les profils à bord d'attaque pointu, souvent rencontrés dans les configurations supersoniques ou hypersoniques (comme les ogives, les cônes ou certaines configurations de tuyères), génèrent des ondes de choc obliques attachées, plus complexes à modéliser en raison de leur sensibilité aux conditions thermodynamiques du fluide incident.

Les approches classiques utilisées pour modéliser l'écoulement supersonique autour de tels profils s'appuient en général sur la méthode dite "choc-détente". Cette méthode permet de décomposer l'écoulement en une succession de discontinuités (ondes de choc) et de zones isentropiques (éventails de détente), dont les effets peuvent être décrits analytiquement dans le cas d'un gaz parfait [1,7]. En effet, de nombreux modèles théoriques encore utilisés aujourd'hui considèrent le fluide comme parfait, c'est-à-dire avec une chaleur spécifique constante, une compressibilité linéaire, et un comportement thermodynamique idéal. Cette hypothèse, bien que mathématiquement pratique, n'est plus réaliste dans le cas des écoulements supersoniques à haute température.

En réalité, lorsque la température de stagnation devient significative (généralement au-delà de 500 K), comme c'est le cas dans de nombreux régimes supersoniques, les propriétés thermophysiques du gaz évoluent sensiblement. La chaleur spécifique à pression constante C_p , par exemple, ne peut plus être supposée constante. Elle dépend fortement de la température, et cette variation affecte directement le comportement du fluide à travers les ondes de choc et les zones de détente. La température génératrice, définie comme la température de l'écoulement lorsque sa vitesse est nulle (vitesse de stagnation ou $M=0$), devient alors un paramètre

essentiel pour décrire correctement l'état thermodynamique du fluide. Lorsque cette température atteint des niveaux élevés, les modèles basés sur le gaz parfait cessent d'être valides, ce qui peut entraîner des erreurs significatives dans le calcul des forces aérodynamiques ou des distributions de pression.

Ce constat souligne la nécessité de développer et d'utiliser un modèle plus réaliste : le modèle du gaz à haute température, ou modèle HT. Ce modèle prend en compte la dépendance de C_p vis-à-vis de la température, ainsi que, dans certains cas, les effets de dissociation, d'ionisation, ou de réactions chimiques si l'on traite des mélanges complexes ou des gaz réactifs. Il permet une description plus précise de l'évolution des paramètres thermodynamiques dans les écoulements supersoniques, notamment à travers les ondes de choc normales et obliques, ainsi que dans les détente isentropiques. Plusieurs travaux antérieurs ont été consacrés au développement de ces modèles HT, principalement dans le cadre de l'étude des écoulements internes, notamment dans les tuyères supersoniques où la détente de Prandtl–Meyer à haute température a été analysée en profondeur [8-12].

En revanche, l'application de ces modèles aux écoulements externes comme ceux rencontrés autour de profils aérodynamiques exposés à des vitesses supersoniques reste relativement limitée dans la littérature actuelle. Bien que certaines études aient examiné les effets de la haute température sur les ondes de choc normales, peu d'entre elles ont abordé en détail le cas des ondes de choc normales et obliques dans un contexte de gaz calorifiquement et thermiquement parfait [13,23].

D'autre part, une série d'études portant sur l'utilisation d'autres types de gaz générateurs en remplacement de l'air constitue un apport significatif pour la communauté scientifique internationale. Toutefois, l'étude de l'effet du gaz de propulsion sur la conception des tuyères supersoniques axisymétriques en 2D a été abordée dans les références [24-26], qui présentent des applications liées aux écoulements supersoniques internes. En revanche, l'effet des gaz générateurs sur les écoulements externes a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Ainsi, la référence [4] a analysé l'effet du gaz générateur HT sur le calcul des propriétés thermodynamiques d'un écoulement supersonique unidirectionnel, en le comparant à l'air. La référence [27] a également étudié l'influence du gaz générateur sur la fonction

de Prandtl-Meyer en régime HT, par rapport à l'air. De même, la référence [28] propose un modèle en régime HT pour examiner l'effet du gaz générateur et calculer les paramètres thermodynamiques à travers une onde de choc normale, avec une comparaison avec l'air. Enfin, en 2020, la référence [5] s'est penchée sur l'effet du gaz générateur HT sur le calcul des propriétés thermo-physiques à travers une onde de choc oblique et conique, toujours en comparaison avec l'air.

CHAPITRE 2

PARAMETRES THERMODYNAMIQUE A HAUTE TEMPERATURE

2.1 Introduction

Les études qui ont été faite dans les références [29-35] sont basées sur les écoulement supersonique d'un gaz parfait calorifiquement et thermiquement parfait ; c'est-à-dire les chaleurs spécifique C_p et C_v sont constantes et ne dépendent pas de la température ; cette hypothèse ne devient plus valable si la température augmente ($T > 500K$) [9, 36] ce qui implique une variation de la chaleur spécifique en fonction de la température et le gaz devient un gaz calorifiquement imparfait ou gaz à haute température, inférieur au seuil de dissociation des molécules. Dans ce cas et pour la fonction C_p , on trouve dans les références [8, 9, 30, 37-38], une série des valeurs tabulées de la variation de C_p entre la température 55 K et 3550 K (limite pour ne pas avoir une dissociation des molécules). Alors une interpolation polynomiale est faite à ces valeurs, après plusieurs essais, afin de trouver une fonction analytique de la variation de C_p avec la température. Un choix sur un polynôme de 9^{ème} degré est effectué, donnant une erreur maximale inférieure à 0.01%.

Dans ce chapitre nous présentons les relations thermodynamique sous forme différentielle [34-35, 39-40], et on considère que l'équation d'état d'un gaz parfait reste valable ; elle est donnée par :

$$P = \rho r T \quad (2.1)$$

Avec $r = 287.1029 J/Kg.K$

2.2. Variation de nombre de mach avec la température

Pour un écoulement adiabatique, les relations thermodynamique [12] et [39] donnent :

$$(2.2) \frac{C_p}{\gamma} dT - \frac{rT}{\rho} d\rho = 0$$

Avec :

$$C_V = \frac{C_P}{\gamma} \quad (2.3)$$

Ou dans le cas d'un gaz à haute température on écrit :

$$\gamma(T) = \frac{C_P(T)}{C_P(T)-r} \quad (2.4)$$

La relation (2.2) devient :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T(\gamma(T)-1)} \quad (2.5)$$

En intégrant l'équation (2.5) on trouvera la relation adiabatique pour le gaz à haute température

Le nombre de mach est donné par [29] :

$$M = \frac{U}{a} \quad (2.6)$$

Et la relation de la vitesse de son est donné par [29], [31] et [33]:

$$a^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{s=\text{constante}} \quad (2.7)$$

En dérivant l'équation d'état du gaz parfait (2.1) :

$$\frac{dP}{d\rho} = rT + \rho r \frac{dT}{d\rho} \quad (2.8)$$

Remplaçant l'équation (2.5) dans (2.8) on aura :

$$a^2 = rT\gamma(T) \quad (2.9)$$

Afin de trouver l'équation de la vitesse sous forme différentielle nous écrivons l'équation de la conservation de l'énergie sous forme différentielle [29] , [39] :

$$C_P dT + U dU = 0 \quad (2.10)$$

Intégrant la relation (2.10) entre l'état générateur ($U_0 \approx 0, T_0$) et l'état quelconque (U, T) on aura :

$$\int_{U_0}^U U dU = - \int_{T_0}^T C_P(T) dT \quad (2.11)$$

Prenons $U_0 \approx 0$ l'équation (2.11) donne :

$$\frac{U^2}{2} = - \int_{T_0}^T C_P(T) dT \quad (2.12)$$

Dont ;

$$H(T) = \int_T^{T_0} C_P(T) dT \quad (2.13)$$

L'expression de vitesse devient :

$$U^2 = 2H(T) \quad (2.14)$$

A partir des équations (2.10) et (2.14) l'équation de vitesse en fonction de la température sous forme différentielle s'écrit comme suit :

$$\frac{dU}{U} = - \frac{C_P(T)}{2H(T)} dT \quad (2.15)$$

Remplaçant l'équation (2.14) dans (2.6) on obtient la variation de nombre de mach en fonction de la température pour un gaz calorifiquement imparfait :

$$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)} \quad (2.16)$$

2.3. Variation de la masse volumique avec la température :

L'équation de Bernoulli ou l'équation de la conservation de quantité de mouvement sous forme différentielle s'écrit comme suit :

$$UdU + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.17)$$

Remplaçant l'équation (2.7) dans (2.17) on obtient :

$$UdU + a^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.18)$$

Afin de figurer le nombre de mach ; on remplace la relation de la vitesse de son (2.6) dans (2.18) :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dU}{U} \quad (2.19)$$

Remplaçant les équations (2.9), (2.14), (2.15) et (2.16) dans (2.19) on aura :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{c_p(T)dT}{\gamma(T)rT} \quad (2.20)$$

On pose :

$$F_\rho(T) = \frac{c_p(T)}{\gamma(T)rT} \quad (2.21)$$

L'équation de la masse volumique en fonction de la température sous forme différentielle s'écrit comme suit :

$$\frac{d\rho}{\rho} = F_\rho(T)dT \quad (2.22)$$

En intégrant l'équation (2.22) entre l'état générateur (ρ_0, T_0) et l'état quelconque (ρ, T) on obtient le rapport des masses volumiques :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \text{Exp} \left(- \int_{T_0}^T F_\rho(T) dT \right) \quad (2.23)$$

2.4. Variation de la pression avec la température

A partir de la relation (2.1) on peut écrire le rapport des pressions :

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \left(\frac{T}{T_0} \right) \quad (2.24)$$

En dérivant l'équation d'état des gaz parfait (2.1) et en remplaçant l'équation (2.22) dans le résultat obtenu on obtient :

$$\frac{dP}{P} = \left(F_\rho(T) + \frac{1}{T} \right) dT \quad (2.25)$$

Cette équation présente la différentielle de la pression en fonction de la température pour le gaz calorifiquement imparfait

2.5. Détermination de la chaleur spécifique de l'air en fonction de la température

2.5.1 Interpolation polynomiale $C_p(T)$

La chaleur spécifique à pression constante C_p et Le rapport des chaleurs spécifiques γ pour un gaz à haute température ou gaz calorifiquement imparfait ne restent plus constantes et dépendent de la température. Le tableau (2.1) présente la variation de ces deux paramètres en fonction de la température pour

l'air [2]. Nous rappelons que pour le gaz parfait les valeurs de C_p et γ sont constante et données à $T = 298.15K$ par [2,29,31,40] :

$$\gamma = 1.402 \quad C_p = 1001.28932 J/(Kg.K)$$

Tableau 2.1 : Variation de C_p et γ en fonction de la température pour air [2] :

$T (K)$	$C_p(J/(Kg.K))$	γ	$T (K)$	$C_p(J/(Kg.K))$	γ
55.538	1001.104	1.402	1222.205	1178.509	1.322
.	.	.	1277.761	1186.893	1.319
222.205	1001.101	1.402	1333.316	1192.570	1.317
277.761	1002.885	1.401	1444.427	1204.142	1.313
305.538	1004.675	1.400	1555.538	1216.014	1.309
333.316	1006.473	1.399	1666.650	1225.121	1.306
361.094	1008.281	1.398	1777.761	1234.409	1.303
388.872	1011.923	1.396	1888.872	1243.883	1.300
416.650	1015.603	1.394	1999.983	1250.305	1.298
444.427	1019.320	1.392	2111.094	1256.813	1.296
499.983	1028.781	1.387	2222.205	1263.410	1.294
555.538	1054.563	1.374	2333.316	1270.097	1.292
611.094	1054.563	1.370	2444.427	1273.476	1.291
666.650	1067.077	1.368	2555.538	1276.877	1.290
722.205	1080.005	1.362	2666.650	1283.751	1.288
777.761	1093.370	1.356	2777.761	1287.224	1.287
833.316	1107.192	1.350	2888.872	1290.721	1.286
888.872	1119.078	1.345	2999.983	1294.242	1.285
944.427	1131.314	1.340	3111.094	1297.789	1.284
999.983	1141.365	1.336	3222.205	1301.360	1.283
1055.538	1151.658	1.332	3333.316	1304.957	1.282
1111.094	1162.202	1.328	3444.427	1304.957	1.282
1166.650	1170.280	1.325	3555.538	1308.50	1.281

Afin de donner une expression analytique à la variation de C_p en fonction de la température plusieurs formes de polynômes par plusieurs méthodes peuvent être réalisés [41-42] mais pour raison de réduire l'erreur et se rapprocher des

valeurs tabulées (2.1) un polynôme d'ordre 9 a été choisi [9 ,12 , 36] et présenté par le schéma de *Horner* [41] comme suit :

$$C_p = a_1 + T \left(a_2 + T \left(a_3 + T \left(a_4 + T \left(a_5 + T \left(a_6 + T \left(a_7 + T \left(a_8 + T(a_9 + T(a_{10})) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \quad (2.26)$$

Avec a_i les coefficients du polynôme, ils sont présentés au tableau suivant :

Tableau 2.2 : Coefficients de polynôme $C_p(T)$

i	1	2	3	4
a_i	1001.1058	$4.0661289 \cdot 10^{-2}$	$-6.3376997 \cdot 10^{-4}$	$2.7474759 \cdot 10^{-6}$

i	5	6	7	8
a_i	$-4.0338459 \cdot 10^{-9}$	$3.0697736 \cdot 10^{-12}$	$-1.3509355 \cdot 10^{-15}$	$3.472262 \cdot 10^{-16}$

i	9	10
a_i	$-4.8467531 \cdot 10^{-23}$	$2.8411878 \cdot 10^{-27}$

Le traçage de la fonction $C_p(T)$ donnée par l'expression (2.26) a présenté une instabilité à basse température jusqu'à environ 240°K au lieu d'avoir une constante comme montré dans le tableau (2.1). À cet effet une correction a été introduite à la relation (2.26) comme suit [12]:

$$\text{Si } T = \bar{T} = 240^\circ K \quad \bar{C}_p = C_p(\bar{T}) = 1001.15868 \text{ J/(Kg.K)}$$

Alors :

- Si $T < \bar{T}$, $C_p = \bar{C}_p$
- Si $T > \bar{T}$, $C_p = C_p(T)$ en utilisant la formule (2.26)

2.5.2. Intégration de la chaleur spécifique $C_p(T)$

La détermination de la fonction $H(T)$ de la relation (2.13) est faite par l'intégration de polynôme $C_p(T)$ dans l'intervalle $[T, T_0]$, cette fonction est définie

tant que $T \leq T_0$. Remplaçons l'équation (2.26) dans (2.13), l'intégration a donné l'expression suivante [12] :

$$H(T) = H_0 - T \left[c_1 + T(c_2 + T \left(c_3 + T \left(c_4 + T \left(c_5 + T \left(c_6 + T \left(c_7 + T \left(c_8 + T(c_9 + T(c_{10})) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right] \quad (2.27)$$

Avec :

$$H_0 = T_0 \left(c_1 + T_0(c_2 + T_0 \left(c_3 + T_0 \left(c_4 + T_0 \left(c_5 + T_0 \left(c_6 + T_0 \left(c_7 + T_0 \left(c_8 + T_0(c_9 + T_0(c_{10})) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \quad (2.28)$$

Et

$$c_i = a_i/i \quad i = (1,2, \dots, 10)$$

La fonction $H(T)$ possède aussi une correction de la même manière que $C_p(T)$, elle est faite comme suit [12] :

- Si $T_0 < \bar{T}$, $H(T) = \bar{C}_p . (T_0 - T)$
- Si $T_0 > \bar{T}$, $\begin{cases} \text{si } T > \bar{T} & \text{utiliser la relation (2.27)} \\ \text{si } T \leq \bar{T} & H(T) = \bar{C}_p . (\bar{T} - T) + H(\bar{T}) \end{cases}$

2.6. Détermination de la chaleur spécifique des différents types de gaz en fonction de la température

L'expression analytique du rapport des chaleurs spécifiques γ donné par la relation (2.4) dépend de la chaleur spécifique à pression constante $C_p(T)$; cette dernière diffère d'un gaz à un autre et elle donné par la relation suivante [5,38,43] :

$$C_p(T) = a + b T + \frac{c}{T^2} \quad (2.29)$$

La table (2.3) présente les coefficients a ,b et c ainsi que la constante du gaz R pour différents type de gaz :

Tableau 2.3 : Coefficients de $C_p(T)$ et des constantes R pour différents types de gaz [38]

N	Gas	a	b	c	$R(J/kg.K)$
1	H ₂	13640.000	1630.000	250.000	4157.250
2	O ₂	936.249	130.624	-52.187	259.828
3	N ₂	1020.712	134.285	-17.857	296.946
4	CO	1014.641	146.428	-16.428	296.946
5	CO ₂	1004.995	199.771	-195.908	188.965
6	H ₂ O	1696.664	571.665	4.444	461.916
7	Air	Polynôme ordre 9 équation (2.26)			287.102

2.7. Calcul numérique des paramètres thermodynamiques

2.7.1 Calcul de la température supersonique T_s correspondant à T_0

L'état générateur est donné par le nombre de Mach nul ($M = 0$) et une température génératrice ou température d'arrêt T_0 , alors les paramètres thermodynamique ($T = T_s, P = P_s, \rho = \rho_s$) correspondant à un nombre de Mach supersonique ($M_s > 1$) à un endroit quelconque de l'écoulement autour de profil d'aile (par exemple à l'infini amont) peuvent être déterminés en remplaçant la dans la relation (2.16) M et T par M_s et T_s respectivement, on obtient [12]:

$$M_s^2 = \frac{2H(T_s)}{a^2(T_s)} \quad (2.30)$$

On peut écrire l'équation (2.30) comme suit :

$$2H(T_s) - M_s^2 \gamma(T_s) r T_s = 0 \quad (2.31)$$

La résolution de l'équation (2.30) pour déterminer la racine T_s se fait par la méthode de dichotomie [36] et [44] ; cette méthode nécessite de fixer un intervalle de température $[T_1, T_2]$ de telle sorte que $f(T_1) \cdot f(T_2) < 0$.

Vu que $T_s < T_0$ on prend : $T_1 = 0^\circ K$ et $T_2 = T_0$

2.7.2. Calcul des rapports thermodynamiques

Les rapports des masses volumiques $\frac{\rho}{\rho_0}$ et des pressions $\frac{P}{P_0}$ donnés par les équations (2.23) et (2.24) respectivement demandent l'intégration de la fonction $F_\rho(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T_0]$. Vu la complexité de la fonction $F_\rho(T)$ donné par la formule (2.21) où l'intégration analytique est impossible, l'intégration numérique est indispensable.

Pour choisir la bonne quadrature d'intégration qui donne la meilleure précision dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds une étude sur la courbe de variation de $F_\rho(T)$ (figure (2.1)) est faite [8-9]. Cette courbe montre que la fonction subit une variation très grande à l'extrémité gauche, alors une quadrature d'intégration de *Simpson* [41] et [45] avec condensation des nœuds au voisinage de T_s (l'extrémité gauche) a été choisie.

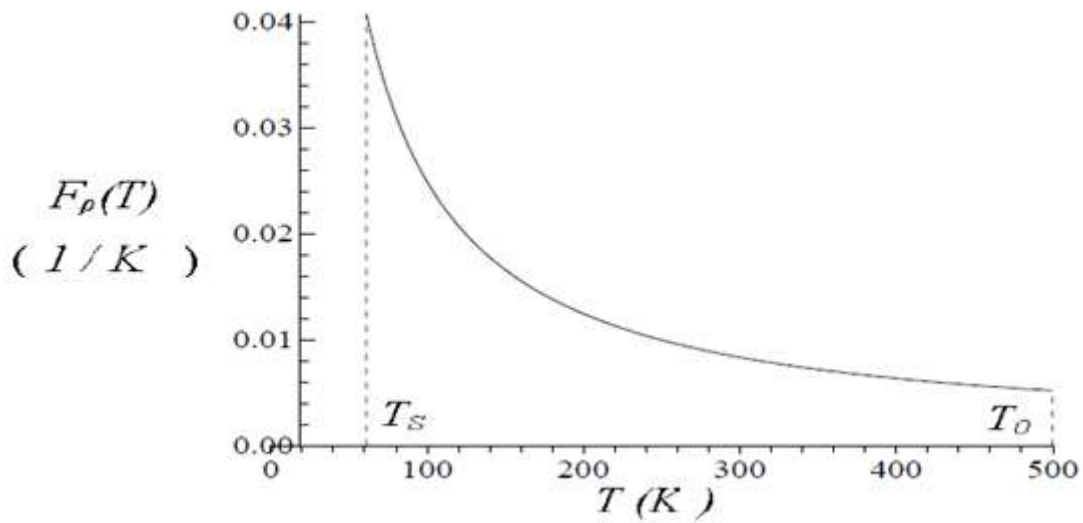


Figure 2.1: Courbe de variation de la fonction $F_\rho(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T_0]$ [8].

Pour le calcul numérique de l'intégral (2.23) par la quadrature de *simpson*, la fonction de condensation utilisée est celle de *Robert* [46] elle est donné par :

$$s_i = b_1 z_i + (1 + b_1) \left(1 - \frac{\tanh(b_2(1-z_i))}{\tanh(b_2)} \right) \quad (2.32)$$

Avec $b_1 = 0.1$, $b_2 = 2$ et $z_i = \frac{i-1}{N-1}$ $1 \leq i \leq N$

La distribution de températures sur les nœuds selon la fonction de condensation est déterminée comme suit :

$$T_i = s_i(T_0 - T_s) + T_s \quad (2.33)$$

Une fois la température T_s est déterminée et l'intégration de la fonction $F_\rho(T)$ est calculée, le rapport des masses volumiques supersonique est obtenu par :

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} = \text{Exp} \left(- \int_{T_s}^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad (2.34)$$

Le rapport des pressions est déterminé en remplaçant ceux de températures et de masses volumiques dans la relation (2.24), on aura :

$$\frac{P_s}{P_0} = \left(\frac{\rho_s}{\rho_0} \right) \left(\frac{T_s}{T_0} \right) \quad (2.35)$$

2.8. Modèle du gaz parfait

2.8.1. Paramètres thermodynamiques

Le modèle du gaz parfait considère la chaleur spécifique C_p et le rapport γ comme constants, les rapports thermodynamiques d'un gaz parfait se résument par les relations suivantes [29-35,41,44,47-52] :

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1} \quad (2.36)$$

$$\frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.37)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{-1}{\gamma-1}} \quad (2.38)$$

2.8.2. Erreur de modèle PG par rapport au modèle HT

Les paramètres thermodynamiques (P, T ou ρ) du modèle HT dépendent de la température génératrice T_0 et de nombre de mach M ; pour raison de comparer les deux modèles un calcul d'erreur entre eux est évalué pour chaque couple (T_0, M) par la relation suivante [41]:

$$\varepsilon_{\text{paramètre}}(\%) = \left| \frac{\text{paramètre}_{PG}}{\text{paramètre}_{HT}} \right| \times 100 \quad (2.39)$$

On rappelle que dans le domaine d'aérodynamique l'erreur est acceptable si elle est inférieure à 5% [21].

CHAPITRE 3

ONDE DE CHOC ET ONDE DE DETENTE

3.1. Introduction

Depuis de nombreuses années, il a été observé qu'un fluide compressible pouvait subir dans certaines conditions, un brusque changement d'état, assimilable à la traversée d'une discontinuité appelée onde de choc ou onde de détente. L'écoulement supersonique autour d'un profil d'aile est un exemple très courant de ce phénomène

Une déviation de l'écoulement sur la surface de profil d'aile peut engendrer une compression ou une détente type Prandtl Meyer. Si la compression est produite dans l'écoulement, une onde de choc se développe au début de la déviation de l'obstacle. Dans le cas contraire, des ondes de détentes se développent au début de la déviation. Dans les deux cas, il y a perturbation de l'écoulement qui se traduit par un changement de tous les paramètres de l'écoulement à travers cette déviation. On peut démontrer qu'à travers le choc, uniquement la température totale [3,8-9] qui se conserve. Alors $T_0 = T_{01} = T_{02}$. Mais la pression et la masse volumique totales changent de valeurs.

D'où $P_{02}/P_{01} = \rho_{02}/\rho_{01} \neq 1.0$.

Pour la détente de Prandtl Meyer, on aura conservation de la température et de la pression totale.

Ce chapitre présente l'effet de la variation de la chaleur spécifique $C_p(T)$ sur un ensemble de paramètres thermodynamiques a travers une onde de choc oblique ainsi que sur l'expression de la fonction de Prandtl-Meyer, selon la même démarche abordée dans le chapitre 2 pour l'étude de l'écoulement supersonique à haute température.

3.2. Ondes dans un écoulement supersonique

L'exemple type qu'on peut énumérer est celui du piston, considérons, donc, un gaz qui se meut par un piston en déplacement plan infini dans la direction x perpendiculaire à son plan. Chaque déplacement infinitésimal du piston dans un sens ou dans l'autre ($dx < 0$ ou $dx > 0$) crée une onde sonore plane ($dp > 0$ ou $dp < 0$) qui se propage à la célérité du son [53].

- Si $dx > 0$:

Au passage de l'onde sonore, le fluide se comprime engendrant l'accroissement de température statique ($dT > 0$), cette onde sera suivie d'une autre qui se propagera isentropiquement plus vite, le fluide étant plus chaud. Il en résulte que les ondes successives finiront par se rattraper et former une onde de compression d'intensité finie (onde de choc).

- Si $dx < 0$:

Les détente successives abaissent la température du fluide, donc leurs vitesses de propagation ne se rattrapent plus, on ne pourra donc pas avoir une onde de détente discontinue. Si, cependant, nous considérons les perturbations infinitésimales créées par les variations de géométrie d'un corps.

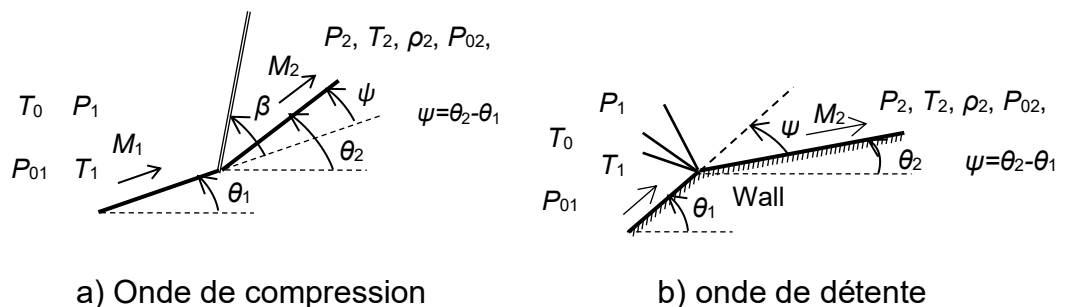


Figure 3.1 : Formation d'ondes de mach.

Autour duquel s'écoule, un air à une vitesse supersonique, les enveloppes des perturbations sont les lignes de Mach issues des arrêtes de la paroi. A la traversée d'une onde quelconque la pression varie de dp , la température de dT , le nombre de Mach de dM et la masse volumique de $d\rho$, positifs ou négatifs suivant le signe de l'angle de déviation ψ .

- Si $\psi > 0$: voir figure (3.1.a)

Il faut nécessairement que les ondes successives se raidissent par rapport à la direction à l'infini amont de l'écoulement. Elles convergent pour former une enveloppe à une distance suffisante de la paroi (onde de choc).

- Si $\psi < 0$: voir figure (3.1.b)

Les ondes de Mach de détente divergent et ne peuvent pas former de discontinuité. On a affaire à une onde de détente de "PRANDTL-MEYER".

3.3. Onde de choc oblique à haute température

Un écoulement supersonique traversant une surface de discontinuité oblique plane stationnaire comme sous le nom d'une "Onde de choc oblique plane" [54-55] subit une variation de vitesse en grandeur et en direction ce qui implique une variation des paramètres thermodynamiques de pression, température et masse volumique.

Un gradient de pression très important règne au travers de l'onde de choc, de ce fait, la température et la densité du fluide augmentent. Cette dernière propriété permet l'observation des ondes de choc. Le processus de compression, très brusque, au travers d'une onde de choc est fortement irréversible. Une grande part de l'énergie cinétique que le fluide possède en amont de la discontinuité est dégradée en chaleur. La température statique au sein de l'écoulement issu de l'onde de choc est supérieure à celle que l'on aurait obtenue lors d'une évolution isentropique. Le nombre de Mach diminue et devient inférieur à un, dans le cas de la traversée d'une onde de choc normale pour laquelle les vecteurs vitesses des écoulements amont et aval sont perpendiculaires au front de l'onde. Le nombre de Mach diminue dans le cas d'une onde de choc oblique, mais l'écoulement est dévié et peut demeurer supersonique.

Cette onde est obtenue en superposant à l'onde de choc normale un écoulement parallèle au choc de vitesse U_t (voir Figure (3.2)) du moment que $U_1 > U_2$, le vecteur vitesse subit, donc une déviation d'angle ψ d'une manière brusque en traversant le choc, son intensité dépend des conditions d'obstructions et du nombre de Mach amont.

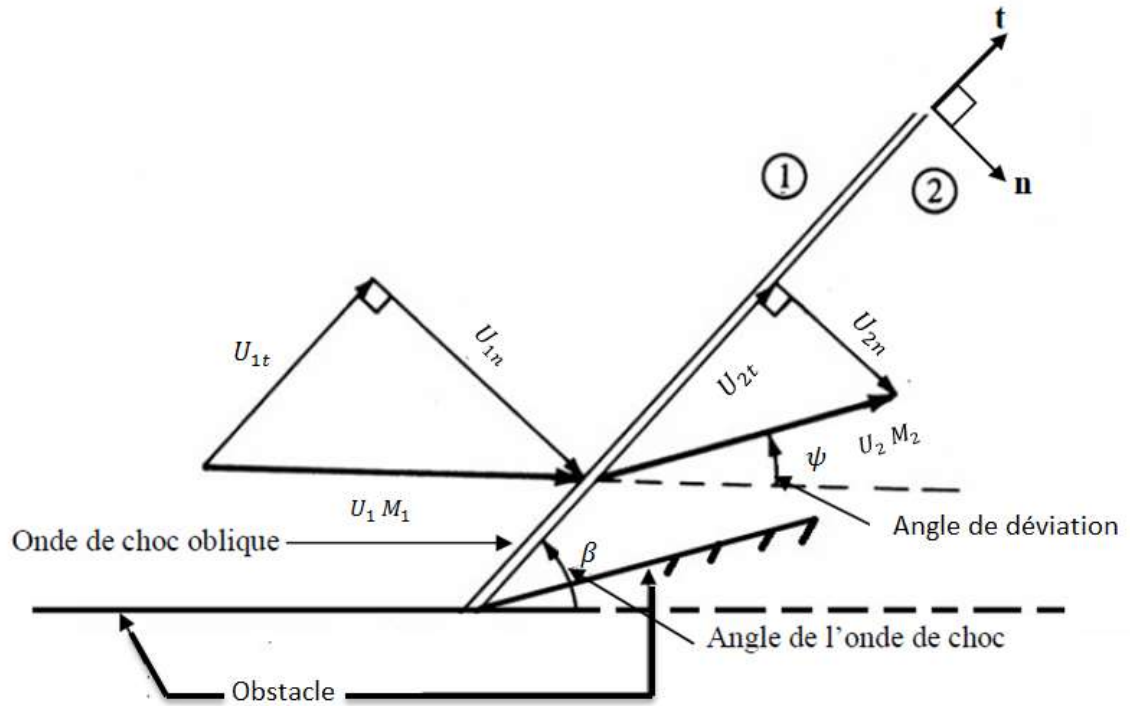


Figure 3.2 : Onde de choc oblique.

Les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie s'écrivent comme suit [53], [56-57]:

$$\begin{cases} \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 \\ \rho_1 U_1^2 + P_1 = \rho_2 U_2^2 + P_2 \\ C_p(T) dT + \frac{1}{2} U_1^2 = C_p(T) dT + \frac{1}{2} U_2^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Les équations de bilan relatives à une onde de choc normale sont immédiates [51,58] car l'écoulement n'est pas dévié : c'est le cas le plus simple pour lequel le fluide subit la plus forte perte de pression d'arrêt. Dans le cas de la traversée d'une onde de choc oblique, des paramètres supplémentaires entrent en considération afin de décrire le changement de direction du fluide β qui a lieu au travers d'une onde de choc attachée

Une onde de choc oblique prend naissance au sein d'un écoulement supersonique lorsqu'une surface impose aux lignes de courant un changement de direction. Ce changement de direction se fait suivant un angle appelé angle de déflexion ou angle de déviation de l'écoulement ψ comme montré sur la figure ci-dessus. En considérant que l'écoulement est stationnaire, bidimensionnel et adiabatique, et qu'aucun extérieur n'entre en jeu, on déduit de U_1 et de U_2 , les composantes tangentielles U_t et normal U_n de l'écoulement amont et aval :

$$\begin{cases} U_{1t} = U_1 \cos \beta \\ U_{1n} = U_1 \sin \beta \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} U_{2t} = U_2 \cos (\beta - \psi) \\ U_{2n} = U_2 \sin (\beta - \psi) \end{cases} \quad (3.3)$$

D'après le théorème de la quantité de mouvement la composante tangentielle de la vitesse s'élimine :

$$Q = M(U_{2t} - U_{1t}) \text{ Où } U_{2t} = U_{1t} = U_t \quad (3.4)$$

la composante U_t s'élimine dans l'équation d'énergie, de plus U_1, U_2, M_1 et M_2 deviennent respectivement U_{1n}, U_{2n}, M_{1n} et M_{2n} ; les équations de conservation du système (3.1) deviennent :

- de masse :

$$\rho_1 U_{1n} = \rho_2 U_{2n} \quad (3.5)$$

- de quantité de mouvement suivant la normale :

$$\rho_1 U_{1n}^2 + P_1 = \rho_2 U_{2n}^2 + P_2 \quad (3.6)$$

- de quantité de mouvement suivant la tangente :

$$\rho_1 U_{1n} U_{1t} = \rho_2 U_{2n} U_{2t} \rightarrow U_{1t} = U_{2t} \quad (3.7)$$

- de l'énergie :

$$\int_{T_1}^{T_0} C_P(T) dT + \frac{1}{2} U_{1n}^2 = \int_{T_2}^{T_0} C_P(T) dT + \frac{1}{2} U_{2n}^2 \quad (3.8)$$

Avec :

$$H(T) = \int_T^{T_0} C_P(T) dT \quad (3.9)$$

L'équation d'énergie peut être écrite comme suit :

$$2H(T_1) - U_{1n}^2 = 2H(T_2) - U_{2n}^2 \quad (3.10)$$

On peut écrire l'équation (3.10) sous la forme suivante :

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = (U_{1n} - U_{2n})(U_{1n} + U_{2n}) \quad (3.11)$$

A l'aide de l'équation (3.5) et (3.6) on peut écrire :

$$U_{1n} - U_{2n} = \frac{P_2 - P_1}{\rho_1 U_{1n}} \quad (3.12)$$

En remplaçant l'équation (3.12) dans (3.11) et on utilisant l'équation (3.5) on aura :

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) (P_2 - P_1) \quad (3.13)$$

En éliminant la pression par l'utilisation de l'équation d'état (2.1) on aura :

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) (\rho_2 r T_2 - \rho_1 r T_1) \quad (3.14)$$

On multiplie l'équation par $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ et on simplifie le résultat, on obtient :

$$\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{2H(T_1) - 2H(T_2)}{r T_1} - 1 + \frac{T_2}{T_1}\right) \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 = 0 \quad (3.15)$$

L'équation (3.15) est une équation non linéaire avec deux inconnues $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ et T_2 ,

pour ce fait on cherche à trouver une seconde équation pour former un système de deux équations à deux inconnues.

En utilisant l'équation de la conservation de masse, L'équation (3.12) peut s'écrire comme suit :

$$P_1 - P_2 = \rho_1 U_{1n} \left(\frac{\rho_1 U_{1n}}{\rho_2} - U_{1n} \right) \quad (3.16)$$

On divise l'équation par P_1 et on élimine la pression en utilisant l'équation d'état (2.1) on aura :

$$1 - \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1} = \frac{1}{r T_1} \left(U_{1n}^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} - U_{1n}^2 \right) \quad (3.17)$$

On multiplie l'équation (3.17) par $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ et on fait apparaitre le nombre de mach par

l'utilisation des équations (2.6) et (2.9) on obtient:

$$\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 - \left(1 + M_{1n}^2 \gamma(T_1)\right) \frac{\rho_2}{\rho_1} + M_{1n}^2 \gamma(T_1) = 0 \quad (3.18)$$

Avec :

$$M_{1n} = M_1 \sin \beta \quad (3.19)$$

L'équation (3.18) devient :

$$\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 - \left(1 + M_1^2 \sin^2(\beta) \gamma(T_1) \right) \frac{\rho_2}{\rho_1} + M_1^2 \sin^2(\beta) \gamma(T_1) = 0 \quad (3.20)$$

D'où le rapport de température est calculé par :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - M_1^2 \sin^2(\beta) \gamma(T_1) \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2} \quad (3.21)$$

Pour la détermination de nombre de mach M_2 nous remplaçons l'expression de U_{1n} trouver de l'équation de quantité de mouvement (3.6) dans l'équation de l'énergie (3.10) ; on obtient :

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = \frac{P_2 - P_1}{\rho_1} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) U_{2n}^2 \quad (3.22)$$

En utilisant les équations (3.13), (2.6) et (2.9) l'équation(3.22) donne après simplification:

$$M_{2n}^2 = \frac{\frac{P_2}{P_1} - 1}{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \gamma(T_2) \frac{P_2}{P_1}} \quad (3.23)$$

Avec :

$$M_{2n} = M_2 \sin(\beta - \psi) \quad (3.24)$$

L'expression de M_2 est donné par :

$$M_2^2 = \frac{1 - \frac{P_2}{P_1}}{\sin^2(\beta - \psi) \gamma(T_2) \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{P_2}{P_1}} \quad (3.25)$$

Deux solutions peuvent être trouvées selon la valeur de M_2 , ce qui implique que tous les paramètres physique admettront deux solutions. Si $M_2 \geq 1.00$, on obtient un choc faible. Si $M_2 < 1.00$, un choc fort est obtenu. En général, le choc faible qui se produit dans la nature.

A partir des deux systèmes (3.2) et (3.3) la détermination du rapport de masse volumique se fait comme suit :

$$\begin{cases} \tan \beta = \frac{U_{1n}}{U_{1t}} \\ \tan(\beta - \psi) = \frac{U_{2n}}{U_{2t}} \end{cases} \quad (3.26)$$

Comme $U_{1t} = U_{2t}$ et en utilisant l'équation de continuité on obtient :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{U_{1n}}{U_{2n}} = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\psi)} \quad (3.27)$$

Le rapport de pression est calculé en utilisant l'équation d'état des gaz parfait (2.1), il est donné par :

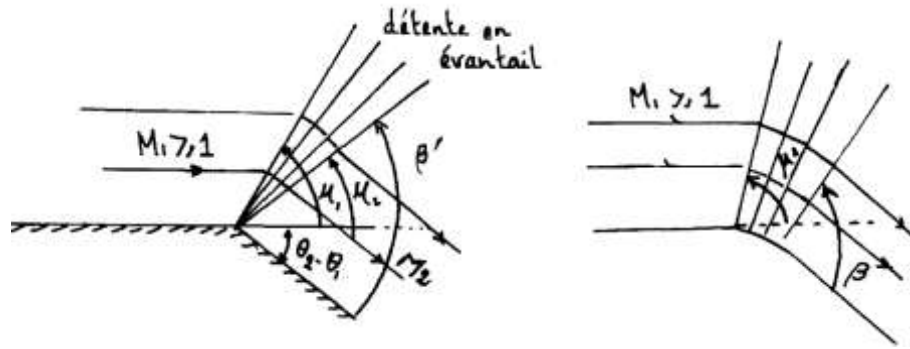
$$\frac{P_2}{P_1} = \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} \right] \left[\frac{T_2}{T_1} \right] \quad (3.28)$$

Avant la détermination des paramètres de l'écoulement par les relations (3.21) (3.23) (3.25) (3.27) et (3.28) il faut déterminer, en premier lieu, l'angle β correspondant à ψ et M_1 . Alors dans ce travail, on va déterminer la déviation β avec précision élevée selon le modèle *HT* réel. Comme le développement d'une relation analytique reliant β , ψ et M_1 est assez compliqué,

Pour la détermination des paramètres (M_2 , β , T_2/T_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} , ΔS_{21}) à travers le choc oblique, on a utilisé le modèle *HT* présenté dans les références [59-62] après faire une correction à la relation entre β , ψ et M_1 , puisque les auteurs ont utilisés l'équation conçue pour le modèle *GP* à C_P constant [59], vu la difficulté de trouver une forme analytique, ce qui donne des résultats assez loin de la réalité et qui ne répond pas au besoin à *HT*. La dite équation est la plus intéressante dans le calcul des paramètres de choc, vu que tous les autres paramètres dépendent de β , ψ et M_1 . Alors en sens des résultats, on va trouver des corrections aux résultats présentées dans les dites références.

3.4. Détente de Prandtl Meyer à haute température

Quand l'écoulement est tourné par une surface concave (Figure (3.2)), la compression de l'écoulement le fait tourner d'un angle θ et provoque la naissance d'une onde de choc oblique, la question donc posée est, comment l'écoulement est tourné autour d'un coin convexe au courant d'air ? (voir Figure (3.3)). Comme suggéré par la figure, celle-ci est accomplie à travers un ensemble continu d'ondes de détente faibles connues comme une détente en éventail, [51,53,63].



a) Expansion autour d'un dièdre b) Expansion autour d'une paroi courbée

Figure 3.3 : Expansion supersonique

La Figure (3.3.a) nous montre une expansion de "PRANDTL - MEYER" qui n'est pas possible sur les fondements et les bases thermodynamiques, l'onde formée représente un cas limite d'entropie en travers de l'onde.

De là, les changements de rotations et de vitesses sont montrés comme différentiels au lieu des changements finis. Du fait que l'onde est faible, elle se propage, donc, normale à elle-même à une vitesse acoustique "a" qui s'additionne vectoriellement à la vitesse du courant libre "U₀" définissant l'angle de l'onde de mach μ comme étant :

$$\mu = \sin^{-1} \frac{1}{M} \quad (3.29)$$

L'expansion à travers un coin convexe (Figure (3.3.a)) s'effectue à partir d'une onde centrée définie par un éventail des lignes de Mach droites en formant un angle de Mach μ_1 entre la direction de l'écoulement amont avec la première onde de Mach et un deuxième angle μ_2 formé entre la direction de l'écoulement après la dernière détente et la dernière onde de Mach , ses deux angles sont donnés par :

$$\mu_1 = \sin^{-1} \frac{1}{M_1} , \mu_2 = \sin^{-1} \frac{1}{M_2} \quad (3.30)$$

3.4.1. Formulations mathématiques

La situation de la présence d'une détente de type Prandtl Meyer est présentée dans la figure (3.1.b). Dans ce cas on aura une déviation d'un angle $\psi = |\theta_2 - \theta_1|$. L'écoulement devient parallèle à la paroi après la déviation et le calcul

des paramètres après la détente se fait après le calcul de la nouvelle valeur de la fonction de Prandtl Meyer.

la petite déviation d'écoulement $d\theta$ en aval de l'onde est liée à une différence de vitesse ΔU par la relation suivante [30,32-35,39,50-51] :

$$d\theta = -\frac{\cot \mu}{U} dU \quad (3.31)$$

En remplaçant l'expression de μ donnée par l'équation (3.29) dans la relation (3.31), après simplification on aura :

$$dv = -d\theta = (M^2 - 1)^{1/2} \frac{dU}{U} \quad (3.32)$$

Cette relation est la plus importante dans l'étude des écoulements supersoniques isentropique interne ou externe qui subissent une détente de type Prandtl Meyer. La déviation de l'écoulement est donnée par l'angle $d\theta$, cet angle est considéré positif si l'écoulement subit une onde de compression et négatif dans le cas d'une onde de détente.

L'expression de v sera calculée en intégrant la relation (3.32) après faire exprimer le rapport $\frac{dU}{U}$, le nombre de mach et $\gamma(T)$ par leurs expressions données par (2.15), (2.16) et (2.4) respectivement :

$$\int dv = - \int F_v(T) dT \quad (3.33)$$

Avec :

$$F_v(T) = \frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{\frac{2H(T)}{a^2} - 1} \quad (3.34)$$

Tous les paramètres qui rentrent dans le calcul de la fonction de Prandtl Meyer v varient avec la température ce qui signifie que la température est un paramètre très important dans la détermination de cette fonction contrairement au modèle gaz parfait où la variable est le nombre de mach seulement ; d'où l'intégration de la relation (3.34) entre deux états 1 et 2 donne :

$$v_2 - v_1 = \psi = \int_{T_1}^{T_2} -F_v(T) dT \quad (3.35)$$

La nouvelle valeur de la fonction de Prandtl Meyer peut être exprimée par la relation suivante :

$$\nu(T_2) = \nu(T_1) + \psi \quad (3.36)$$

On note que la fonction ν est définie purement dans l'écoulement supersonique, ce qui veut dire que pour un nombre de mach $M = 1$ on prend $\nu = 0$.

L'intégration de la fonction $F_\nu(T)$ se fait donc pour un nombre de mach $M > 1$ c'est-à-dire la température soit inférieure à la température critique ($T < T_*$), la valeur de ν est donnée par [10-11] :

$$\nu(T) = \int_T^{T_*} F_\nu(T) dT = \int_T^{T_*} \left(\frac{C_P(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} \right) dT \quad (3.37)$$

On note que la fonction de Prandtl Meyer d'un gaz parfait est un cas particulier de la forme général donnée par l'équation (3.37) en annulant tous les coefficients de la variation du polynôme $C_p(T)$ avec la température sauf le premier.

On rappelle la fonction de Prandtl Meyer d'un gaz parfait [29] :

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} (M^2 - 1) \right]^{1/2} - \tan^{-1} (M^2 - 1)^{1/2} \quad (3.38)$$

3.4.2. Calculs de l'intégral par la méthode de Simpson :

La détermination de la fonction de Prandtl Meyer ν_s correspondant au nombre de Mach M_s quand $T = T_s$ demande l'intégration de la fonction $F_\nu(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T_*]$.

Afin de choisir la quadrature d'intégration la plus adéquate pour la méthode de Simpson nous présentons l'allure de la fonction $F_\nu(T)$ pour $T_0 = 500K$ (limite de la basse température) et $M_s = 5$ (extrême de régime supersonique) [12]

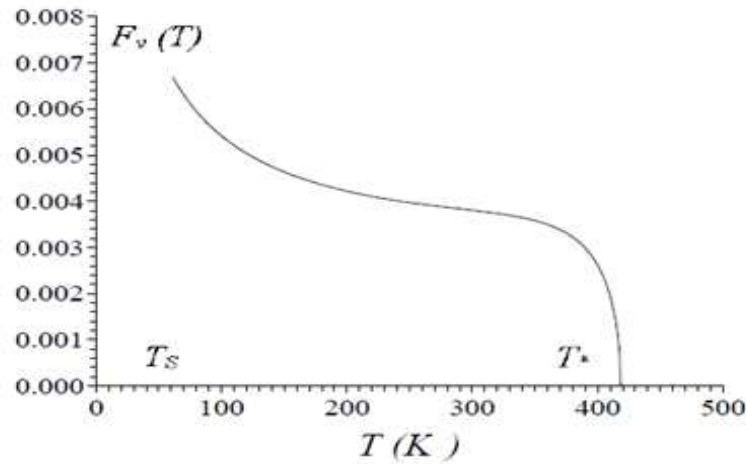


Figure 3.4 : Variation de la fonction $F_v(T)$

Nous remarquons une variation très rapide de la fonction $F_v(T)$ aux extrémités de l'intervalle ce qui exige une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision. La quadrature à pas constant dans notre cas est déconseillée car il nécessite un nombre de nœuds très grand et un temps de calcul très élevé [12].

Une condensation des nœuds au voisinage de T_s et T_* est obligatoire, cette quadrature sert à minimiser le nombre de nœuds et donner un résultat avec une précision élevée à un temps réduit.

La quadrature choisie est celle de Simpson avec condensation des nœuds aux extrémités gauche et droite où la distribution de la température se fait par la relation (2.33) [10] :

La forme de condensation est présentée par la relation (2.32) dans le chapitre précédent, cette relation sert uniquement à condenser les nœuds vers l'extrémité gauche ou droite.

L'intégrale de notre fonction $F_v(T)$ nécessite une condensation de nœuds vers les deux extrémités, l'utilisation de la relation (2.32) est valable après avoir divisé l'intervalle $[T_s, T_*]$ en deux parties $[T_s, T_M]$ et $[T_M, T_*]$ où :

$$T_M = \frac{T_s + T_*}{2} \quad (3.39)$$

Une condensation de nœuds par la relation (2.32) vers l'extrémité gauche T_s se fait dans l'intervalle $[T_s, T_M]$ en prenant b_1 proche de zéro et $b_2 = 2.0$, et on

refait la même chose pour condenser les nœuds vers l'extrémité droite T_* dans l'intervalle $[T_M, T_*]$ avec $b_1 = 2.0$ et b_2 proche de zéro [10].

3.4.3. Procédure de calcul

- **Calcul de la température critique T_* :**

En premier lieu, il faut calculer la température T_* critique correspondante au nombre de Mach $M = 1$. Cette température dépend uniquement de T_0 . Elle peut être déterminée par la résolution de l'équation non linéaire obtenu à partir de la relation (2.16) en remplaçons $M = 1$ et $T = T_*$ en utilisant l'algorithme de bipartition [41,64-65]. Cette température $T_* < T_0$. Elle est déterminée une fois dans le calcul.

- **Calcul de $\nu(T_1)$:**

Une fois que T_* est calculée et ψ et T_1 sont connues la fonction $\nu(T_1)$ peut être calculée par la relation (3.37) en remplaçant $T = T_1$. L'évaluation de l'intégrale obtenue est faite par l'utilisation de quadrature de Simpson avec condensation des nœuds [10].

- **Calcul de $\nu(T_2)$:**

Remplaçons le résultat obtenu $\nu(T_1)$ dans la relation (3.36) pour déterminer la nouvelle valeur $\nu(T_2)$.

- **Calcul de T_2 :**

Remplaçons la valeur obtenue $\nu(T_2)$ dans la relation (3.37). Dans ce cas on tombe dans un problème inverse. C'est-à-dire, il faut déterminer la température T_2 qui donne l'intégrale (3.37) égale à la valeur donnée par (3.36). Pour déterminer T_2 à partir de (3.37) on a utilisé une combinaison entre l'algorithme de dichotomie avec la quadrature de Simpson. Il est à noter que $T_2 < T_*$. La précision qu'on a opté dans le calcul c'est $\varepsilon = 10^{-8}$. Dans ce cas l'algorithme de dichotomie est utilisé 27 fois.

- **Calcul des paramètres thermodynamiques :**

Une fois qu'on détermine T_2 , on peut obtenir le rapport correspondant T_2/T_0 et le nombre de Mach M_2 par la relation (2.16) et ρ_2/ρ_0 et P_2/P_0 respectivement par les relations (2.23) et (2.24). On aura une augmentation de nombre de Mach, c'est-à-dire $M_2 > M_1$. L'intégration (2.23)

est faite par l'utilisation de la méthode de Simpson avec condensation des nœuds.

3.5. La température totale et Pression totale :

Suivant la définition de la vitesse donnée par la relation (2.14) on peut écrire :

- Dans l'intervalle $[T_{01}, T_1]$ $U_1^2 = 2 \int_{T_1}^{T_{01}} C_P(T) dT$ (3.40)

- Dans l'intervalle $[T_{02}, T_2]$ $U_2^2 = 2 \int_{T_2}^{T_{02}} C_P(T) dT$ (3.41)

- Dans l'intervalle $[T_1, T_2]$ $U_2^2 - U_1^2 = 2 \int_{T_2}^{T_1} C_P(T) dT$ (3.42)

Nous faisons une combinaison entre les équations (3.40), (3.41) et (3.42) on aura le résultat suivant :

$$2 \int_{T_2}^{T_{02}} C_P(T) dT - 2 \int_{T_1}^{T_{01}} C_P(T) dT = 2 \int_{T_2}^{T_1} C_P(T) dT \quad (3.43)$$

D'autre part l'équation (3.42) peut s'exprimer comme suit :

$$2 \int_{T_2}^{T_1} C_P(T) dT = 2 \int_{T_2}^{T_{02}} C_P(T) dT + 2 \int_{T_{02}}^{T_{01}} C_P(T) dT + 2 \int_{T_{01}}^{T_1} C_P(T) dT \quad (3.44)$$

Alors pour que les deux relations (3.43) et (3.44) soient conformes on doit mettre

$$\int_{T_{02}}^{T_{01}} C_P(T) dT = 0$$

Autrement dit $T_0 = T_{01} = T_{02}$

Ce qui nous ramène à dire que la température totale pour un gaz à haute température est conservée.

Le rapport de la masse volumique peut être calculé par la relation suivante :

$$\frac{\rho_2}{\rho_{02}} = \text{Exp} \left(- \int_{T_2}^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad (3.45)$$

Le rapport de la pression totale est donné par :

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\left[\frac{P_2}{P_1} \right] \left[\frac{P_1}{P_{01}} \right]}{\left[\frac{P_2}{P_{02}} \right]} \quad (3.46)$$

Avec :

$$\frac{P_2}{P_{02}} = \left[\frac{T_2}{T_0} \right] \left[\frac{\rho_2}{\rho_{02}} \right] \quad (3.47)$$

Le rapport $\frac{P_{02}}{P_{01}}$ s'agit d'une perte de pression totale due au choc, ou d'une perte de charge.

Notons qu'à travers le faisceau d'ondes (détente), la pression totale reste constante $P_{01} = P_{02} = P_0$.

3.6. La variation d'entropie :

A travers un choc, la variation de la pression totale peut être regardée en utilisant le changement d'entropie. Notamment :

$$\Delta S_{21} = S_2 - S_1 = C_p \ln \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right) - R \ln \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right) \quad (3.48)$$

Et comme la température est conservée à travers un choc, la variation d'entropie est donnée par la relation suivante :

$$\Delta S_{21} = S_2 - S_1 = -R \ln \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right) \quad (3.49)$$

Vu que la température totale ainsi que la pression totale sont conservées pour l'expansion alors la variation d'entropie est égale à zéro.

CHAPITRE 4

. CALCUL DE L'AERODYNAMIQUE NUMERIQUE D'UN PROFIL D'AILE POINTU

4.1. Introduction

Notre but est de déterminer les caractéristiques aérodynamiques qui se résument par la variation de $M, T/T_0, P/P_0, \rho/\rho_0$ le long de la surface de profil et par suite la détermination des coefficients aérodynamiques C_D, C_L et C_m pour différents profils d'ailes.

La méthode des chocs et détente est appliquée en utilisant les formules des ondes de choc oblique et celles des détente de Prandtl-Meyer d'un gaz à haute température inférieur au seuil de dissociation des molécules.

Cette méthode est applicable à des profils tranchants minces et à faibles angles d'incidences afin de s'éloigner de la région du détachement du choc et se permettre à voir une solution de choc attaché. Le profil est subdivisé en panneaux assimilés à des plaques planes infiniment petites placées l'un adjacente à l'autre [54]. L'écoulement subira donc une déviation le long du profil soit une compression ou une détente selon l'angle de déviation par rapport au panneau adjacent précédent.

4.2. Méthode de discrétisation

4.2.1. Calcul de l'angle de déviation de l'écoulement

Dans la figure (4.1) on a représenté le cas de la déviation de l'écoulement sur l'extrados. Pour l'intrados, il se produit le cas contraire. Pour regrouper le problème dans une seule relation on a utilisé la valeur absolue pour l'évaluation de l'angle ψ . Dans le programme développé, on calcul en premier lieu l'angle $\psi = \theta_2 - \theta_1$, ensuite si nous sommes sur l'extrados, la détente se produit si $\psi < 0.0$ et une compression se produit si $\psi > 0.0$. Dans la région de l'intrados, la compression s'obtient pour $\psi < 0.0$, et l'expansion pour $\psi > 0$, contrairement au

cas de l'extrados. Il peut y avoir un choc détaché si l'angle ψ dépasse l'angle ψ_{max} .

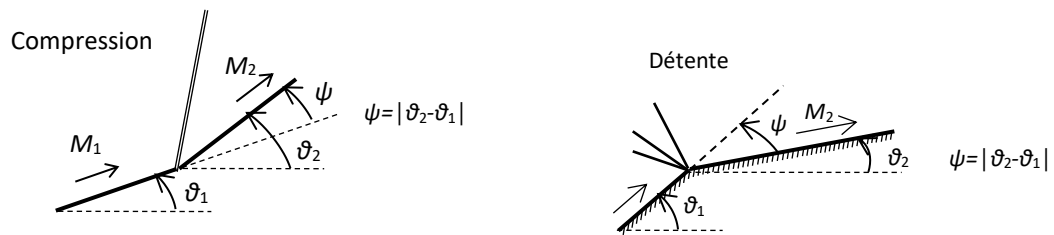


Figure 4.1 : Déviation de l'écoulement sur l'extrados selon l'angle ψ

Nous étudions maintenant les différents cas possibles de compression et de l'expansion selon la valeur de ψ :

- Sur l'extrados :

Les différents cas possibles de compression sont les suivants:

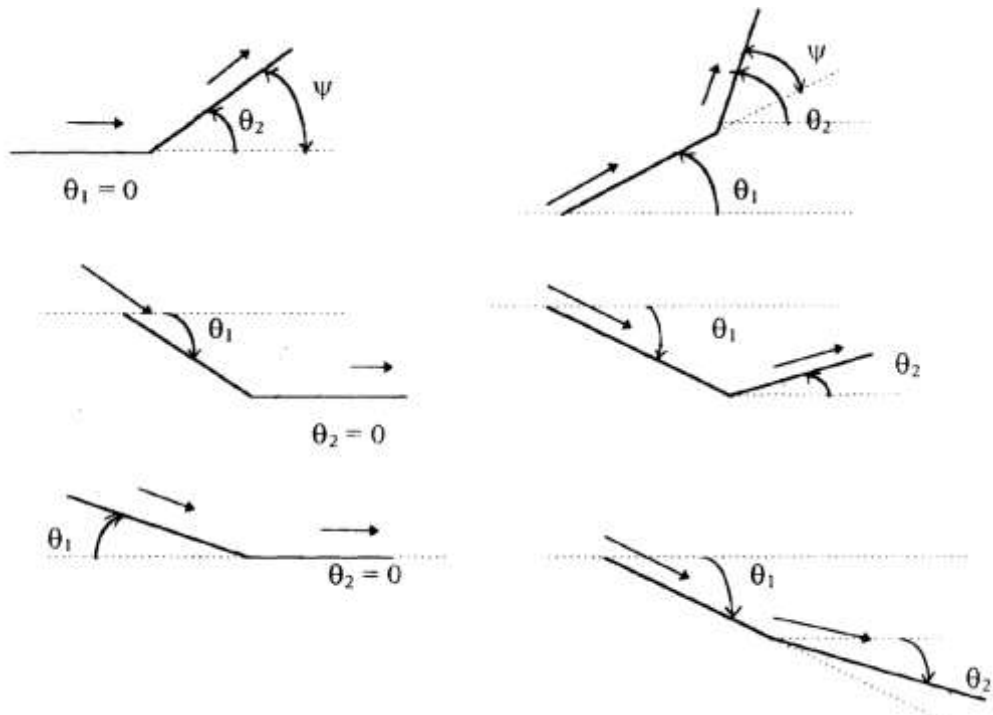


Figure 4.2: Compression sur l'extrados.

Les différents cas possibles de détente sont les suivants :

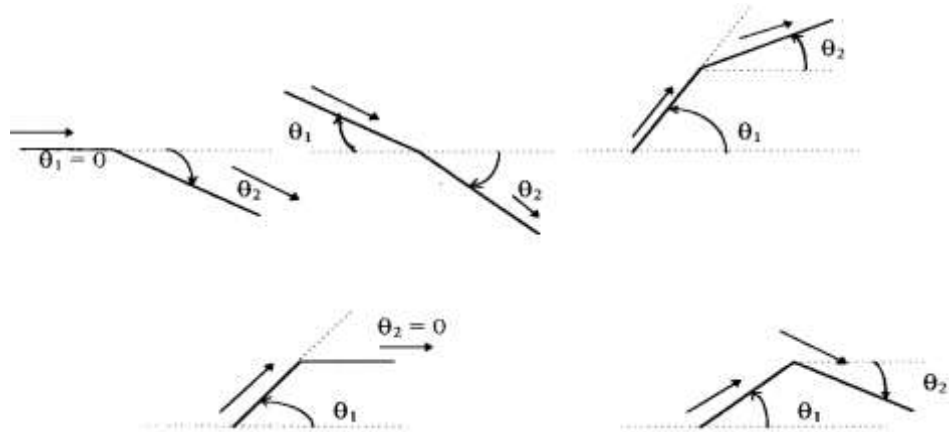


Figure 4.3 : Détente sur l'extrados.

- Sous l'intrados:

Les différents cas possibles de compression sont les suivants :

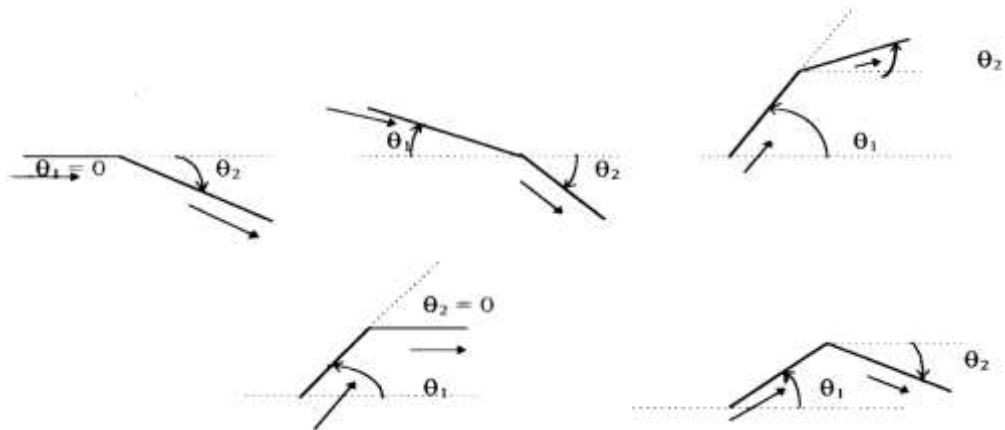


Figure 4.4: Compression sous l'intrados.

Les différents cas possibles de détente sont les suivants:

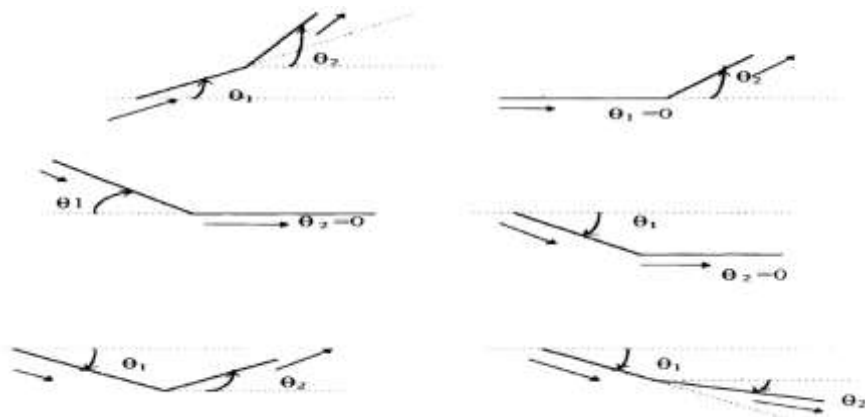


Figure 4.5: Détente sous l'intrados.

Nous pouvons rencontrer des cas où l'écoulement sur l'extrados et sous l'intrados ne subit aucune déviation c'est à dire $\psi = 0 \Rightarrow \theta_2 = \theta_1$ comme montre la figure (4.6). Ainsi les propriétés de l'écoulement restent inchangées (ni compression ni détente).

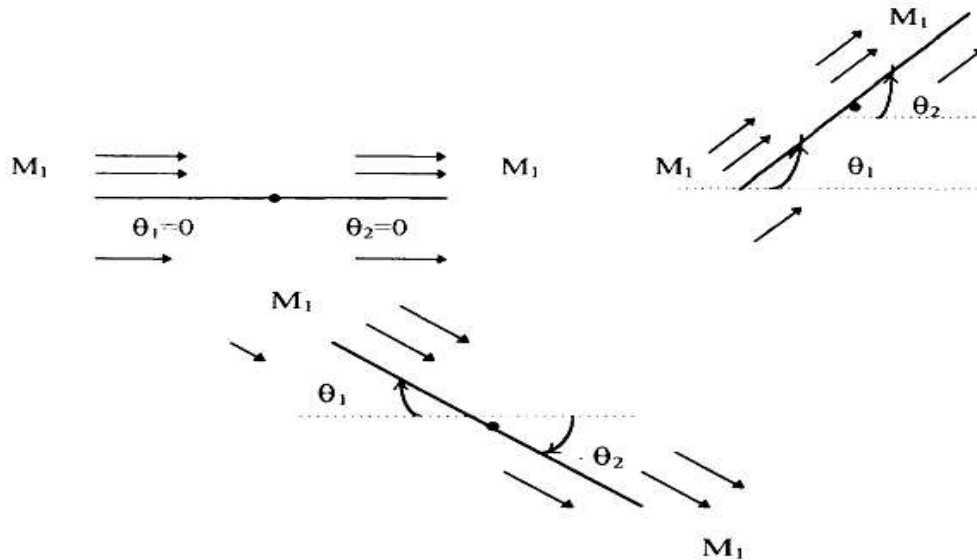


Figure 4.6 : cas de $\psi = 0$.

4.2.2 Discrétisation des profils

La discrétisation de profil se fait en subdivisant la surface supérieure de profil en k nœuds et la surface inférieure en l nœuds comme montre la figure (4.7). Le nombre total des nœuds sur la surface de profil est égale à $n = k + l - 2$. Le nombre des régions sur la surface supérieure est égale à $k - 1$ et sur la surface inférieure est égale à $l - 1$.

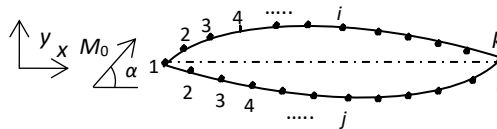


Figure 4.7: Discrétisation de profile

L'écoulement venant de l'infini amont est divisé en deux parties au bord d'attaque de profil (point 1). Une partie par la surface supérieure et l'autre par la surface inférieure, de sorte que les deux lignes se rencontrent à nouveau aux bords de fuite.

Chaque deux panneaux juxtaposés, sont reliés par un nœud, au niveau de chaque nœud, l'écoulement subit une déviation en engendrant soit une compression soit une expansion, soit continu de la même nature en traversant celui-ci.

4.2.2.1 Position des nœuds

Pour déterminer les coordonnées de la position d'un nœud i sur la surface supérieure (x_{E_i}, y_{E_i}) ou la surface inférieure (x_{I_j}, y_{I_j}) on choisit un repère orthonormé (O, x, y) et un pas assez petit représentant l'abscisse de ce même point. Le pas peut être constant ou variable et les coordonnées de repère sont sélectionnées au bord d'attaque de profil. En remplaçant l'abscisse x dans l'équation de profil on peut déterminer l'ordonnée qui correspond y_{E_i} ou y_{I_i} par les relations suivantes :

$$x_{E_i} = \frac{(i-1)}{(k-1)} \times C, \quad y_{E_i} = f_E(x_{E_i}) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.1)$$

$$x_{I_j} = \frac{(j-1)}{(l-1)} \times C, \quad y_{I_j} = f_E(x_{I_j}) \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (4.2)$$

L'angle de déviation de l'écoulement $\psi = \theta_{i+1} - \theta_i$ est un paramètre très important dans le calcul, sa détermination nécessite le calcul de l'angle θ_i que fait un segment de droite relié entre les points i et $i + 1$ avec l'horizontal par la relation suivante :

$$\theta_i = \tan^{-1} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \quad (4.3)$$

Avec : $i = 1, 2, \dots, k$ pour l'extrados, et $i = 1, 2, \dots, l$ pour l'intrados.

4.2.2.2 Calcul des caractéristiques aérodynamiques de l'écoulement

L'écoulement des régions (i) située sur l'extrados et (j) située sous l'intrados sont données respectivement par les régions précédentes $(i - 1)$ et $(j - 1)$. L'écoulement sur le panneau 1 de la surface supérieure ou inférieure est donné par la région 0 de l'infini amont qui fournit des données libres.

Le calcul des propriétés de l'écoulement aval tels que la température, la pression, la masse volumique et le nombre de mach se fait à partir des formules trouvées dans le Chapitre 3 et sont obtenus tout dépend de la forme du choc. L'indice "1" indiquera les propriétés en amont, et "2" les propriétés en aval.

On rappelle que le nombre de Mach M_2 de l'écoulement traversant une expansion augmente c'est-à-dire $M_2 > M_1$. Par contre la compression va diminuer le nombre de Mach $M_2 < M_1$. on considère que le choc est faible (cas réel) autrement dit M_2 est supersonique ($M_2 > 1$).

La figure (4.8) illustre les forces de pression sur un panneau i de la surface supérieure limité par le nœud i à gauche et le nœud $i + 1$ à droite et un panneau j de la surface inférieure limité par le nœud j à gauche et le nœud $j + 1$ à droite.

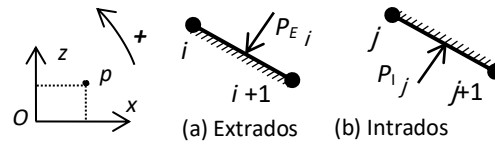


Figure 4.8 : Présentation des forces sur un panneau.

Les pressions P_{E_i} et P_{I_j} sont décomposées en deux composantes, comme il est montré sur la figure (4.8). Les composantes verticales qui représentent la force de portance sont L_{E_i} sur la surface supérieure et L_{I_j} sur la surface inférieure et de même pour les composantes horizontales qui représentent la force de trainée sont D_{E_i} sur la surface supérieure et D_{I_j} sur la surface inférieure. Le moment de tangage des deux forces exercées sur l'extrados est nommé par m_{E_i} et le moment des deux forces exercées sur l'intrados est m_{I_j} . Le moment de tangage est calculé par rapport au point p , voir figure (4.8). Pour les applications, on a pris $p = 0$.

Ensuite, sur la surface supérieure et par unité de profondeur, nous avons :

$$L_{E_i} = -P_{E_i} \times (x_{E_{i+1}} - x_{E_i}) \quad (4.4)$$

$$D_{E_i} = P_{E_i} \times (y_{E_{i+1}} - y_{E_i}) \quad (4.5)$$

$$m_{E_i} = -L_{E_i} \left(\frac{x_{E_{i+1}} + x_{E_i}}{2} - x_p \right) - D_{E_i} \left(\frac{y_{E_{i+1}} + y_{E_i}}{2} - y_p \right) \quad (4.6)$$

Avec $i = 1, 2, \dots, k - 1$

Sur la surface inférieure et par unité de profondeur, nous avons :

$$L_{I_j} = P_{I_j} \times (x_{I_{j+1}} - x_{I_j}) \quad (4.7)$$

$$D_{I_j} = -P_{I_j} \times (y_{I_{j+1}} - y_{I_j}) \quad (4.8)$$

$$m_{I_j} = L_{I_j} \left(\frac{x_{I_{j+1}} + x_{I_j}}{2} - x_p \right) - D_{I_j} \left(\frac{y_{I_{j+1}} + y_{I_j}}{2} - y_p \right) \quad (4.9)$$

Avec: $j = 1, 2, \dots, l - 1$.

On note que le nombre de nœuds k sur la surface supérieure n'est pas nécessairement égale au nombre de nœuds l sur la surface inférieure. Pour les applications le bord d'attaque est placé au point O de la référence de calcul.

La portance totale et la trainée totale à travers le profil sont respectivement considérées comme la somme des forces sur tous les panneaux (régions) de la surface supérieures et inférieure.

$$L = (L_{E_1} + L_{E_2} + \dots + L_{E_k}) + (L_{I_1} + L_{I_2} + \dots + L_{I_l}) \quad (4.10)$$

$$D = (D_{E_1} + D_{E_2} + \dots + D_{E_k}) + (D_{I_1} + D_{I_2} + \dots + D_{I_l}) \quad (4.11)$$

$$m = (m_{E_1} + m_{E_2} + \dots + m_{E_k}) + (m_{I_1} + m_{I_2} + \dots + m_{I_l}) \quad (4.12)$$

Le moment de tangage est considéré positif lorsqu'il tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Les coefficients aérodynamiques sont obtenus comme suit :

$$C_L = \frac{L}{q_0 \times S} \quad (4.13)$$

$$C_D = \frac{D}{q_0 \times S} \quad (4.14)$$

$$C_m = \frac{m}{q_0 \times S \times C} \quad (4.15)$$

Où :

$$q_0 = \frac{1}{2} \gamma(T_0) P_0 M_0^2 \quad (4.16)$$

La surface de référence S est considérée comme la corde de profil par unité de profondeur.

En variant les paramètres $M_0, t/C, \alpha$ et T_0 ainsi que la forme de profil d'aile, on peut trouver tous les paramètres possibles et en particulier l'effet de T_0 lorsque qu'elle soit élevée. Une comparaison entre le modèle *PG* et le modèle *HT* est effectué.

4.3. Centre dynamique des gaz

Il est souvent intéressant de déterminer la position du centre dynamique du gaz équivalent pour les coefficients C_D , C_L , et C_m . La figure (4.9) représente un

schéma général sur la détermination de la position du centre dynamique des gaz par rapport à l'extrados du profil d'aile LE.

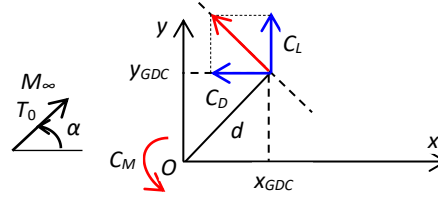


Figure 4.9 : présentation du centre dynamique des gaz

De la figure (4.9) on peut écrire les relations suivantes :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{C_D}{C_L}\right) \quad (4.17)$$

$$\frac{d}{c} = \frac{C_m}{\sqrt{C_D^2 + C_L^2}} \quad (4.18)$$

$$\frac{x_{GDC}}{C} = d \cos(\varphi) \quad (4.19)$$

$$\frac{y_{GDC}}{C} = d \sin(\varphi) \quad (4.20)$$

Selon la référence [66], on a :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (4.21)$$

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (4.22)$$

En remplaçant (4.21) et (4.22) dans (4.17) ensuite dans (4.19) et (4.20) on obtient finalement la position du centre dynamique des gaz par les relations suivantes :

$$\frac{x_{GDC}}{C} = \frac{C_m C_L}{C_D^2 + C_L^2} \quad (4.23)$$

$$\frac{y_{GDC}}{C} = \frac{C_m C_D}{C_D^2 + C_L^2} \quad (4.24)$$

4.4. Présentation des profils d'ailes supersonique utilisés

Nous avons opté pour trois types de profils supersoniques qui sont :

- Le profil losange symétrique
- Le profil courbé symétrique
- Le profil courbé non symétrique ou squelettique

Le calcul de moment de tangage est fait par rapport au bord d'attaque.

4.4.1. Le profil losange symétrique

La figure (4.10) représente le profil losange symétrique. Nous pouvons rencontrer ce type de profil dans les applications de construction des ailes d'avions supersonique. La géométrie est connue par l'épaisseur maximale donnée par t . Elle est choisie au milieu de la corde. Avec $0 \leq x/C \leq 1$.



Figure 4.10: Losange symétrique

Afin de décrire l'écoulement à travers le profil, nous discrétisons l'extrados en $l = 3$ nœuds et l'intrados en $k = 3$ nœuds, ce qui donne deux régions dans chacune des surfaces supérieure et inférieure. Cette discrétisation sera suffisante pour étudier l'écoulement traversant la surface de profil et avoir la solution exacte en basant sur la théorie de choc et de détente.

4.4.2. Le profil courbé symétrique

La forme de ce type de profil est représentée sur la figure (4.11). L'équation de l'extrados et de l'intrados est choisie comme un polynôme de degré 3. Son expression est donné par :

$$f_E(x) = -f_I(x) = \frac{27}{8} t \frac{x}{C} \left(1 - \frac{x}{C}\right)^2 \quad (4.25)$$

Où $0 \leq x/C \leq 1$. L'épaisseur maximale t de ce profil se trouve à une distance $x/C = 1/3$ par rapport au bord d'attaque.



Figure 4.11 : Profil courbé symétrique.

4.4.3. Profil courbé non symétrique

La forme de profil courbé non symétrique est représentée sur la figure (4.12). Nous rencontrons les applications de ce type de profil dans les aubes de compresseur. L'extrados et l'intrados ont une forme parabolique dont leurs équations sont données respectivement par :

$$\frac{f_E(x)}{t_E} = \frac{f_I(x)}{t_E - t} = 4 \frac{x}{C} \left(1 - \frac{x}{C} \right) \quad (4.26)$$

Avec $0 \leq x/C \leq 1$. Dans ce cas, l'épaisseur maximale t de ce profil se trouve au milieu de la corde. Ce genre de profil est appelé par profil squelettique. La valeur de t_E est choisie arbitrairement supérieure à 0. Tandis que $t/C = 0.03$ pour les applications.



Figure 4.12 : Profil courbé non symétrique.

Chapitre 5

RESULTATS ET DISCUSSION

5.1 Effet de la température génératrice sur l'écoulement supersonique de l'air :

Dans cette partie, on présente les différents résultats trouvés par le programme de calcul développé pour les trois types de profil d'aile présentés dans le chapitre précédent. On fixe la forme géométrique de profil et on varie les paramètres de l'écoulement à l'infinie amont tels que M_0, T_0, α .

La discrétisation des profils est choisie de telle manière qu'on aura une précision de 10^{-5} . Pour les résultats sous forme tableau le profil est discrétisé en $k = l = 5000$ nœuds sur l'extrados et sur l'intrados, tandis que les résultats graphique $k = l = 1000$ nœuds.

Ce chapitre est divisé en 7 parties. La première partie a pour but de montrer la variation de l'angle de déviation de l'écoulement le long du profil.

Nous présentons dans la deuxième partie l'effet de la température génératrice T_0 sur les paramètres thermodynamiques $M, T/T_0, \rho/\rho_0$ et P/P_0 .

La troisième partie présente l'effet de la température génératrice T_0 sur les coefficients aérodynamiques ainsi que sur la variation de l'entropie. Un calcul d'erreur par rapport au modèle gaz parfait a été fait.

La quatrième, la cinquième et la sixièmes partie consistent à montrer l'effet de T_0 sur les coefficients aérodynamique en fonction de α, M_0 et t/C respectivement pour les trois profils d'aile.

La septième partie présente la variation de l'erreur relative commise par l'utilisation de modèle GP par rapport au modèle HT sur les coefficients aérodynamiques C_D, C_L et C_m des trois profils d'aile.

5.1.1 Variation de la déviation de l'écoulement le long de la corde de profil

La figure (5.1) représente la variation de la déviation de la paroi de profil d'aile qui représente aussi la variation de la déviation de l'écoulement le long de la surface des trois profils choisis. Cette déviation entre dans le calcul de la valeur de ψ déterminant le type de l'écoulement, que ce soit compression ou détente, donné par cette déviation.

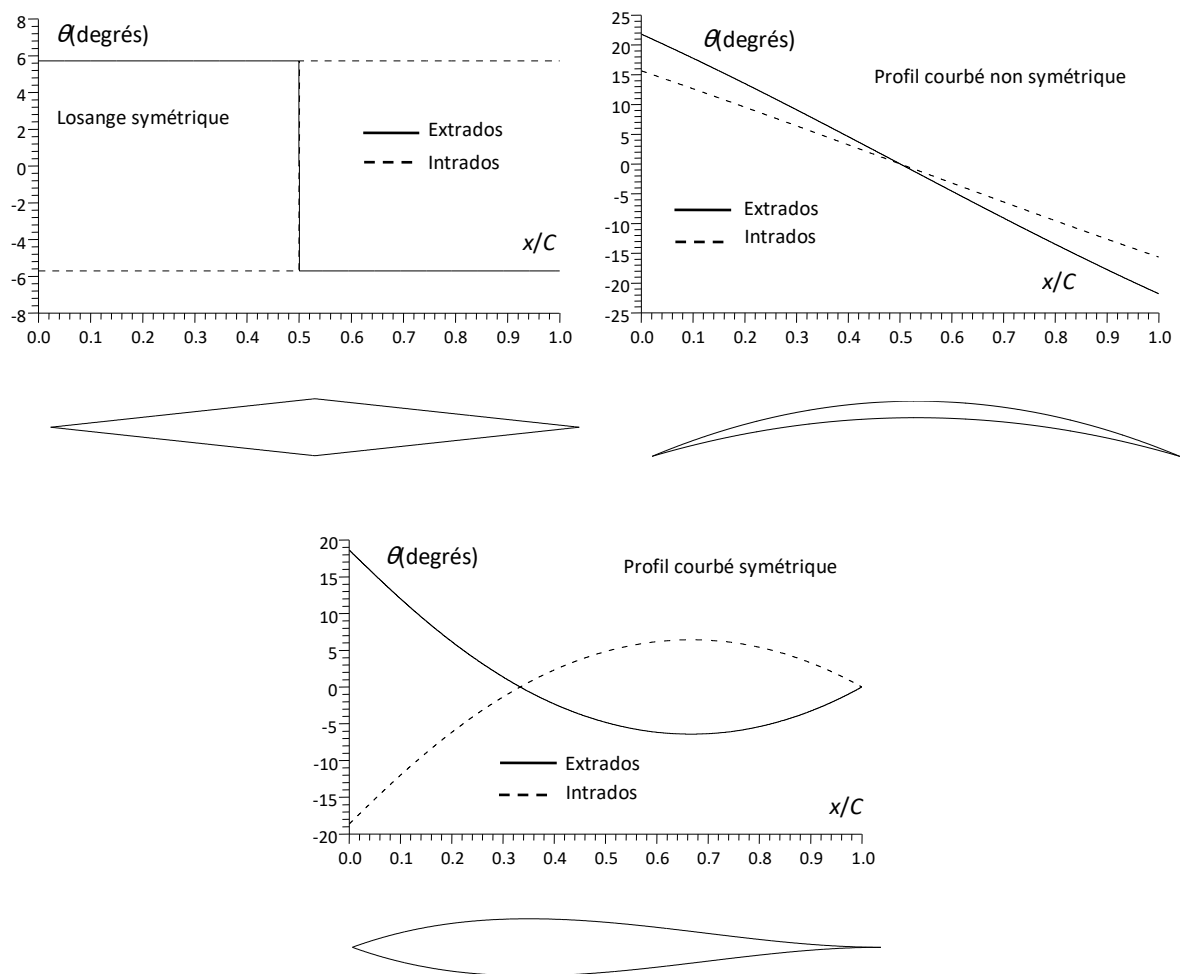


Figure 5.1 : Variation de l'angle de déviation de l'écoulement le long de la corde des trois types de profil.

5.1.2. Variation des paramètres thermodynamiques le long de la surface de profil

Les figures (5.2) à (5.13) représentent l'effet de T_0 sur la variation de $M, \frac{T}{T_0}, \frac{\rho}{\rho_0}$ et $\frac{P}{P_0}$ le long de la surface de l'extrados et de l'intrados des trois profils d'ailes. Chaque figure possède 8 courbes, 4 en lignes continues et 4 en pointillés. Les courbes en lignes continues représentent la variation des paramètres thermodynamique sur l'extrados pour $T_0 = 3000 K, T_0 = 2000 K, T_0 = 1000 K$ et le cas GP à $\gamma = 1.402$. De même pour les courbes en lignes en pointillés qui représentent la variation des paramètres sous l'intrados.

Dans les figures (5.8) à (5.13) les rapports ρ/ρ_0 et P/P_0 sont calculés par rapport aux conditions totales locales aux panneaux. On remarque clairement l'effet de T_0 sur tous les paramètres thermodynamiques avec une dégradation de M et T/T_0 si T_0 diminue, et augmentation de ρ/ρ_0 et P/P_0 si T_0 augmente graduellement. Cette variation donne nécessairement l'influence de T_0 sur tous les coefficients aérodynamiques C_D, C_L et C_m .

La variation de ces paramètres est reliée avec la déviation de la paroi, présentée dans la figure (5.1), le long de la surface de profil. Comme la déviation de la paroi prend deux valeurs sur l'extrados et sur l'intrados de losange, on aura par conséquent 2 valeurs de ces paramètres sur l'extrados et sur l'intrados. Tandis que pour les deux autres profils on a une variation continue le long de la surface des profils. Donc la forme de profil d'aile, en plus de T_0 , influe sur la variation des paramètres sur la surface de profil d'aile.

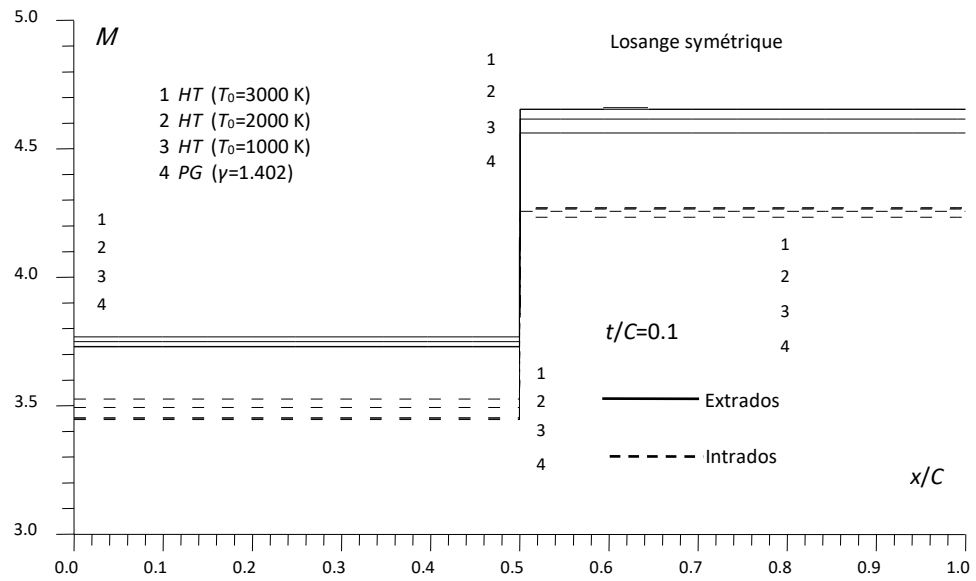


Figure 5.2: Effet de T_0 sur la variation de M le long de la surface du profil losange symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.

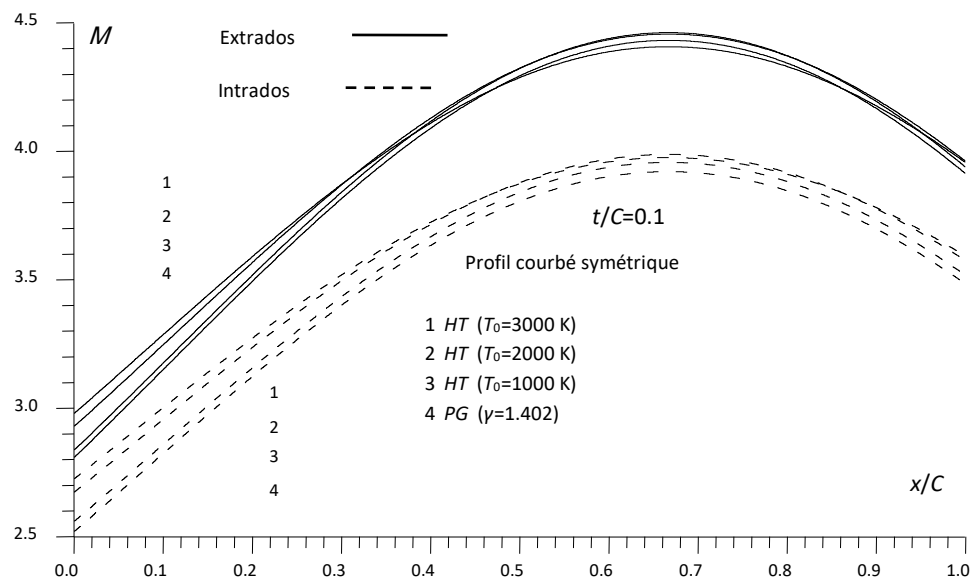


Figure 5.3: Effet de T_0 sur la variation de M le long de la surface du profil courbé symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.

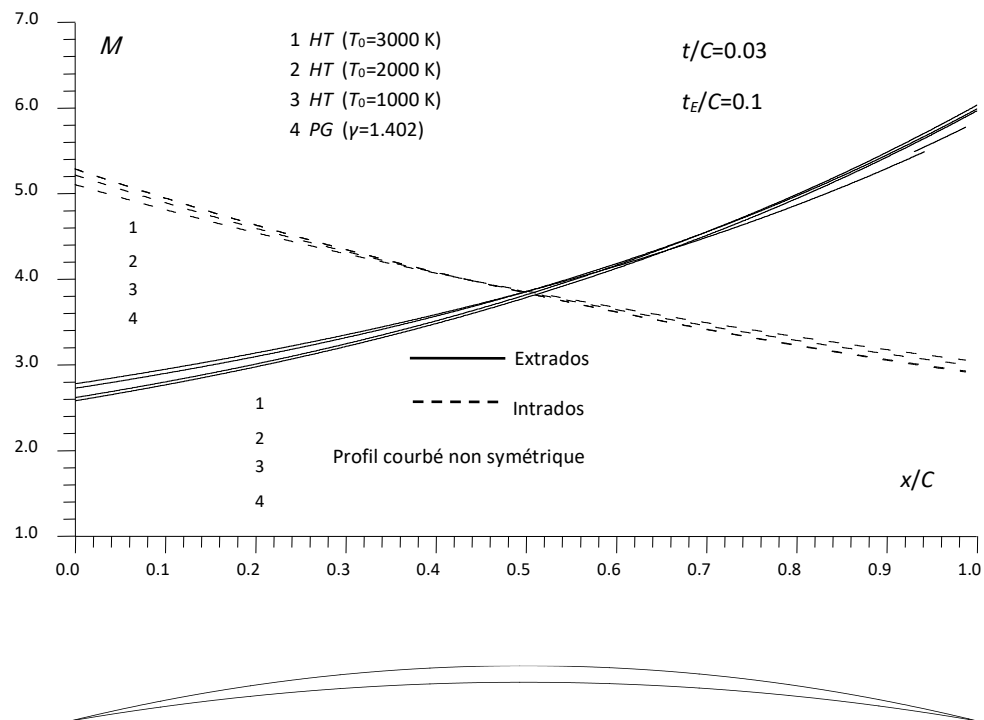


Figure 5.4 : Effet de T_0 sur la variation de M le long de la surface du profil courbé non symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.

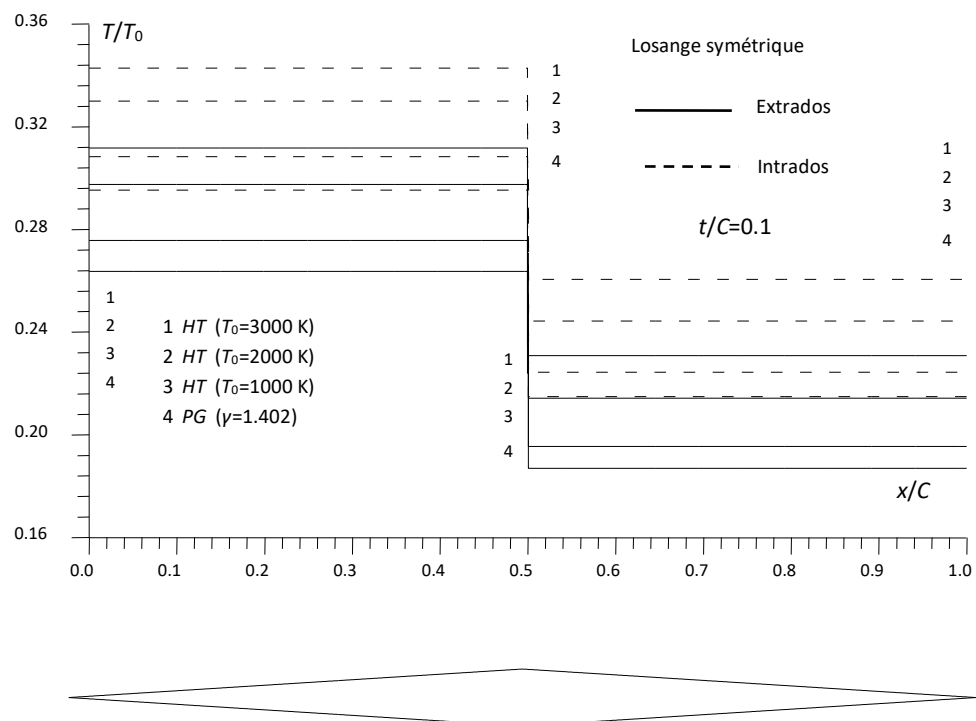


Figure 5.5 : Effet de T_0 sur la variation de T/T_0 le long de la surface du profil losange symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.

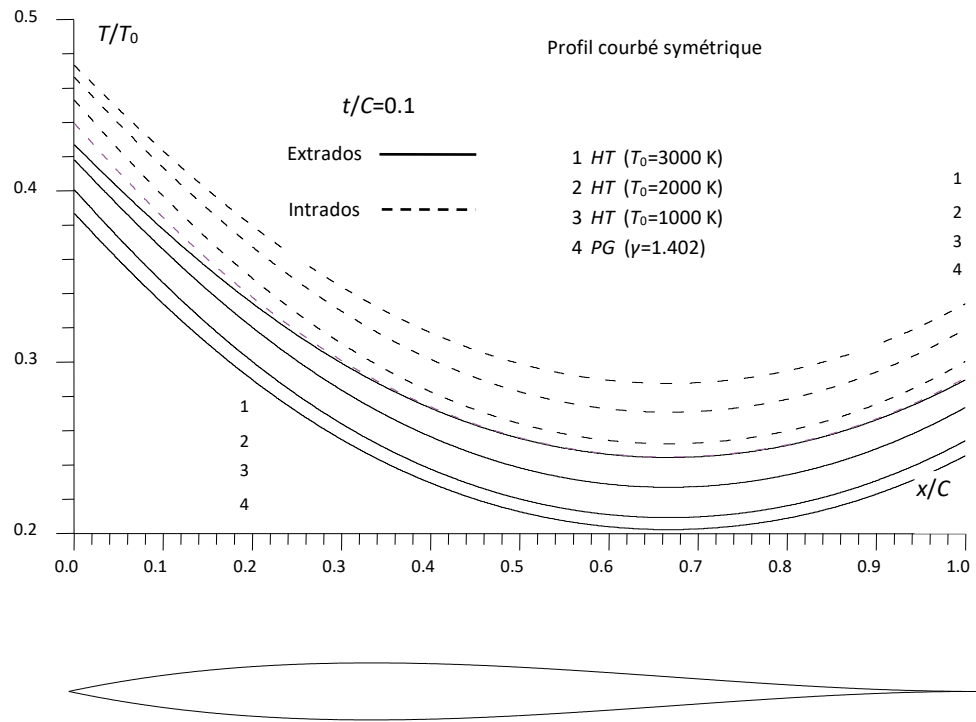


Figure 5.6 : Effet de T_0 sur la variation de T/T_0 le long de la surface du profil courbé symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.

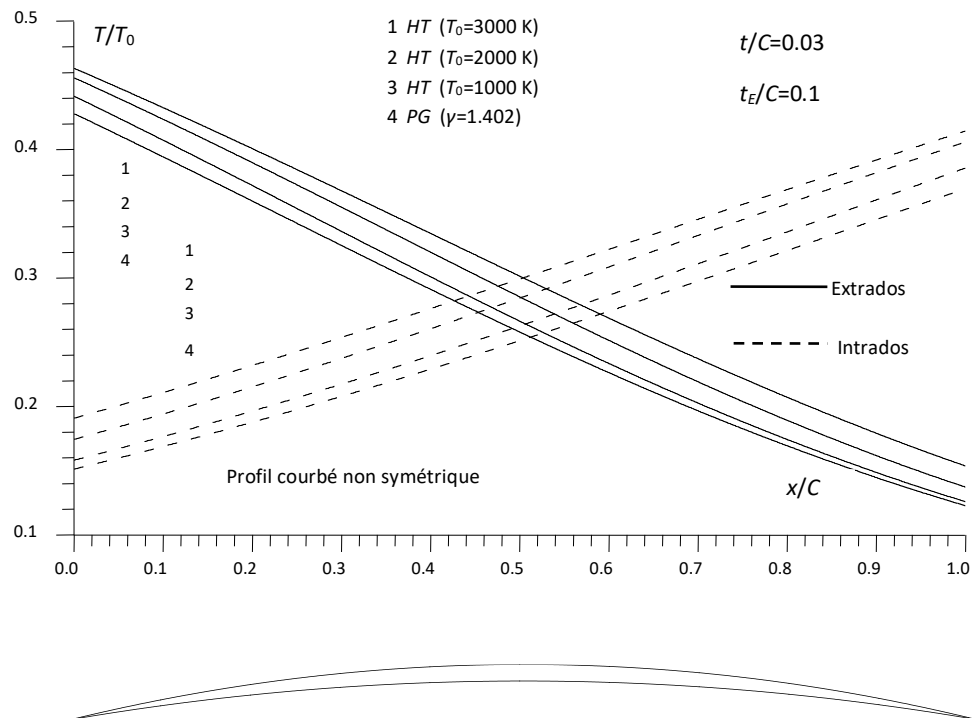


Figure 5.7 : Effet de T_0 sur la variation de T/T_0 le long de la surface du profil courbé non symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.

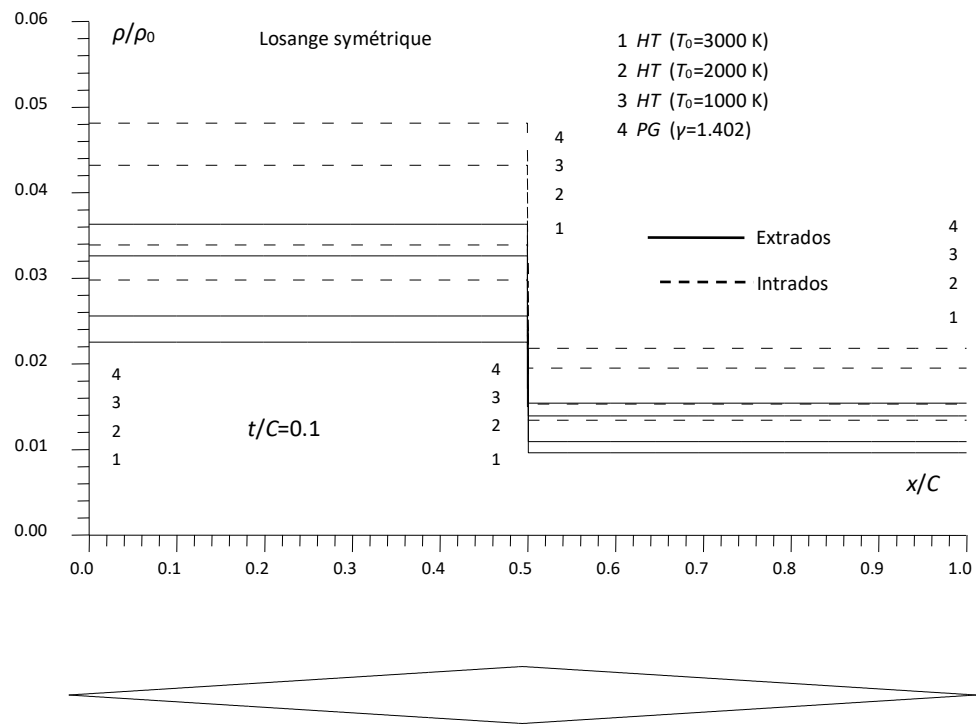


Figure 5.8 : Effet de T_0 sur la variation de ρ/ρ_0 le long de la surface du profil losange symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.

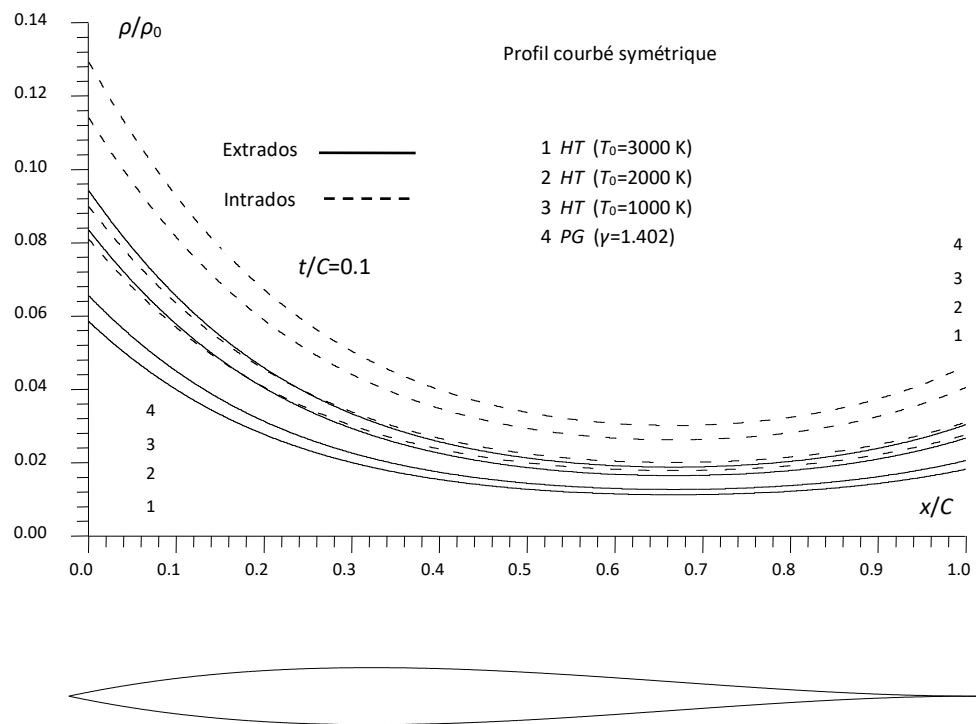


Figure 5.9 : Effet de T_0 sur la variation de ρ/ρ_0 le long de la surface du profil courbé symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.

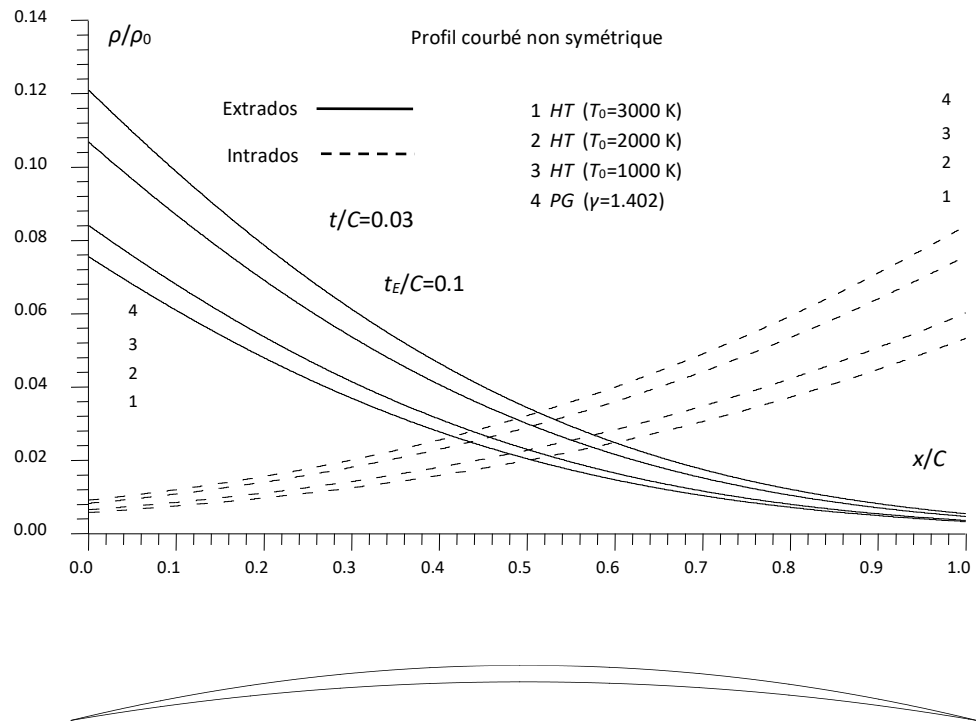


Figure 5.10 : Effet de T_0 sur la variation de ρ/ρ_0 le long de la surface du profil courbé non symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.

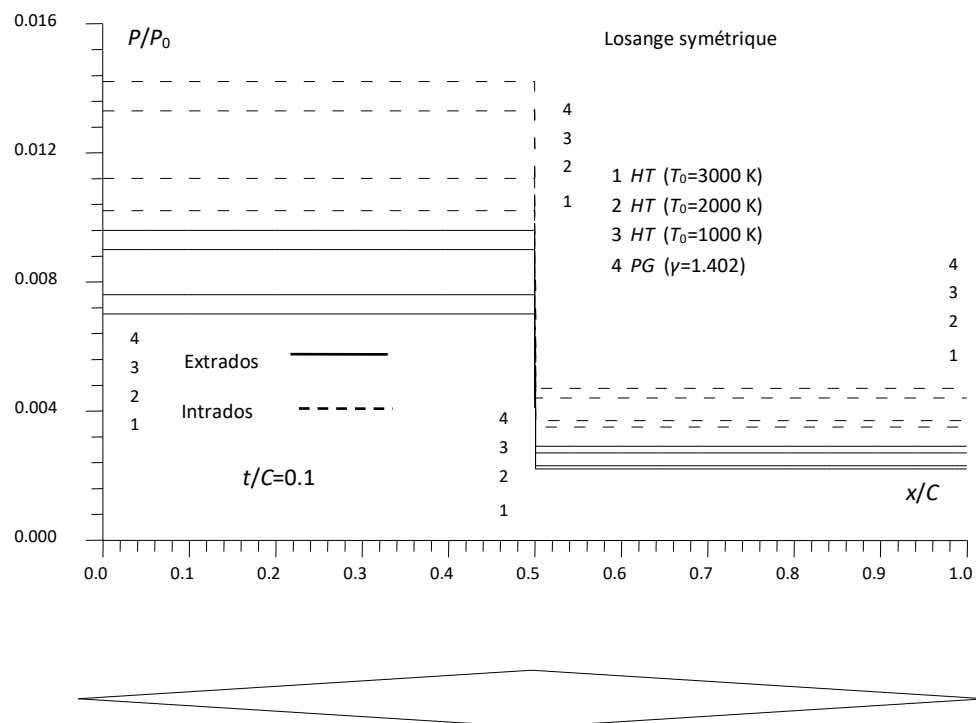


Figure 5.11 : Effet de T_0 sur la variation de P/P_0 le long de la surface du profil losange symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.

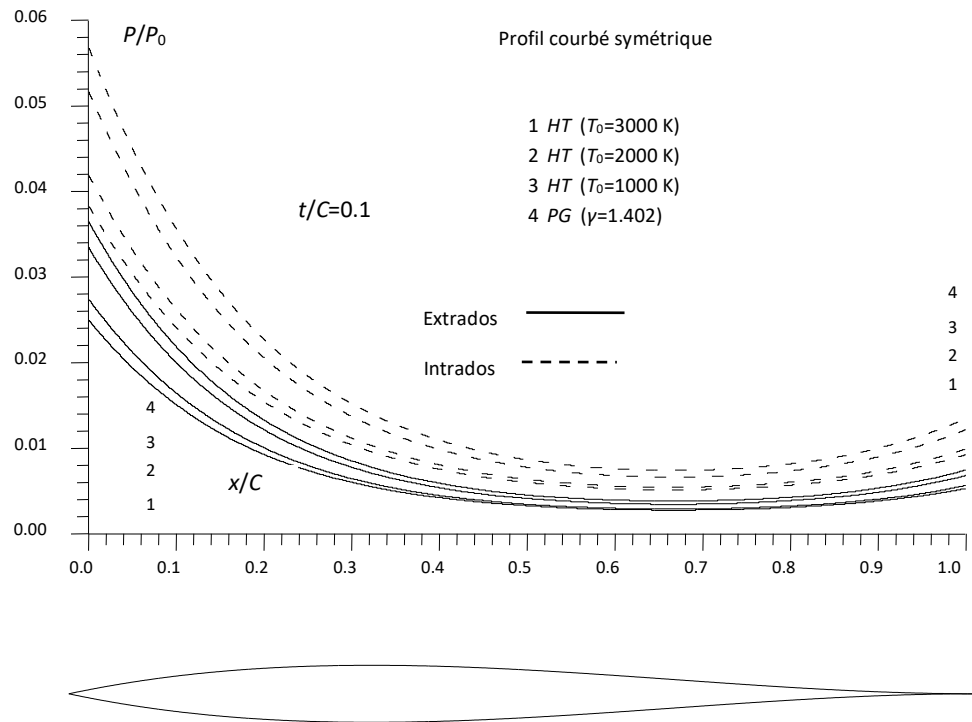


Figure 5.12 : Effet de T_0 sur la variation de P/P_0 le long de la surface du profil courbé symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.

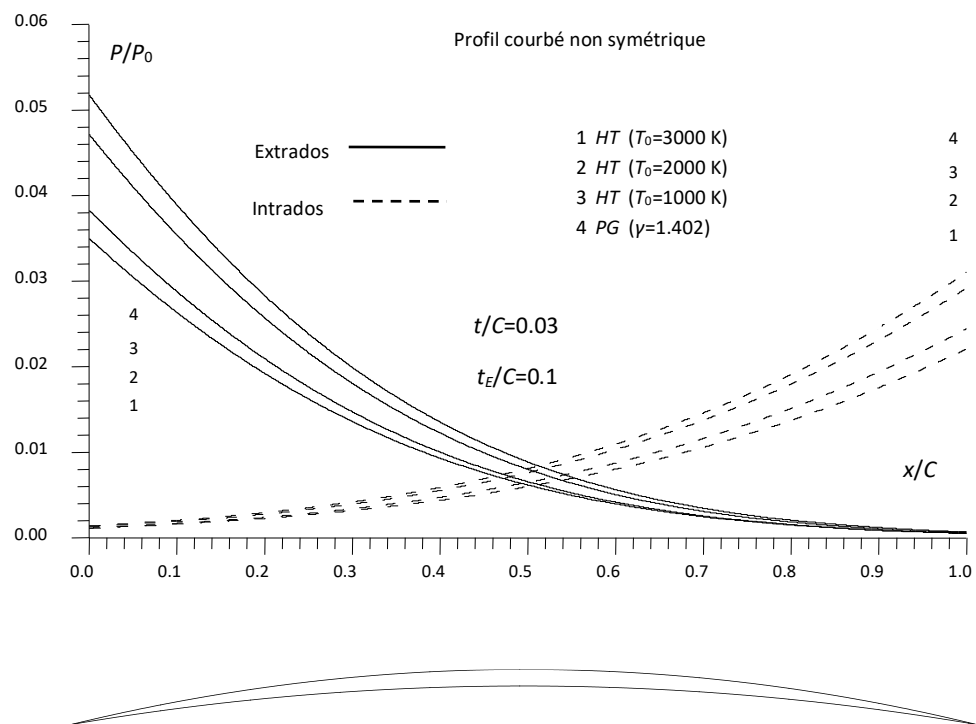


Figure 5.13 : Effet de T_0 sur la variation de P/P_0 le long de la surface du profil courbé non symétrique lorsque $\alpha=2.0$ degrés et $M_0=4.00$.

5.1.3. Effet de la température génératrice T_0 sur les coefficients aérodynamiques

Dans cette partie on a présenté la variation des coefficients aérodynamique C_D, C_L, C_m et la variation d'entropie ΔS_{21} sur l'extrados et sous l'intrados des trois profils d'ailes choisis ainsi que le calcul de l'erreur commise pour le modèle *PG* par rapport au modèle *HT* pour chaque valeur de T_0 .

Le tableau (5.1) représente l'effet de T_0 sur C_D, C_L, C_m et ΔS_{21} pour le profil losange symétrique lorsque $\alpha = 2.0$ degrés, $M_0 = 4.00$ et $t/C = 0.1$, suivie par les erreurs données par le modèle *PG* sur ces coefficients par rapport au modèle *HT* comme représente le tableau (5.2).

Le tableau (5.3) représente l'effet de T_0 sur C_D, C_L, C_m et ΔS_{21} pour le profil courbé symétrique lorsque $\alpha = 2.0$ degrés, $M_0 = 4.00$ et $t/C = 0.1$, suivie par les erreurs données par le modèle *PG* sur ces coefficients par rapport au modèle *HT* comme représente le tableau (5.4).

Le tableau (5.5) représente l'effet de T_0 sur C_D, C_L, C_m et ΔS_{21} pour le profil courbé non symétrique lorsque $\alpha = 2.0$ degrés, $M_0 = 4.00$, $t_E/C = 0.1$ et $t/C = 0.03$, suivie par les erreurs données par le modèle *PG* sur ces coefficients par rapport au modèle *HT* comme représente le tableau.

On note que pour déterminer les valeurs réelles de C_D, C_L et C_m il faut diviser les valeurs tabulées par 10^3 .

Tableau 5.1 : Effet de T_0 sur C_D, C_L, C_m et $\Delta S_{21}/R$ pour le losange lorsque $\alpha = 2.0^\circ$, $M_0 = 4.00$ et $t/C = 0.1$

	<i>GP</i>	<i>HT</i> T_0 (K)		
	$\gamma = 1.402$	1000	2000	3000
$C_D (10^3)$	0.07047	0.06961	0.06015	0.05489
$C_L (10^3)$	0.25847	0.25451	0.21908	0.19981
$C_m (10^3)$	0.10140	0.09980	0.08620	0.07895
$\Delta S_{21}/R$	0.04326	0.03848	0.03459	0.03541

Tableau 5.2 : Erreur de modèle *GP* par rapport au modèle *HT* selon le tableau (5.1)

ε (%)	$T_0=1000^\circ\text{K}$	$T_0=2000^\circ\text{K}$	$T_0=3000^\circ\text{K}$
$\varepsilon(C_D)$	1.23	17.15	28.38
$\varepsilon(C_L)$	1.55	17.97	29.35
$\varepsilon(C_m)$	1.60	17.63	28.43

Tableau 5.3 : Effet de T_0 sur C_D, C_L, C_m et $\Delta S_{21}/R$ pour le profil courbé symétrique lorsque $\alpha = 2.0^\circ$, $M_0 = 4.00$ et $t/C = 0.1$

	<i>GP</i>	<i>HT</i> T_0 ($^\circ\text{K}$)		
	$\gamma=1.402$	1000	2000	3000
$C_D (10^3)$	0.14376	0.14138	0.12087	0.10980
$C_L (10^3)$	0.27933	0.27055	0.22723	0.20630
$C_m (10^3)$	0.10603	0.10236	0.08608	0.07844
$\Delta S_{21}/R$	0.73606	0.68655	0.64513	0.66500

Tableau 5.4: Erreur de modèle *GP* par rapport au modèle *HT* selon le tableau (5.3)

ε (%)	$T_0=1000^\circ\text{K}$	$T_0=2000^\circ\text{K}$	$T_0=3000^\circ\text{K}$
$\varepsilon(C_D)$	1.68	18.93	30.92
$\varepsilon(C_L)$	3.24	22.92	35.40
$\varepsilon(C_m)$	3.58	23.17	35.17

Tableau 5.5 : Effet de T_0 sur C_D, C_L, C_m et $\Delta S_{21}/R$ pour le profil courbé non symétrique lorsque $\alpha = 2.0^\circ$, $M_0 = 4.00$, $t/C = 0.03$ et $t_E/C = 0.1$

	<i>PG</i>	<i>HT</i> T_0 (K)		
	$\gamma=1.402$	1000	2000	3000
$C_D (10^3)$	0.29855	0.29372	0.25180	0.22931
$C_L (10^3)$	0.09928	0.10701	0.10216	0.09503
$C_m (10^3)$	0.47498	0.47221	0.41024	0.37453
$\Delta S_{21}/R$	0.41696	0.39004	0.36747	0.37887

Tableau 5.6: Erreur de modèle *GP* par rapport au modèle *HT* selon le tableau (5.5)

$\varepsilon(\%)$	$T_0=1000^\circ\text{K}$	$T_0=2000^\circ\text{K}$	$T_0=3000^\circ\text{K}$
$\varepsilon(C_D)$	1.64	18.56	30.19
$\varepsilon(C_L)$	7.22	2.81	4.47
$\varepsilon(C_m)$	0.58	15.78	26.82

Les figures (5.14 - 5.22) représentent la variation des coefficients aérodynamiques des trois profils en fonction de T_0 pour M_0, α et t/C constants et la comparaison avec le modèle *GP*. Ce dernier ne dépend pas de T_0 , où il est représenté par une ligne droite horizontale le long de tout l'intervalle. La variation de C_D , C_L et C_m est choisie pour $M_0 = 4.00$ et $\alpha = 2.00^\circ$. On remarque clairement l'effet de T_0 sur ces paramètres. D'où la nécessité d'utiliser le modèle *HT* pour des éventuelles corrections. On remarque encore lorsque T_0 est faible, le modèle *HT* est confondu avec le modèle *GP*. On peut aller à 240°K environ. Alors lorsque $T_0 < 240^\circ\text{K}$, le modèle *GP* donne des résultats acceptables. On remarque encore que la forme de profil d'aile influe encore sur la variation de ces coefficients vu que la variation des coefficients aérodynamiques des trois profils n'est pas la même. On remarque que les valeurs de C_D , C_L et C_m diminuent en augmentant la température T_0 .

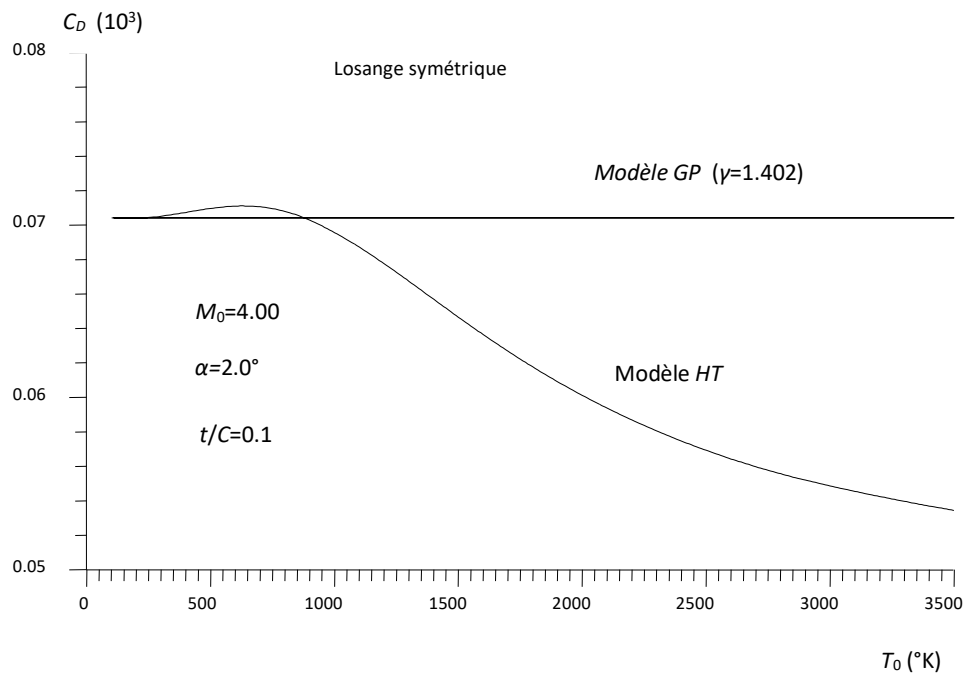


Figure 5.14 : Variation de C_D en fonction de T_0 pour le profil losange symétrique.

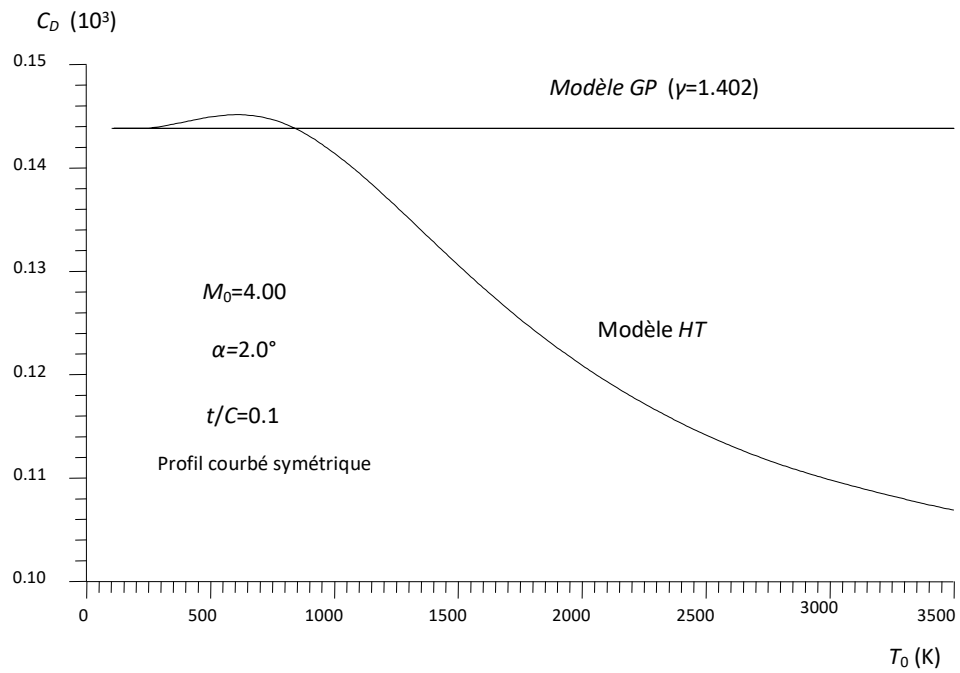


Figure 5.15 : Variation de C_D en fonction de T_0 pour le profil courbé symétrique.

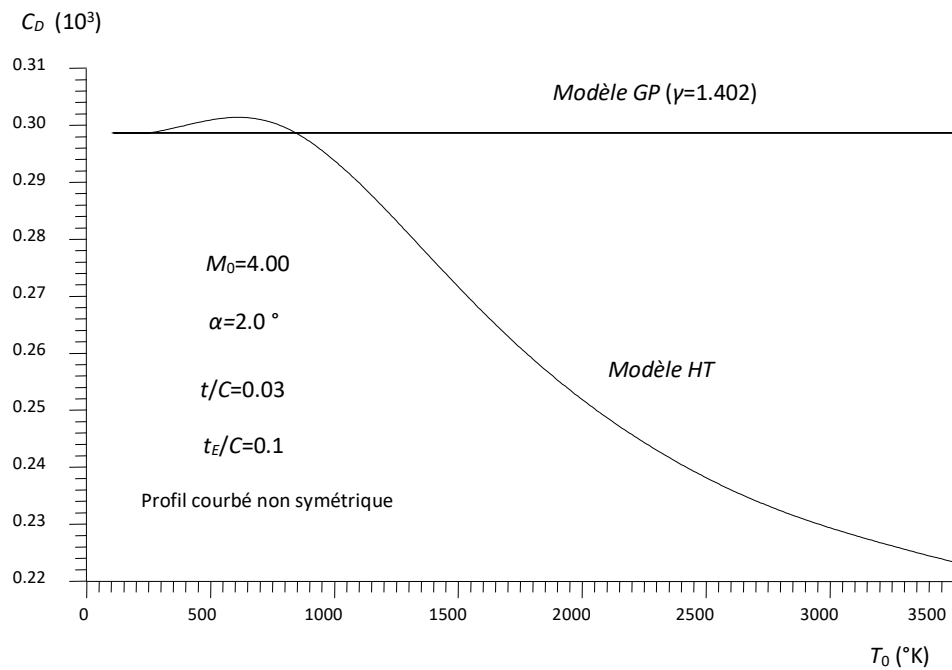


Figure 5.16 : Variation de C_D en fonction de T_0 pour le profil courbé non symétrique.

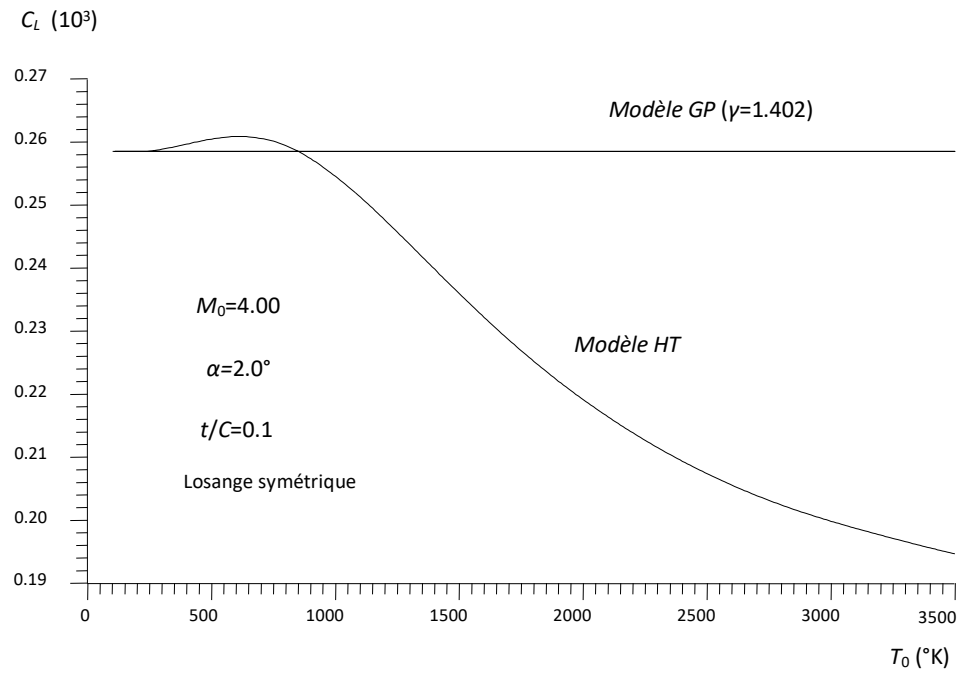


Figure 5.17 : Variation de C_L en fonction de T_0 pour le profil losange symétrique.

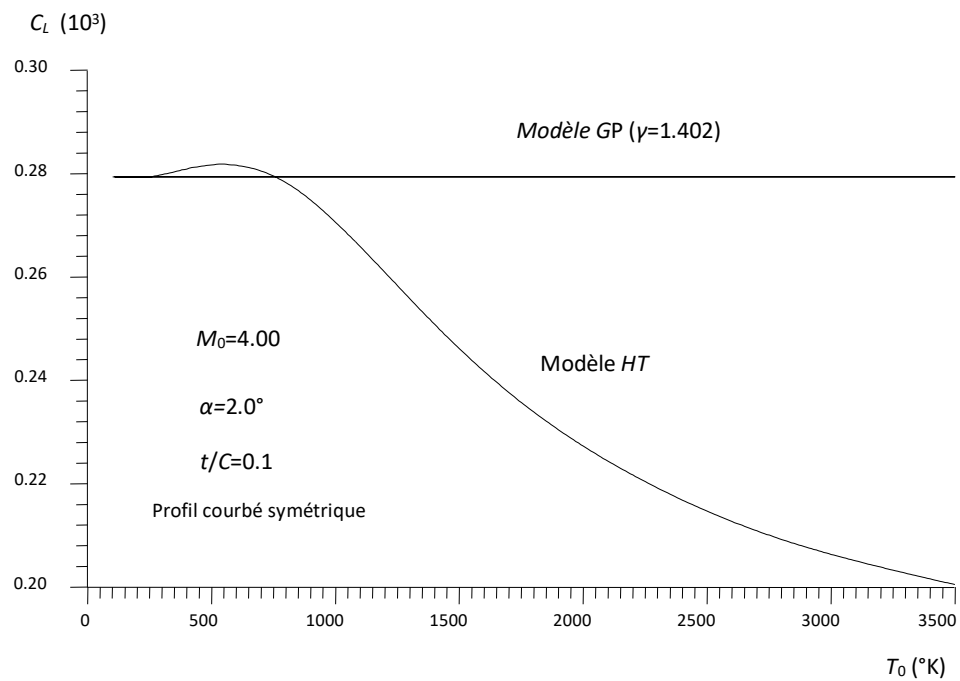


Figure 5.18 : Variation de C_L en fonction de T_0 pour profil courbé symétrique.

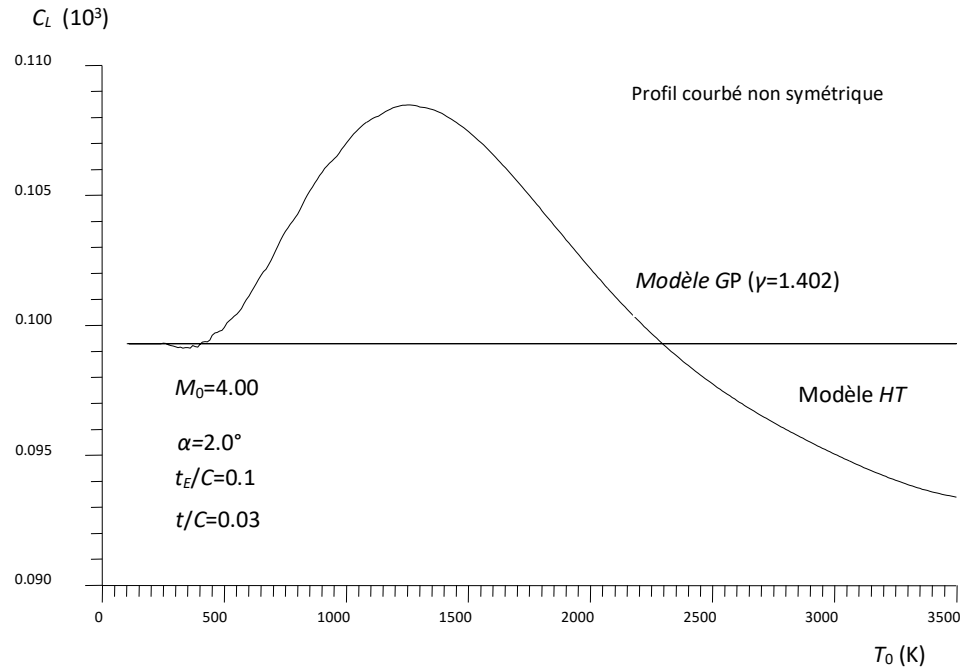


Figure 5.19 : Variation de C_L en fonction de T_0 pour le profil courbé non symétrique.

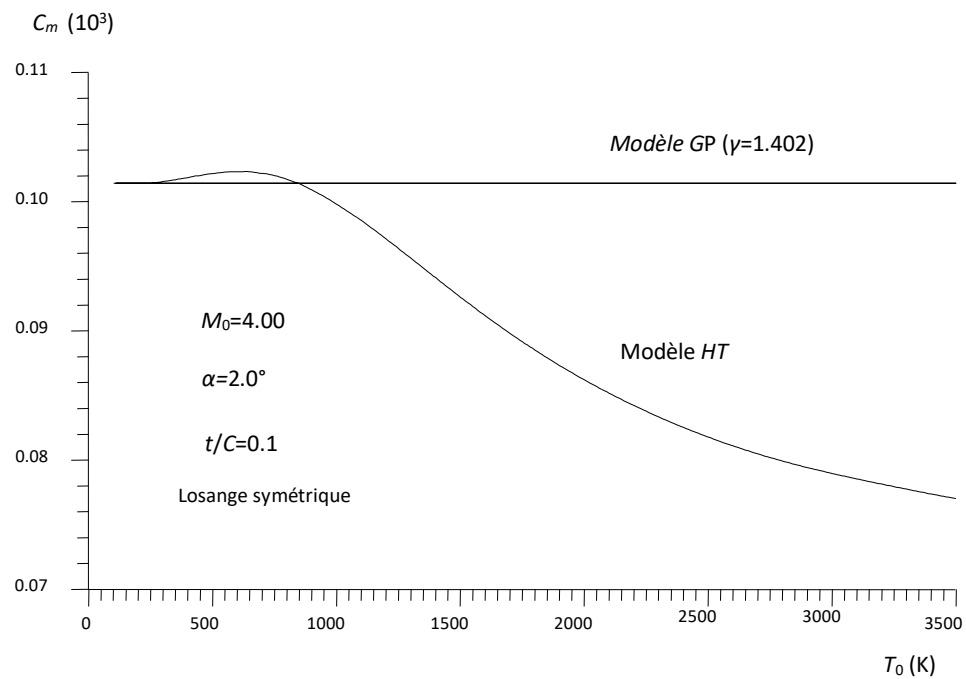


Figure 5.20 : Variation de C_m en fonction de T_0 pour le profil losange symétrique.

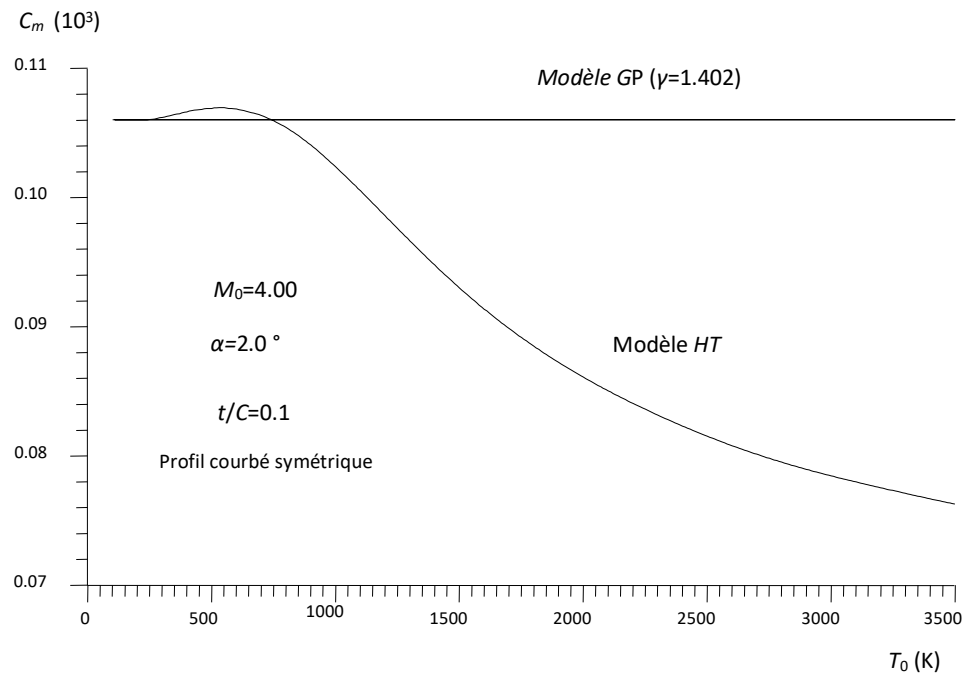


Figure 5.21 : Variation de C_m en fonction de T_0 pour le profil courbé symétrique.

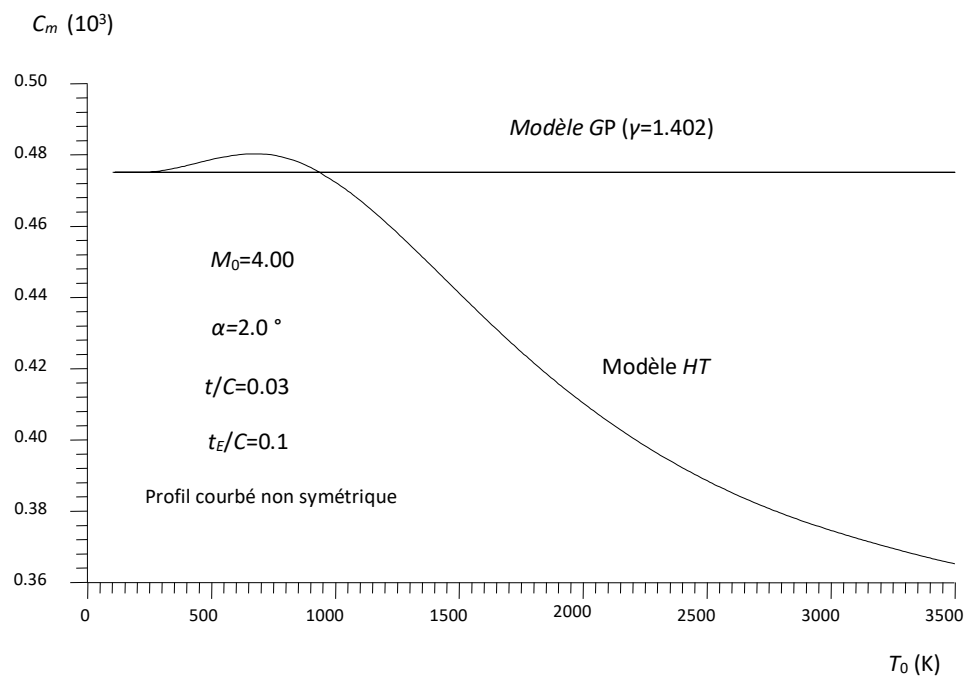


Figure 5.22 : Variation de C_m en fonction de T_0 pour e profil courbé non symétrique

5.1.4. Effet de α à HT sur les coefficients aérodynamiques pour M_0 et t/C fixes

Les figures (5.23 - 5.31) représentent l'effet de T_0 respectivement sur la variation de C_D , C_L et C_m en fonction de α pour les trois profils d'ailes lorsque $M_0=4.00$. On remarque clairement l'effet de T_0 sur les trois paramètres. Pour déterminer la valeur réelle de C_D , C_L et C_m , il faut diviser la valeur obtenue à partir de ces figures par 10^3 .

Pour les profils symétriques, on a trouvé une symétrie de la variation de C_D , C_L et C_m . Tandis que pour le troisième profil, on n'a pas cette symétrie, vu que le profil n'est pas symétrique. Dans les figures [5.23 - 5.31], l'intervalle de variation de l'angle incidence α est pris $[-10^\circ, 10^\circ]$. Généralement au-delà de cet intervalle on aura le phénomène de décrochage.

Il est très important de déterminer un angle d'incidence permettant de trouver $C_L=0$, appelé angle de portance nulle, et l'angle d'incidence permettant de trouver $C_m=0$, appelé angle de moment nul. Pour les profils symétriques cet angle est égal à 0.0 . Tandis que pour les profils non symétriques, forcément on aura une valeur différente de zéro et qui dépend forcément de T_0 . La table 7 présente l'effet de T_0 sur l'angle de portance nulle pour le troisième profil non symétrique et la table 8 représente l'effet de T_0 sur l'angle de moment nul pour le troisième profil pour quelques valeurs de M_0 lorsque $t/C=0.03$ et $t_E/C=0.1$. On remarque l'effet de T_0 , M_0 , t/C , la forme de profil d'aile et t_E/C sur ces deux angles.

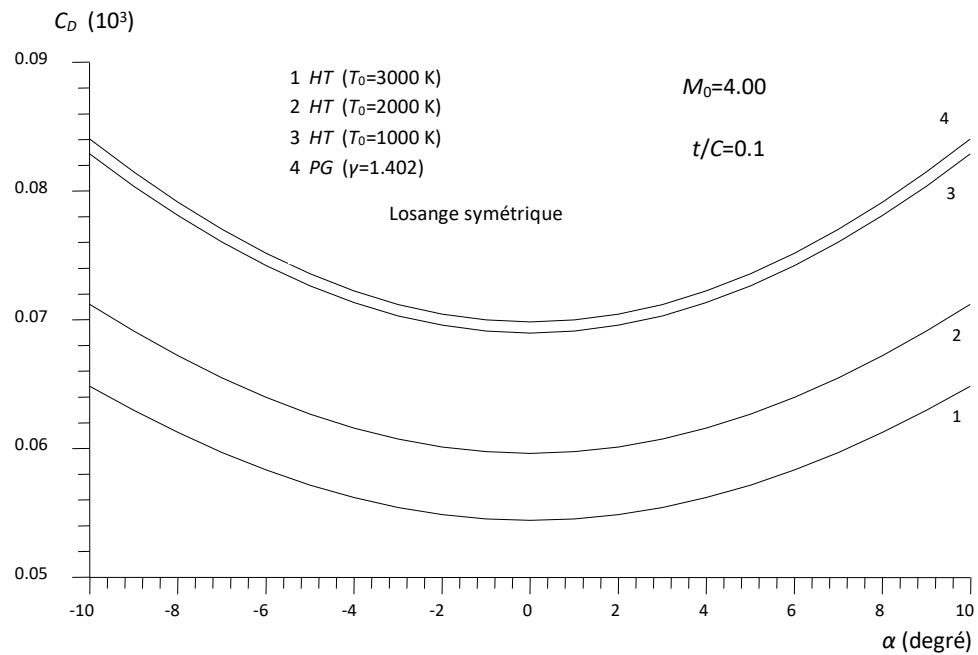


Figure 5.23 : Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de α pour le profil losange symétrique.

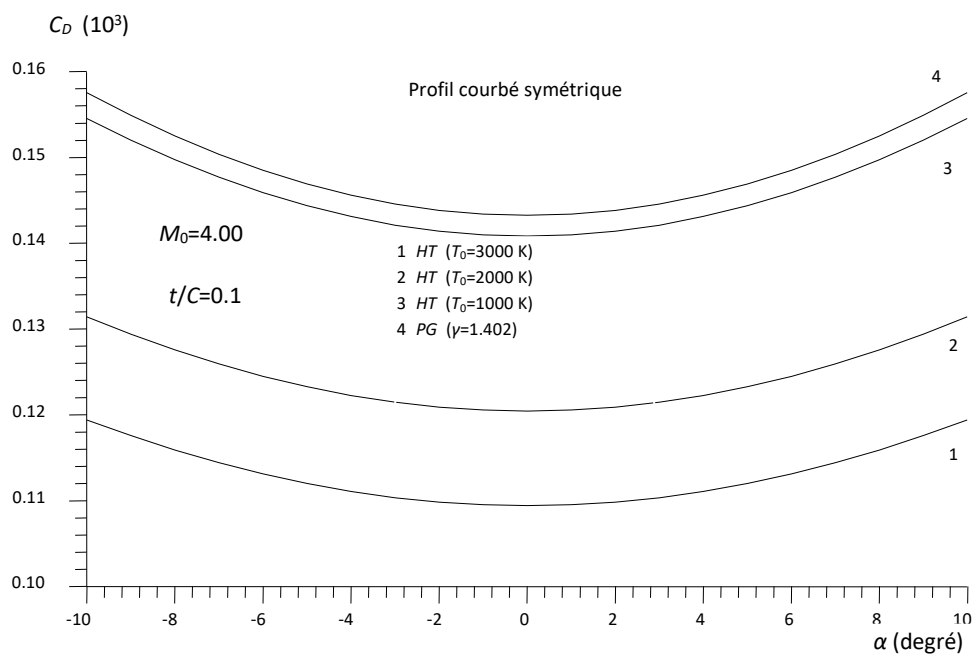


Figure 5.24 : Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de α pour le profil courbé symétrique.

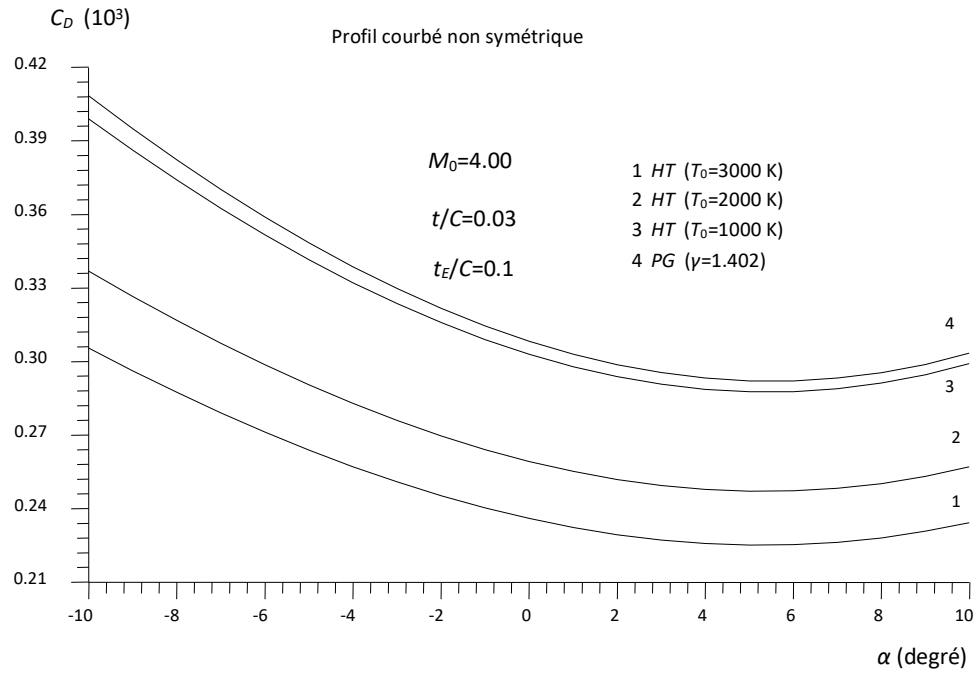


Figure 5.25 : Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de α pour le profil courbé non symétrique.

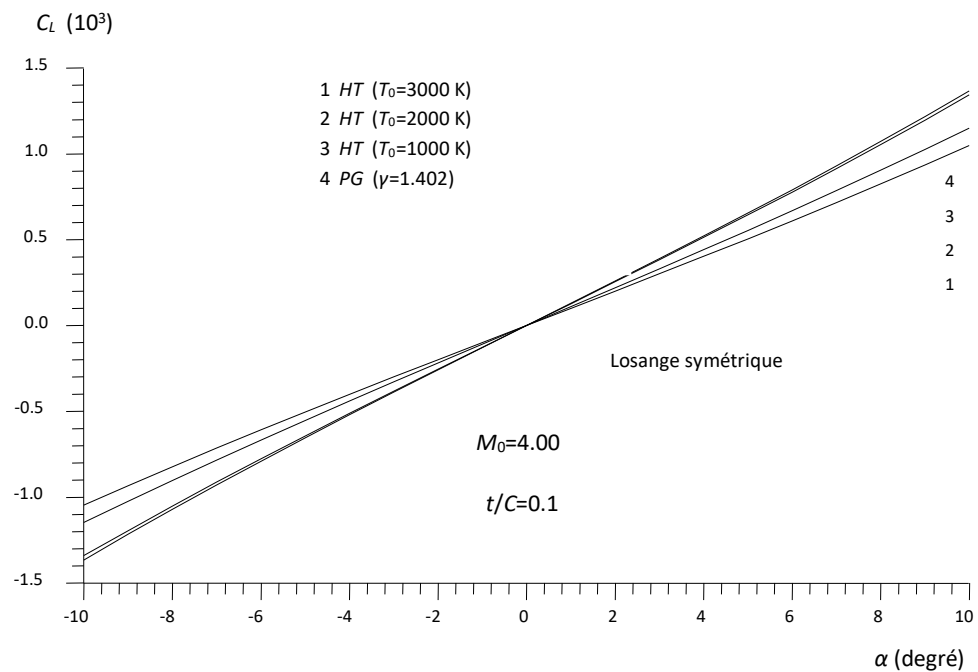


Figure 5.26 : Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de α pour le profil losange symétrique

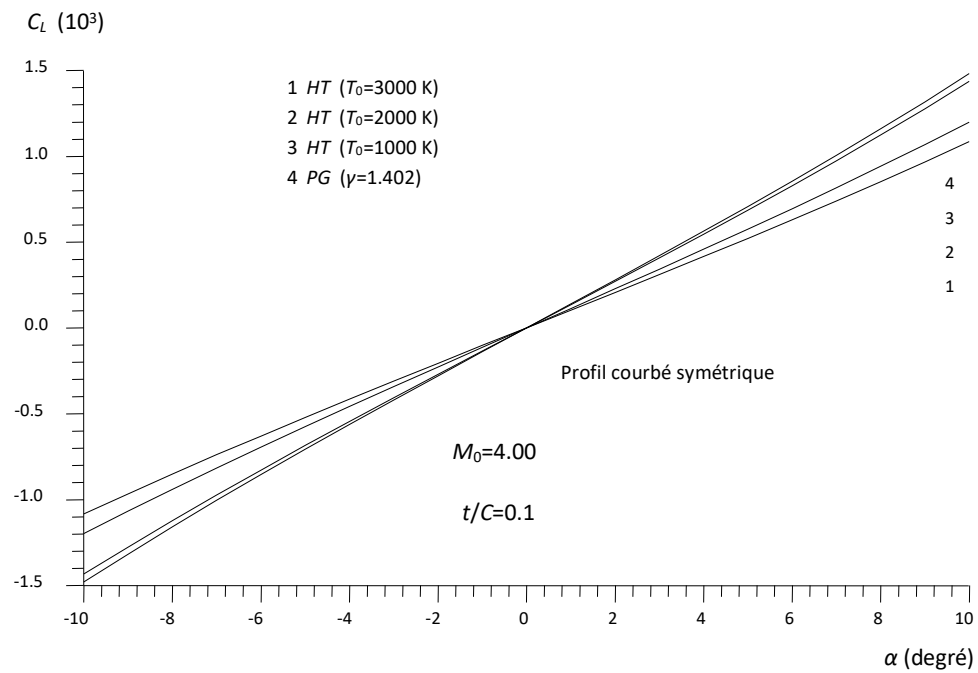


Figure 5.27 : Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de α pour le profil courbé symétrique.

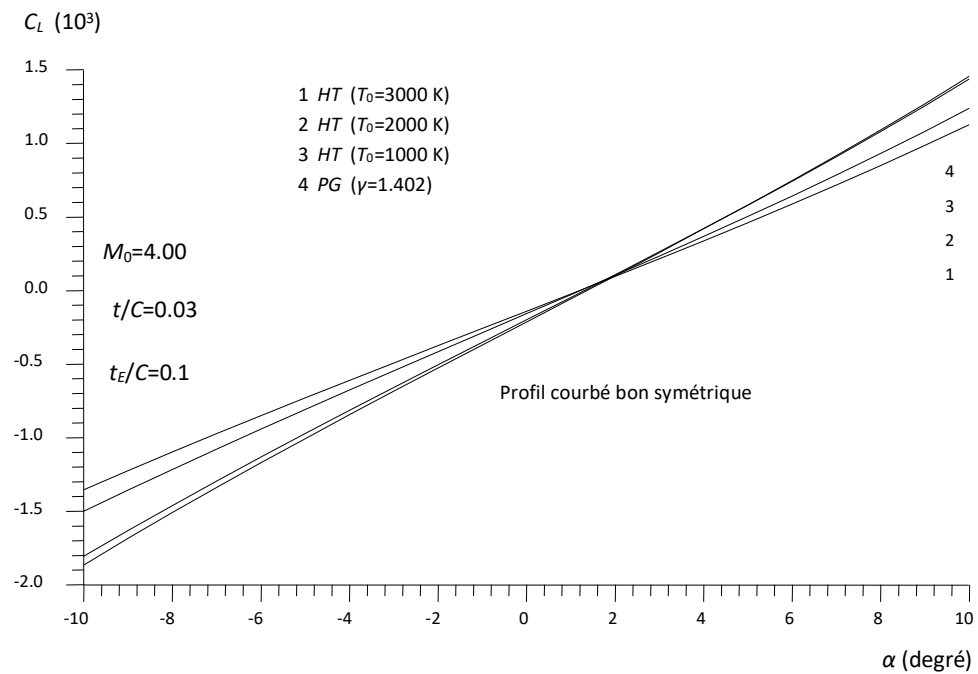


Figure 5.28 : Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de α pour le profil courbé non symétrique.

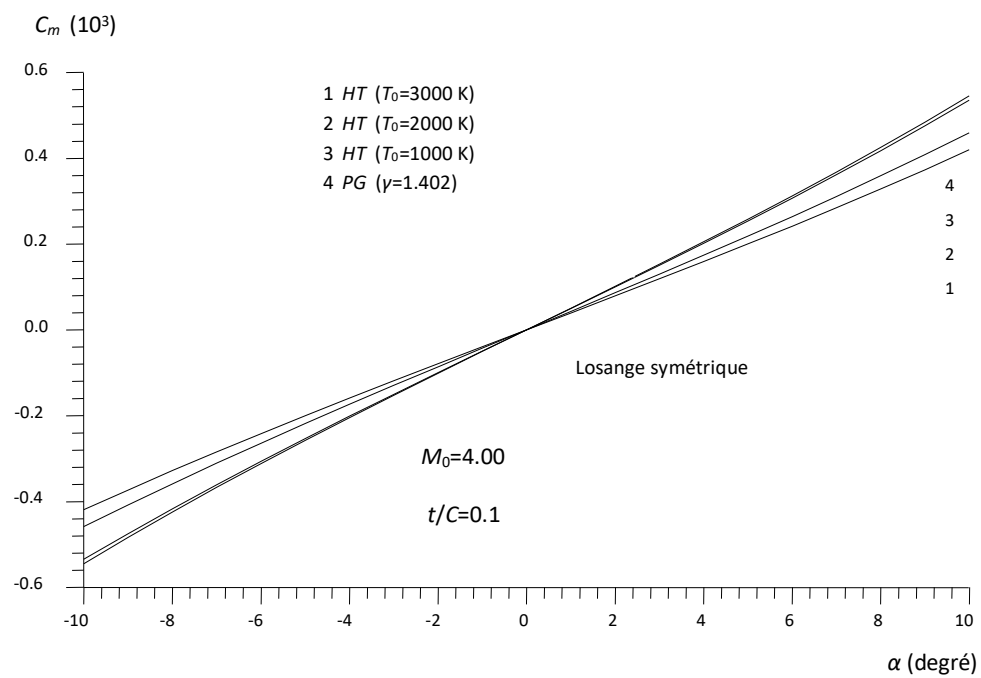


Figure 5.29 : Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de α pour le profil losange symétrique.

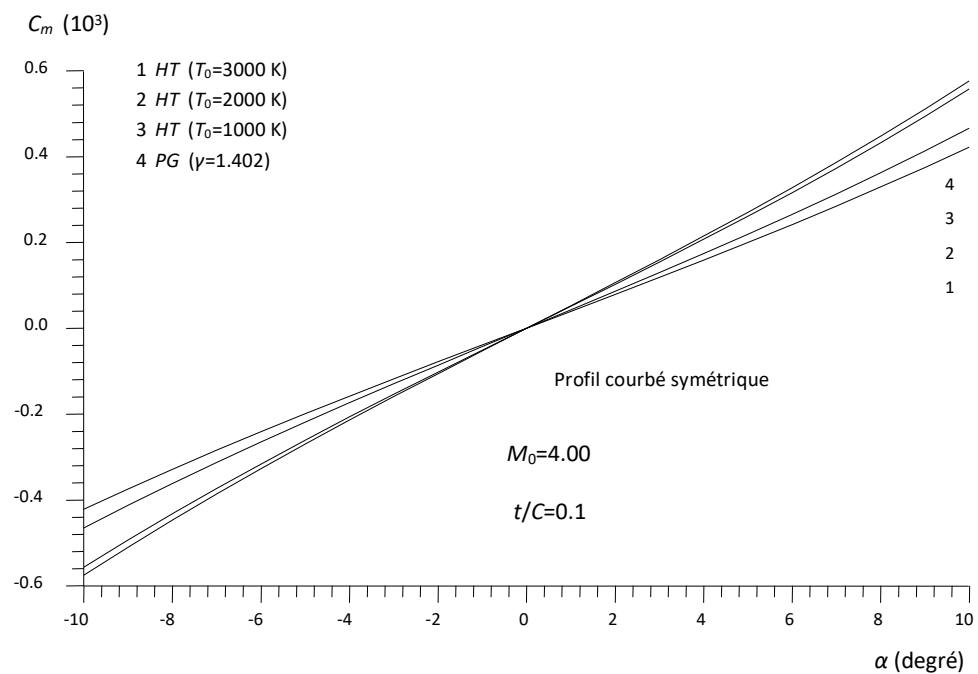


Figure 5.30 : Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de α pour le profil courbé symétrique

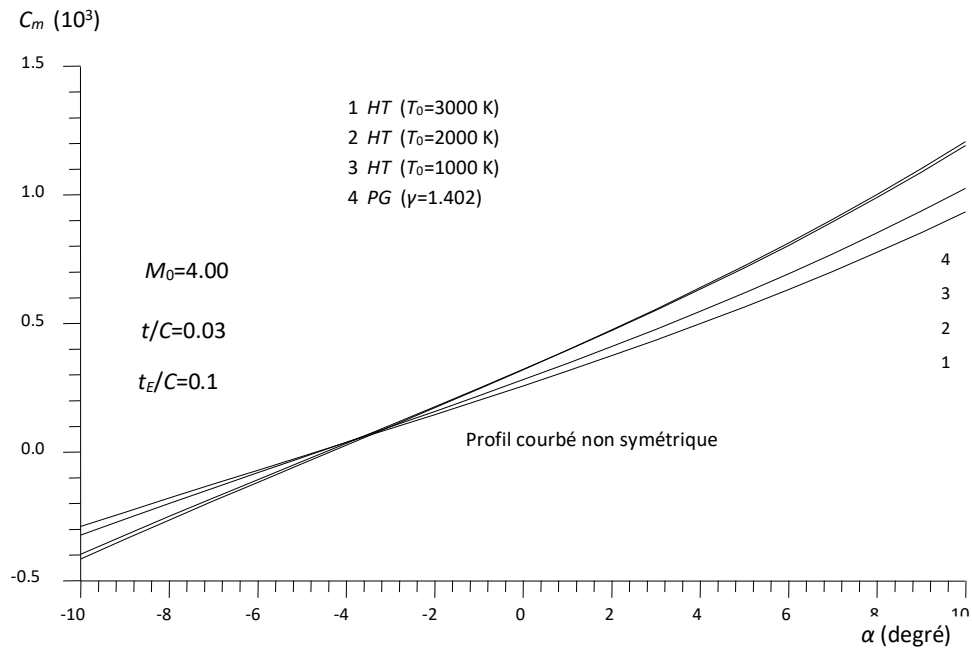


Figure 5.31 : Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de α pour le profil courbé non symétrique

Tableau 5.7 : Effet de T_0 sur l'angle de portance nulle pour le profil courbé non symétrique en fonction de M_0 .

	GP	HT T_0 (°K)		
M_0	$\gamma = 1.402$	1000	2000	3000
2.00	1.12621	1.06831	1.00951	0.98844
3.00	1.22893	1.16998	1.10840	1.08275
4.00	1.36949	1.30556	1.21869	1.19970
5.00	1.44686	1.38326	1.26308	1.24281

Tableau 5.8 : Effet de T_0 sur l'angle de moment nul pour le profil courbé non symétrique en fonction de M_0 .

	GP	HT T_0 (°K)		
M_0	$\gamma = 1.402$	1000	2000	3000
2.00	/	/	/	/
3.00	-4.62572	-4.72499	-4.84051	-4.89225
4.00	-4.37190	-4.47564	-4.63459	-4.67646
5.00	-4.12962	-4.22671	-4.43716	-4.47744

Il est clair que pour un angle d'incidence α au voisinage de l'angle de portance nulle, ou l'angle de moment nul, d'un degré, il n'est y a pas une influence de T_0 sur ces paramètres.

5.1.5. Effet de M_0 à HT sur les coefficients aérodynamiques pour α et t/C fixes

Les figures [5.32-5.40] représentent l'effet de T_0 sur la variation des coefficients aérodynamiques C_D , C_L et C_m en fonction de M_0 pour les trois profils choisis lorsque $\alpha=2.0^\circ$. La présentation est faite à l'échelle logarithmique pour raison de regrouper dans une figure, les petites valeurs avec les grandes valeurs des coefficients aérodynamiques. On remarque clairement l'effet de T_0 sur ces coefficients. Cet effet devient important avec l'augmentation de M_0 . Alors pour des petites valeurs de M_0 jusqu'à environ de $M_0 < 2.00$, la différence entre les modèles GP et HT n'a aucune importance, ce qui montre que les résultats donnés par le modèle GP sont acceptable. Mais si M_0 augmente, indépendamment de T_0 , les corrections faites par le modèle HT devient indispensable, ce qui montre l'intérêt de modèle HT pour les grandes valeurs de $M_0 > 2.00$. Généralement cette limite dépend de l'erreur de calcul considérée. On remarque encore que si M_0 diminue, on aura l'apparition d'une onde de choc détachée qui se développe au bord d'attaque de profil d'aile. Les commentaires restent valables pour n'importe quelles valeurs de α , t/C et t_E/C .

La variation de M_0 dans les figures [5.32-5.40] commence de $M_{0_{min}}$ jusqu'à 5.0. On remarque l'effet de T_0 sur la valeur minimale $M_{0_{min}}$ de nombre de Mach amont, que peut avoir l'écoulement pour limiter le choc attaché avec le choc détaché respectivement pour les trois profils d'ailes choisis. Forcement cette limite dépend de T_0 , α , t/C et de t_E/C . La limite donnée par le modèle GP est considérée comme un choc attaché pour le modèle HT , vu que $M_{0_{min}}(GP) > M_{0_{min}}(HT)$, c'est à dire on peut avoir un nombre de Mach M_0 à HT où $M_0 < M_{0_{min}}(GP)$ avec la possibilité de trouver un choc attaché. On remarque que la marge de trouver un choc détaché est plus grande pour le troisième profil non symétrique que les deux autres. Alors $M_{0_{min}}$ non seulement dépend de α , t/C , mais dépend aussi de la forme de profil d'aile.

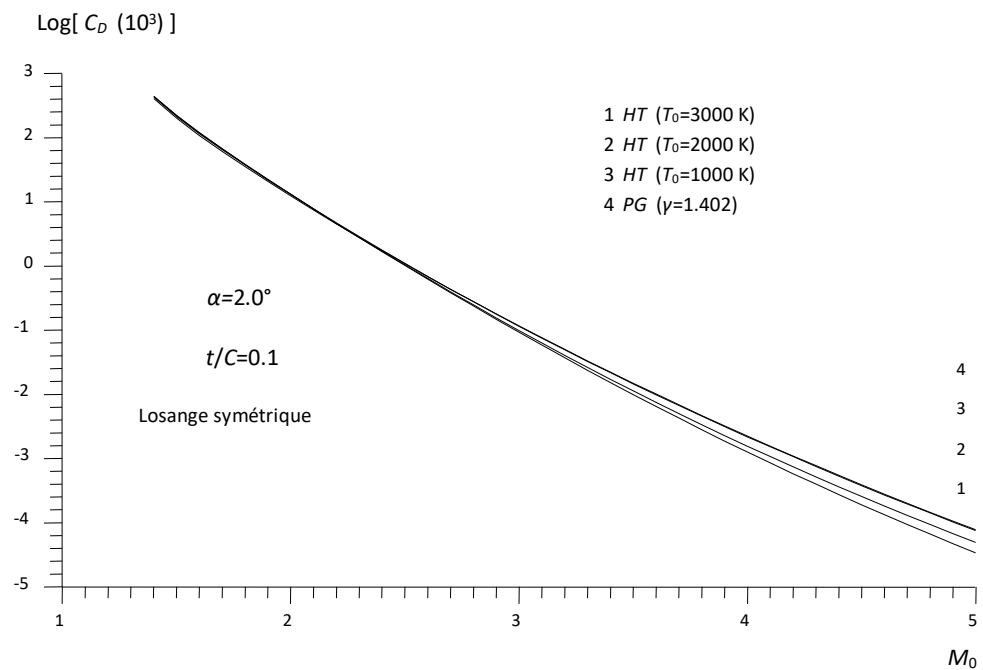


Figure 5.32 : Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de M_0 pour le profil losange symétrique

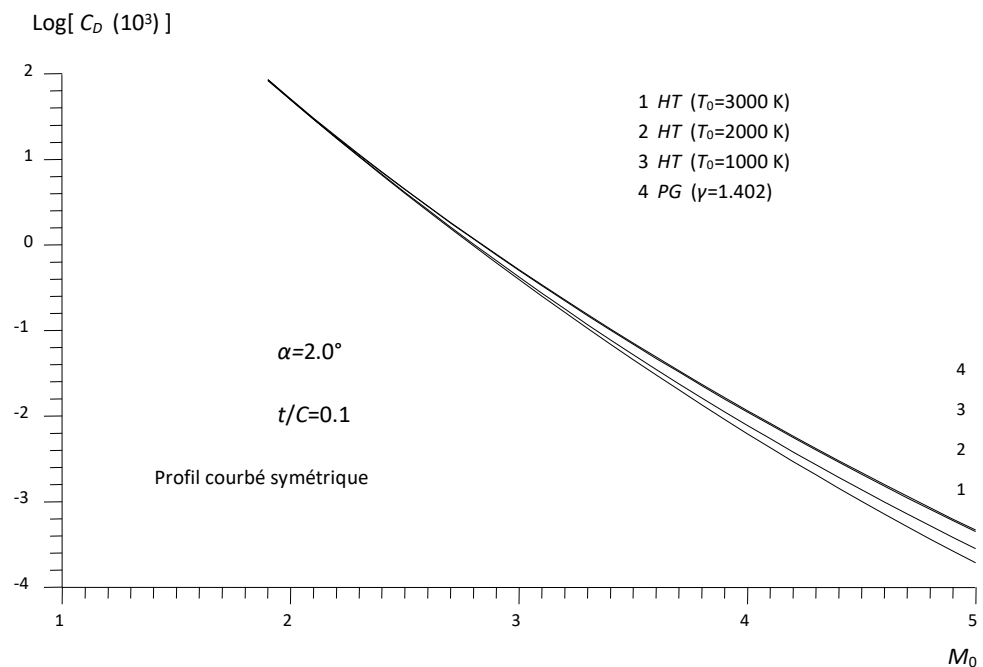


Figure 5.33 : Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.

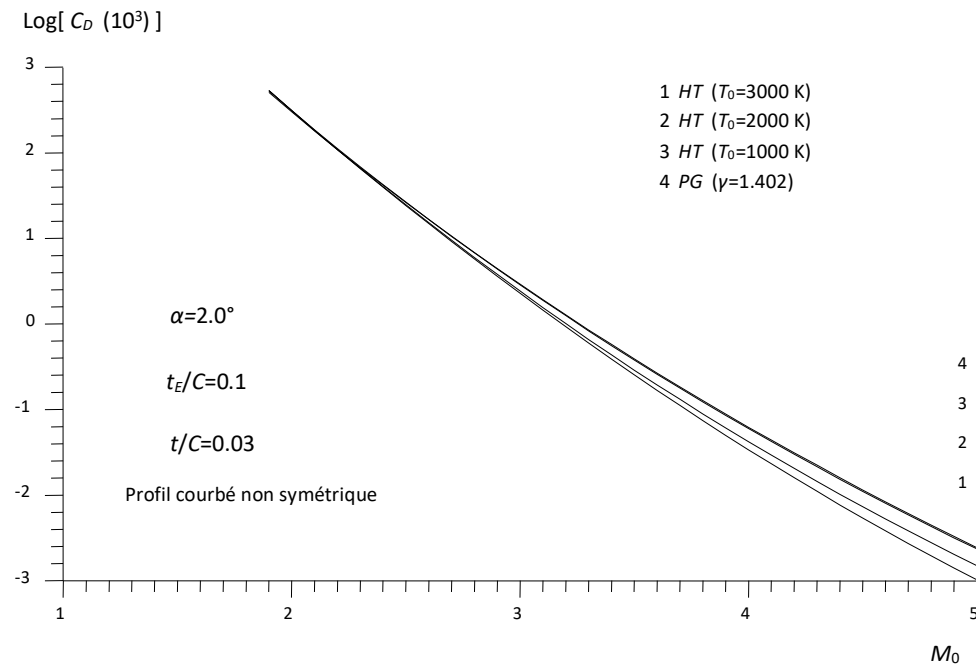


Figure 5.34 : Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de M_0 pour le profil courbé non symétrique.

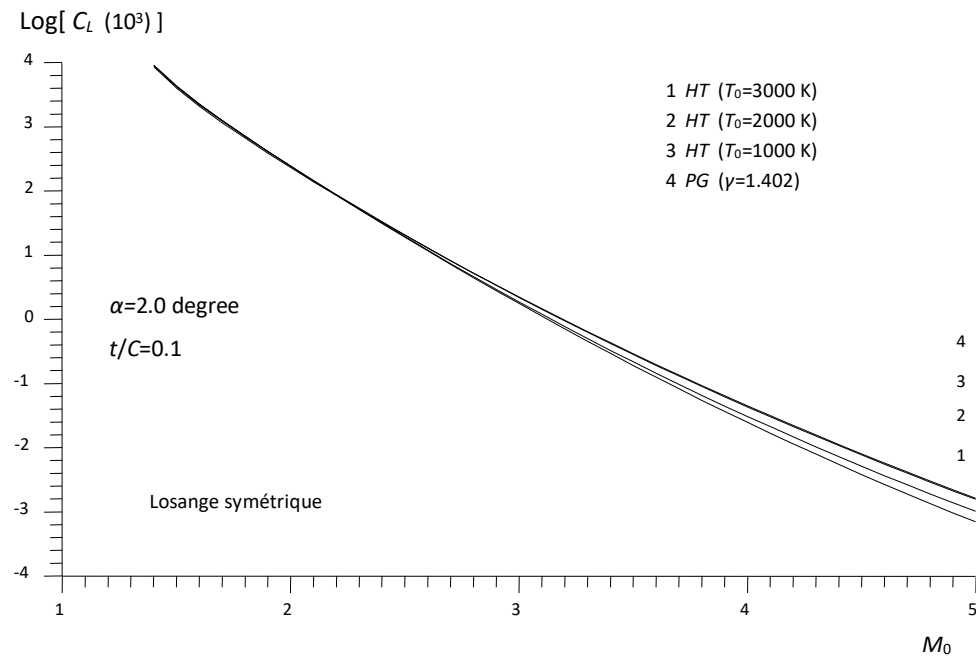


Figure 5.35 : Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de M_0 pour le profil losange symétrique.

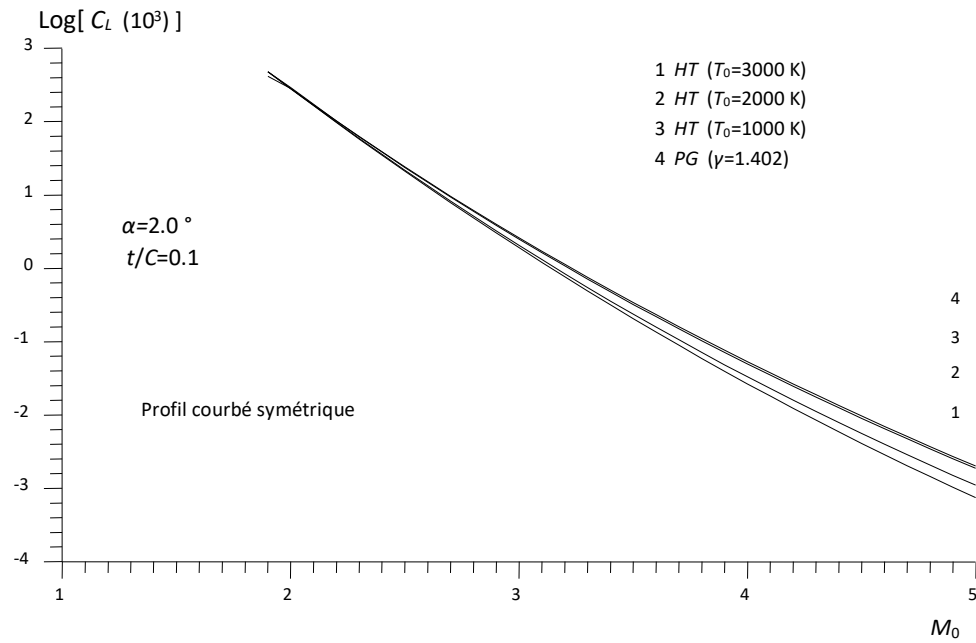


Figure 5.36 : Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.

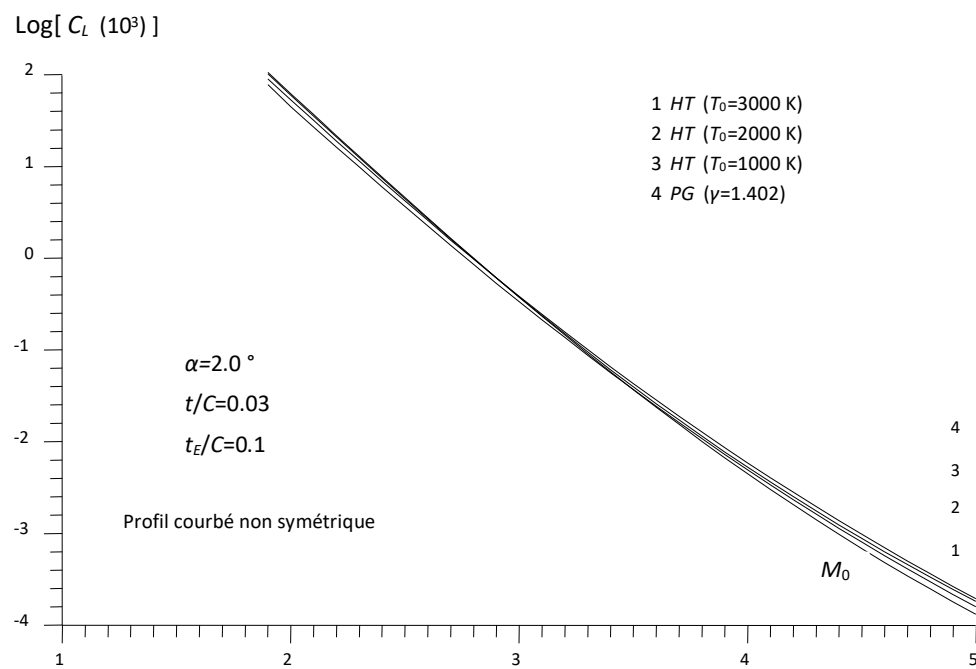


Figure 5.37 : Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de M_0 pour le profil courbé non symétrique.

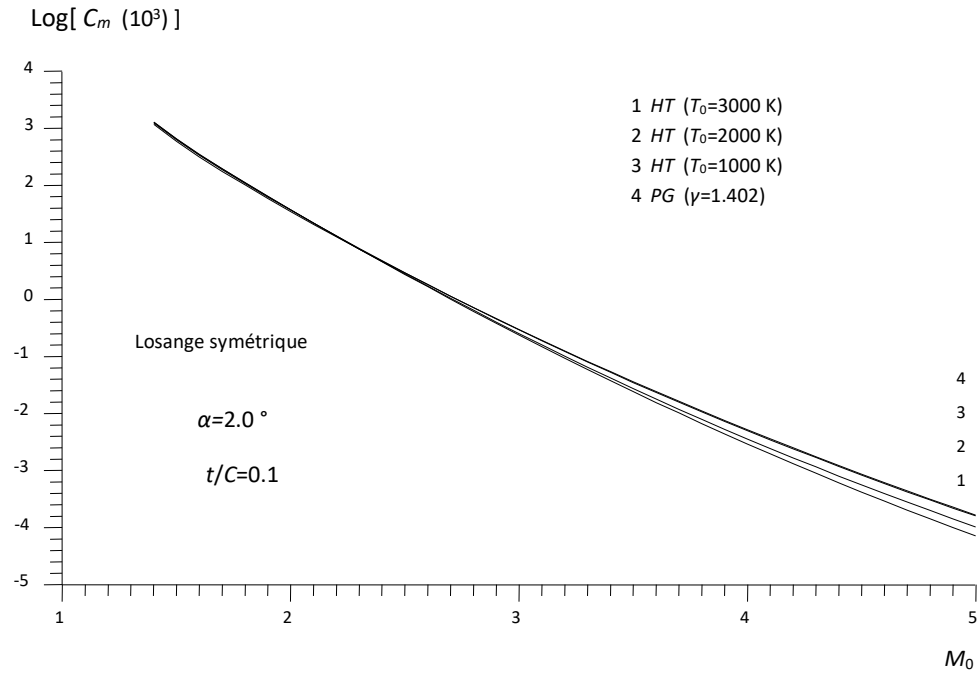


Figure 5.38: Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de M_0 pour le profil losange symétrique.

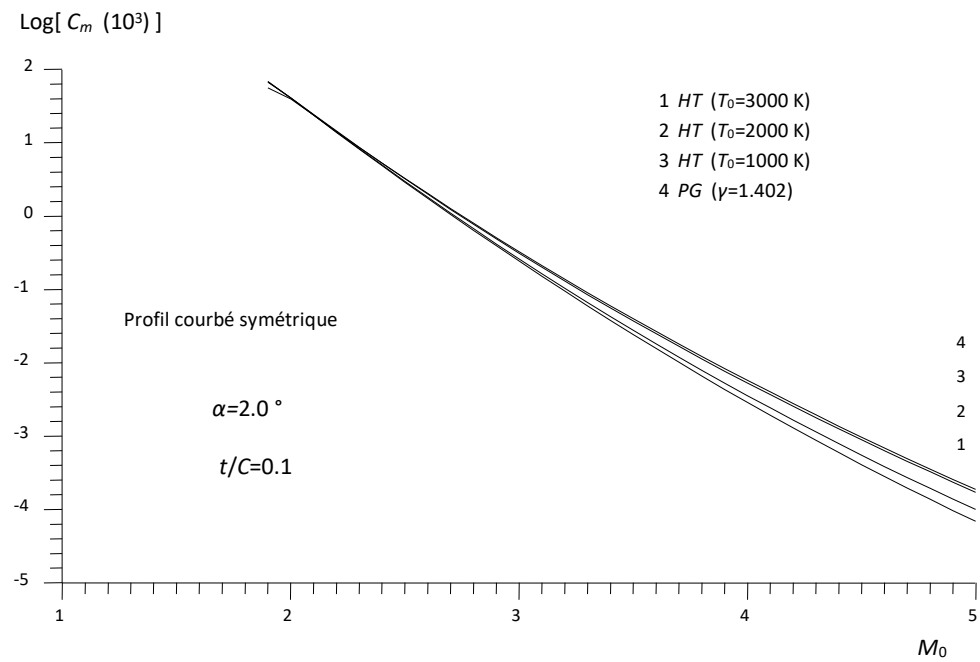


Figure 5.39: Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.

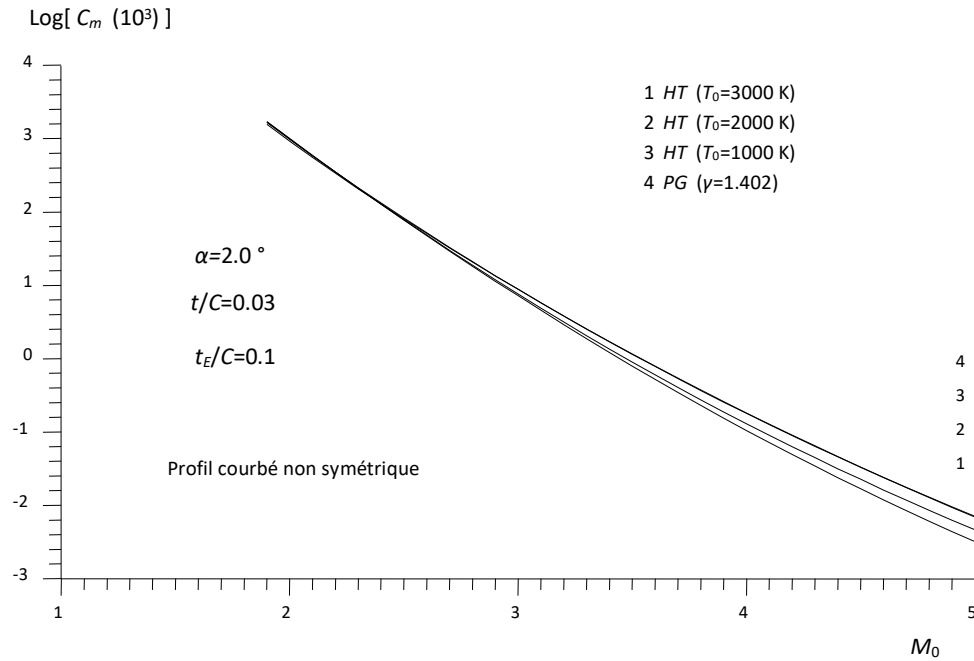


Figure 5.40: Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de M_0 pour le profil courbé non symétrique.

5.1.6. Effet de t/C à HT sur les coefficients aérodynamiques pour M_0 et α fixes

Les figures [5.41-5.49] représentent l'effet de T_0 sur la variation de C_D , C_L et C_m en fonction de l'épaisseur des trois profils d'ailes lorsque $M_0=4.00$ et $\alpha=2.00$. Pour le profil non symétrique, on a varié la courbure de l'extrados t_e/C sans toucher à l'épaisseur de profil pris à $t/C=0.03$. On remarque clairement l'effet de T_0 sur ces paramètres malgré à faible épaisseur. D'où la nécessité d'utiliser le modèle HT pour des éventuelles corrections malgré à faible t/C . On remarque encore que si T_0 diminue, le modèle HT devient non comparable avec le modèle PG . Alors lorsque $T_0 < 240$ K, le modèle PG donne des résultats acceptable. On remarque encore que la forme de profil d'aile influe encore sur la variation de ces coefficients.

Il est à noter que si t/C augmente, on aura la possibilité de trouver un choc détaché. Si $t/C \leq (t/C)_{max}$, on aura forcément un choc attaché, D'où une solution peut être donnée par le programme développé. Si $t/C > (t/C)_{max}$, on aura l'apparition d'une onde de choc détaché.

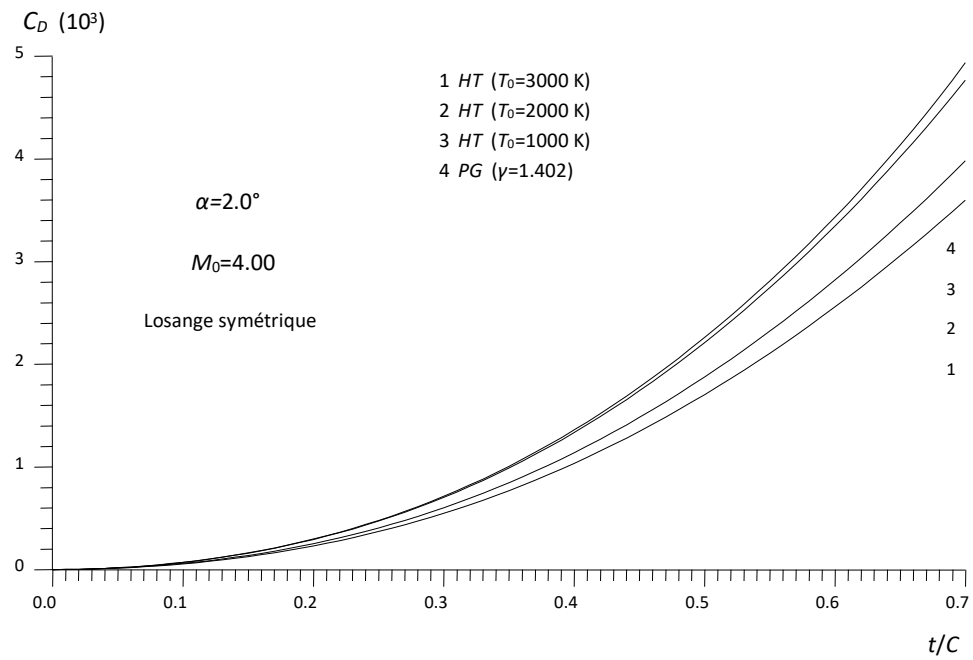


Figure 5.41 : Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de t/C pour le profil losange symétrique.

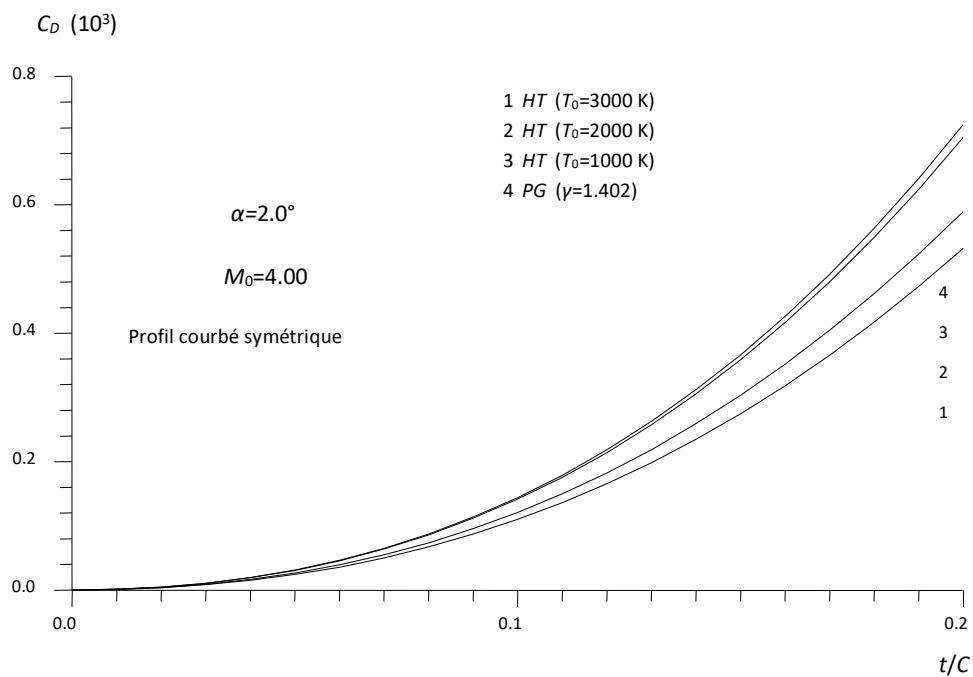


Figure 5.42 : Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de t/C pour le profil courbé symétrique.

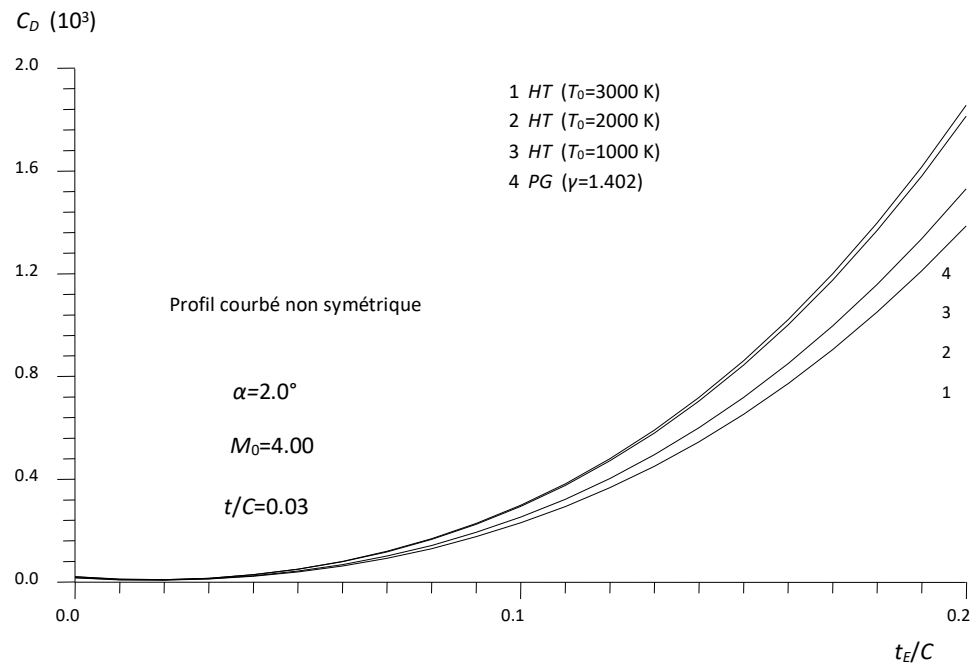


Figure 5.43 : Effet de T_0 sur la variation de C_D en fonction de t/C pour le profil courbé non symétrique.

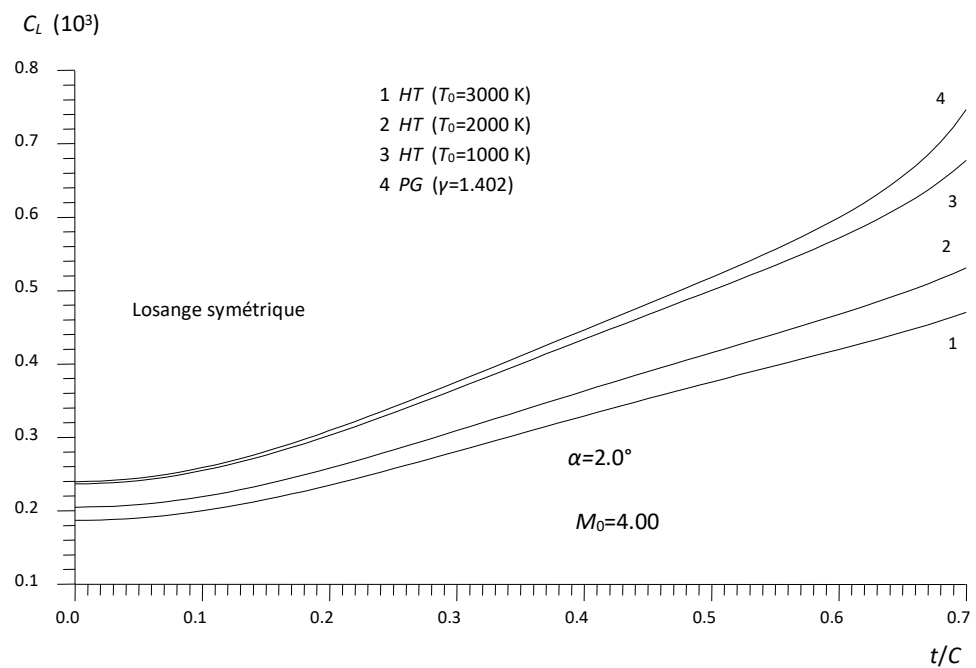


Figure 5.44 : Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de t/C pour le profil losange symétrique.

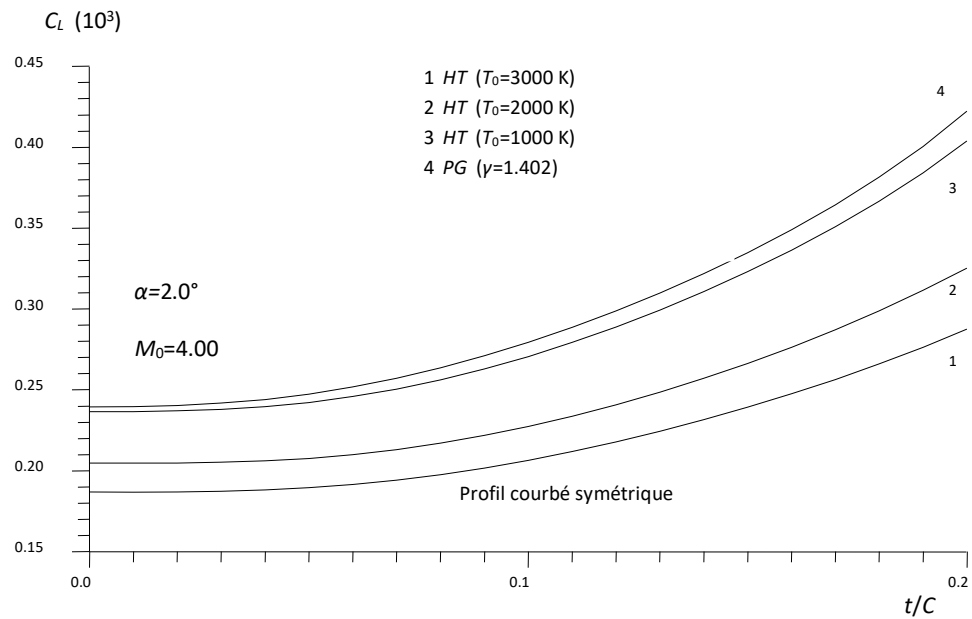


Figure 5.45 : Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de t/C pour le profil courbé symétrique.

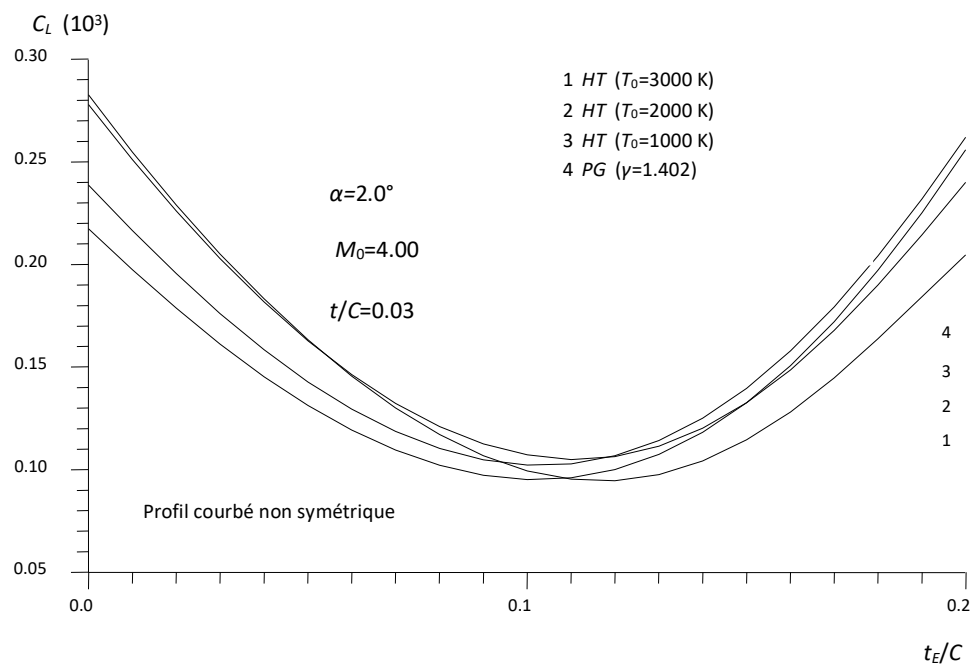


Figure 5.46 : Effet de T_0 sur la variation de C_L en fonction de t/C pour le profil courbé non symétrique.

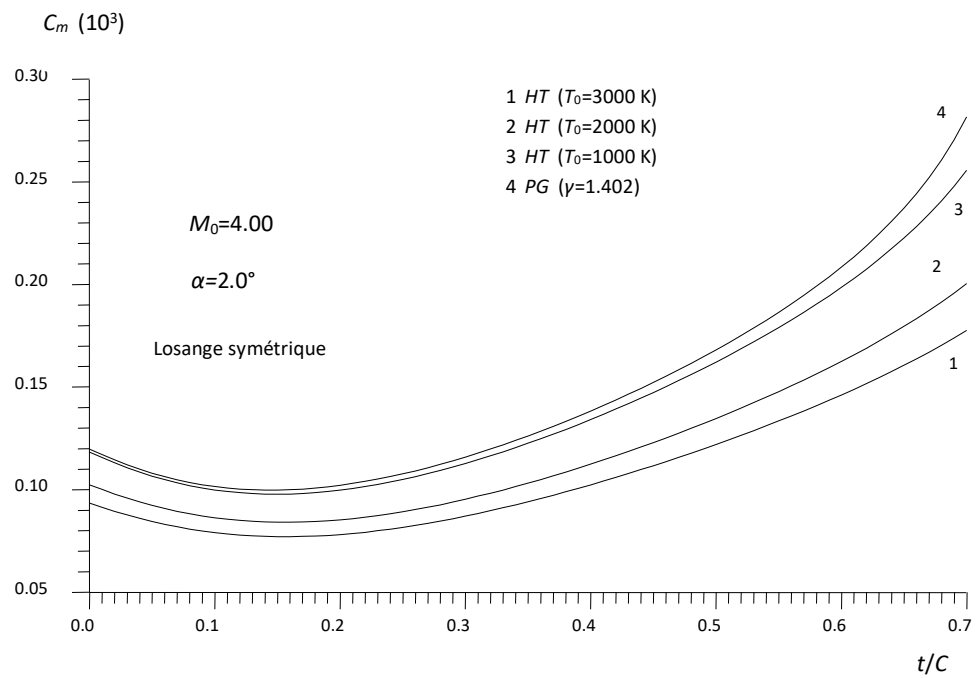


Figure 5.47: Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de t/C pour le profil losange symétrique.

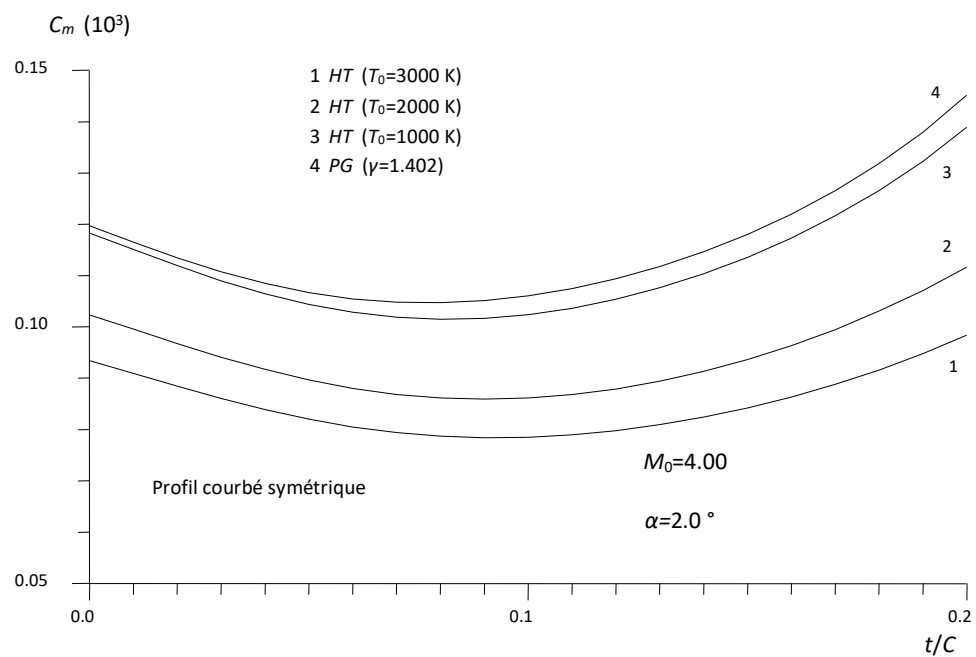


Figure 5.48: Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de t/C pour le profil courbé symétrique.

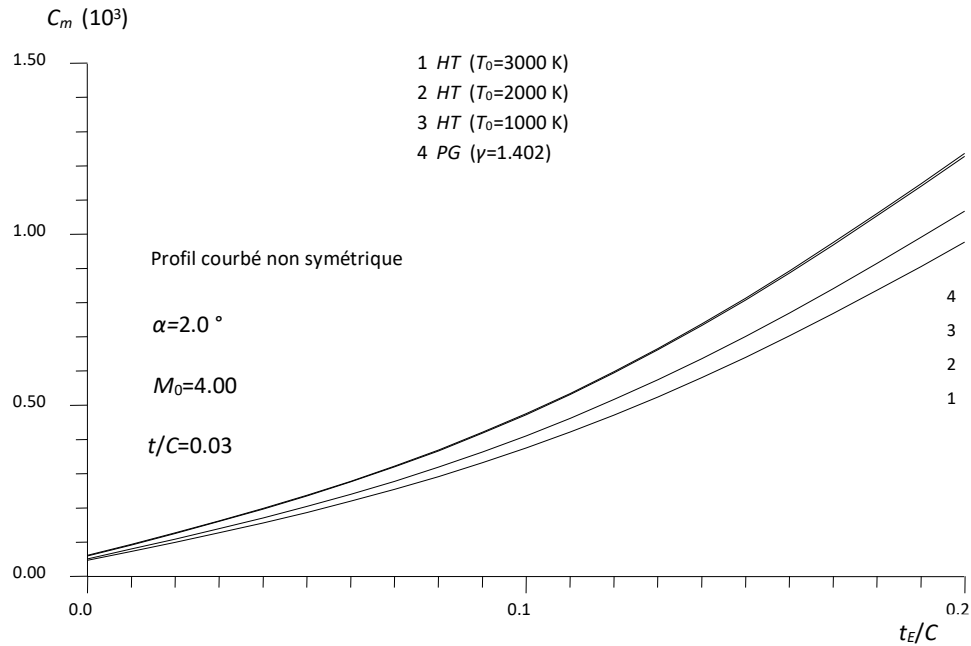


Figure 5.49: Effet de T_0 sur la variation de C_m en fonction de t/C pour le profil courbé non symétrique.

5.1.7. Variation de l'erreur de modèle *GP* par rapport au modèle *HT* en fonction de M_0

Les figures [5.50-5.58] représentent l'erreur relative commise par l'utilisation de modèle *GP* par rapport au modèle *HT* sur les coefficients aérodynamiques C_D , C_L et C_m des trois profils choisis. L'application est faite pour les températures $T_0=1000$ K, 2000 K et 3000 K et pour $\alpha=2.00^\circ$ et $t/C=0.1$. On peut remarquer que l'erreur augmente considérablement et elle peut arriver à 55 % lorsque $T_0=3000$ K et $M_0=5.00$. Cette erreur est remarquée pour les coefficients C_L et C_m pour le profil courbé symétrique (deuxième profil). Cette valeur augmente aussi avec la forme de profil d'aile, t/C et α . La valeur de l'erreur maximale donne l'obligation d'utiliser le modèle *HT* pour des éventuelles corrections aux résultats donnés par le modèle *GP* lorsque T_0 soit élevée et commence à dépasser les 240K environ.

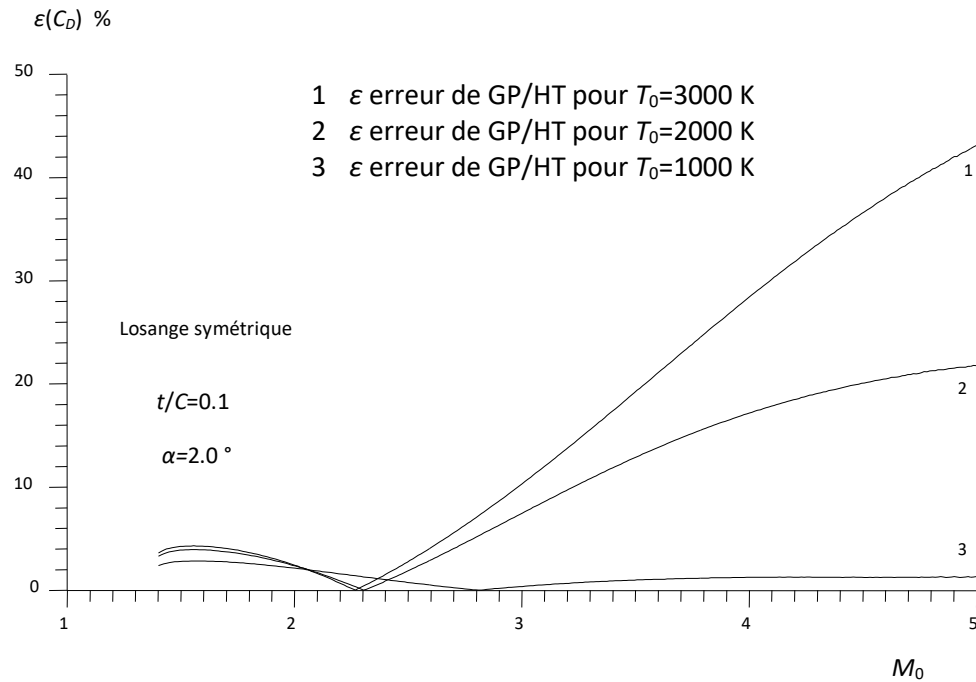


Figure 5.50 : Variation de l'erreur relative commise par le modèle *PG* par rapport au modèle *HT* sur le coefficient C_D en fonction de M_0 pour le profil losange symétrique.

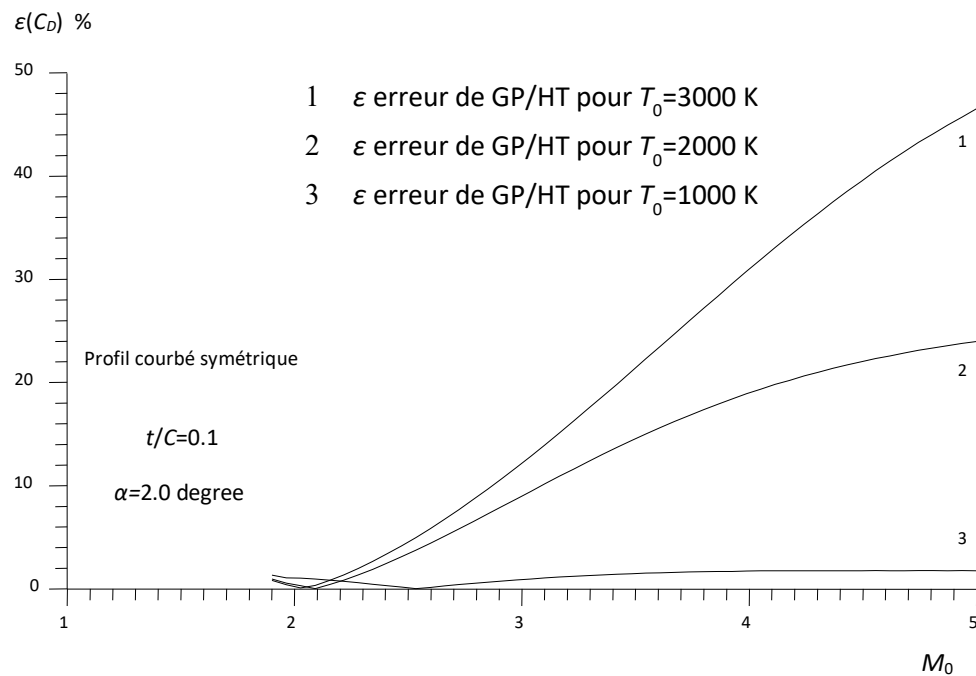


Figure 5.51 : Variation de l'erreur relative commise par le modèle *PG* par rapport au modèle *HT* sur le coefficient C_D en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.

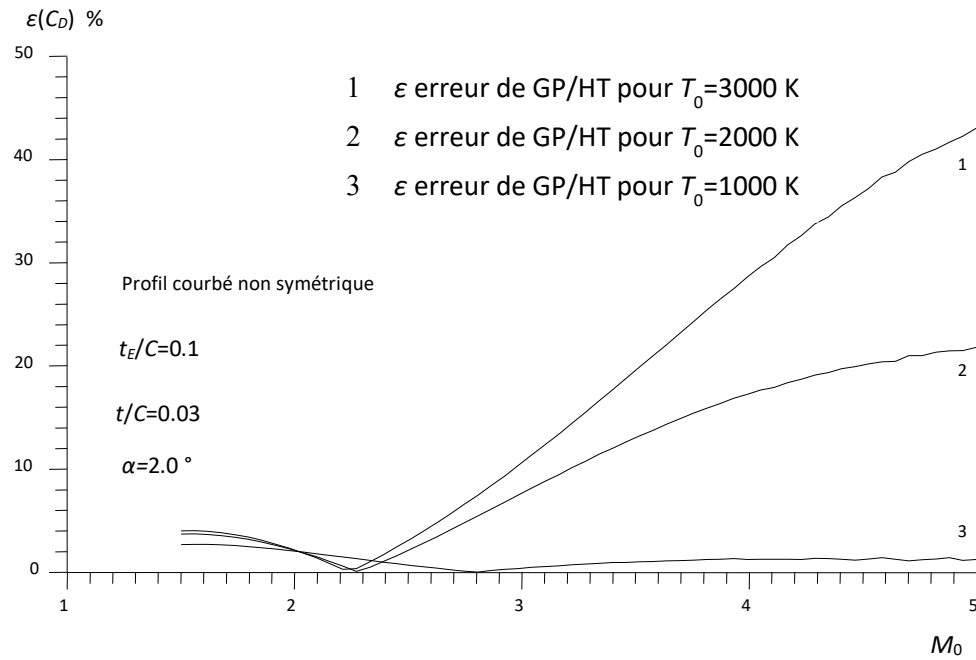


Figure 5.52 : Variation de l'erreur relative commise par le modèle *PG* par rapport au modèle *HT* sur le coefficient C_D en fonction de M_0 pour le profil courbé non symétrique.

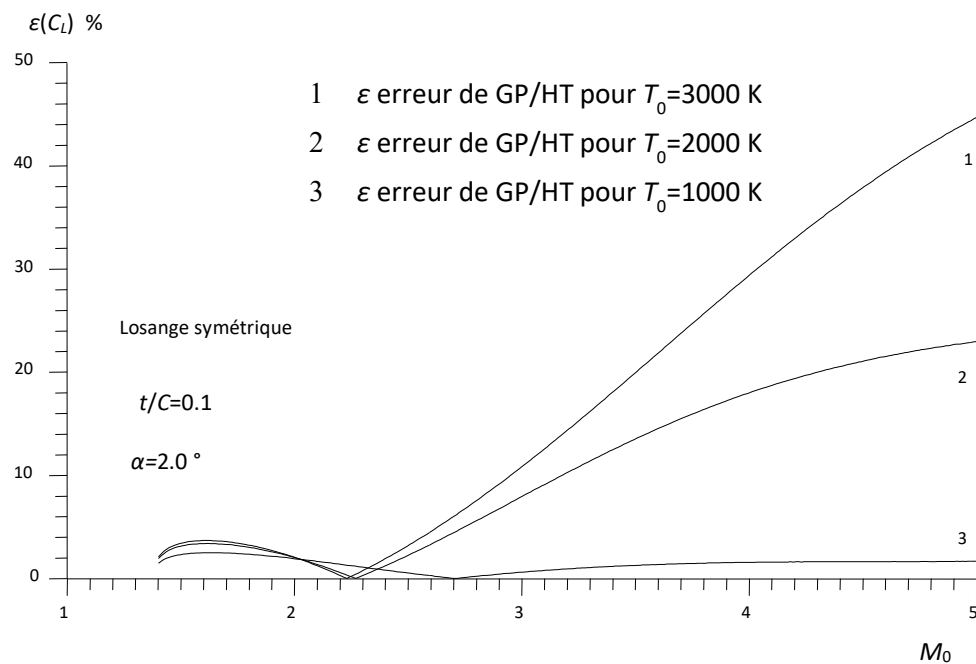


Figure 5.53 : Variation de l'erreur relative commise par le modèle *PG* par rapport au modèle *HT* sur le coefficient C_L en fonction de M_0 pour le profil losange symétrique.

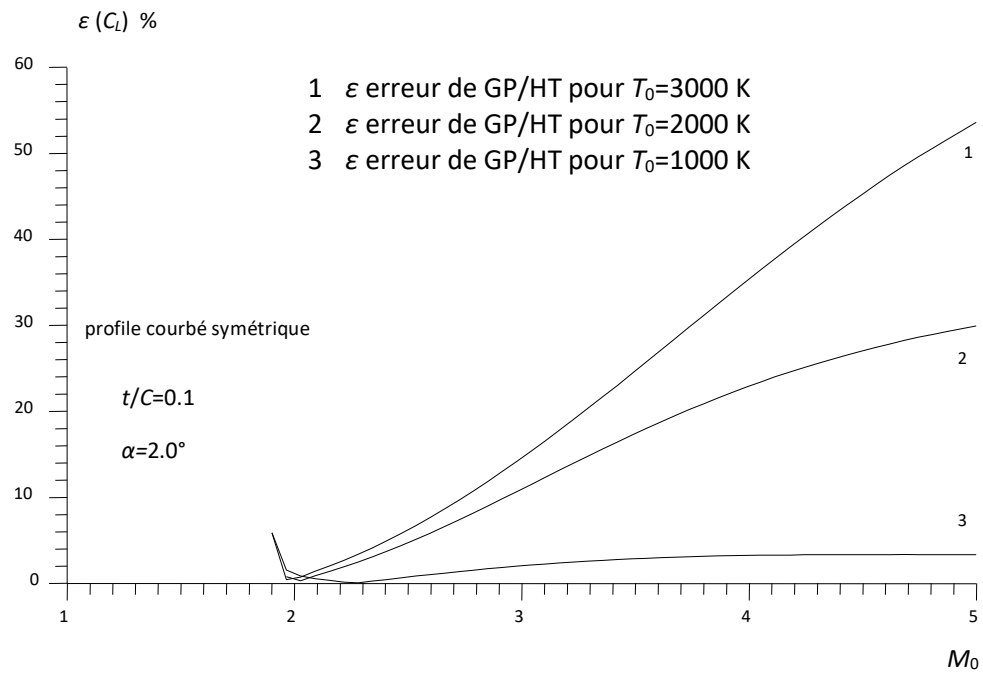


Figure 5.54 : Variation de l'erreur relative commise par le modèle *PG* par rapport au modèle *HT* sur le coefficient C_L en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.

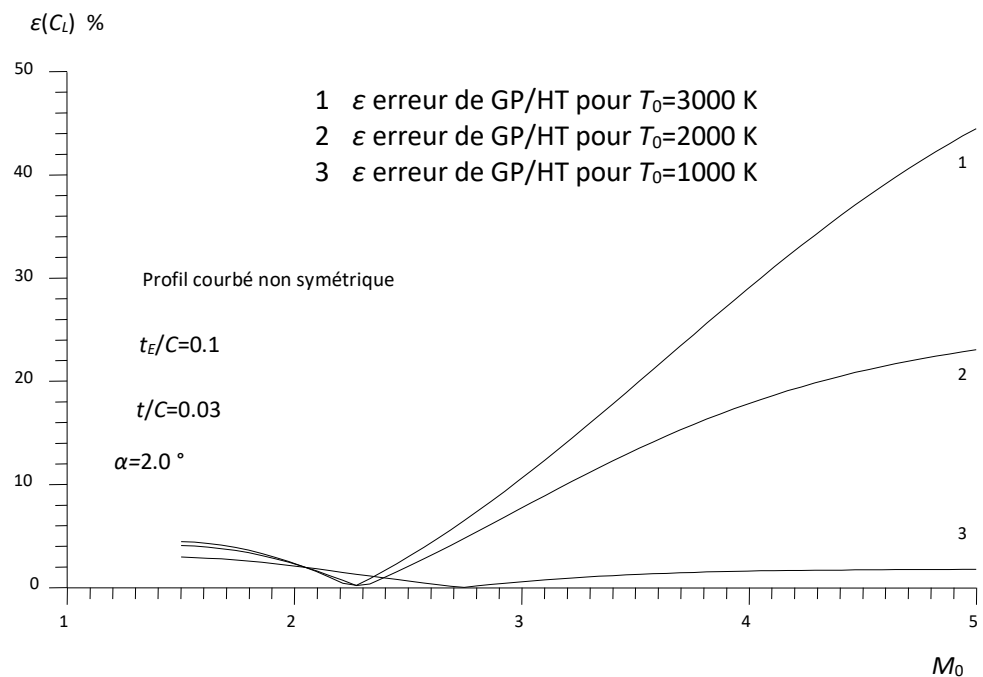


Figure 5.55 : Variation de l'erreur relative commise par le modèle *PG* par rapport au modèle *HT* sur le coefficient C_L en fonction de M_0 pour le profil courbé non symétrique.

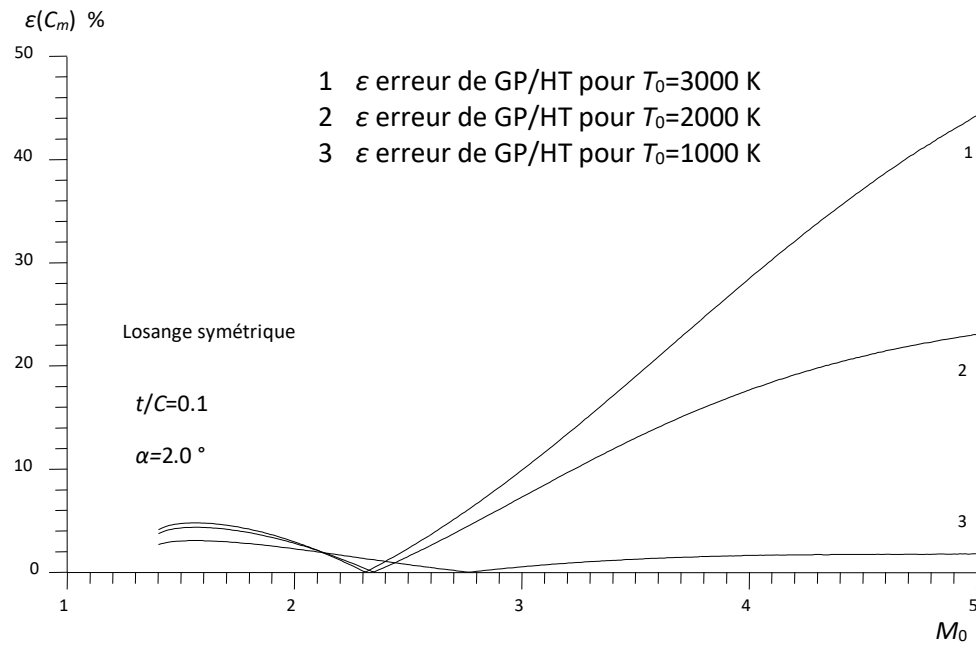


Figure 5.56 : Variation de l'erreur relative commise par le modèle *PG* par rapport au modèle *HT* sur le coefficient C_m en fonction de M_0 pour le profil losange symétrique.

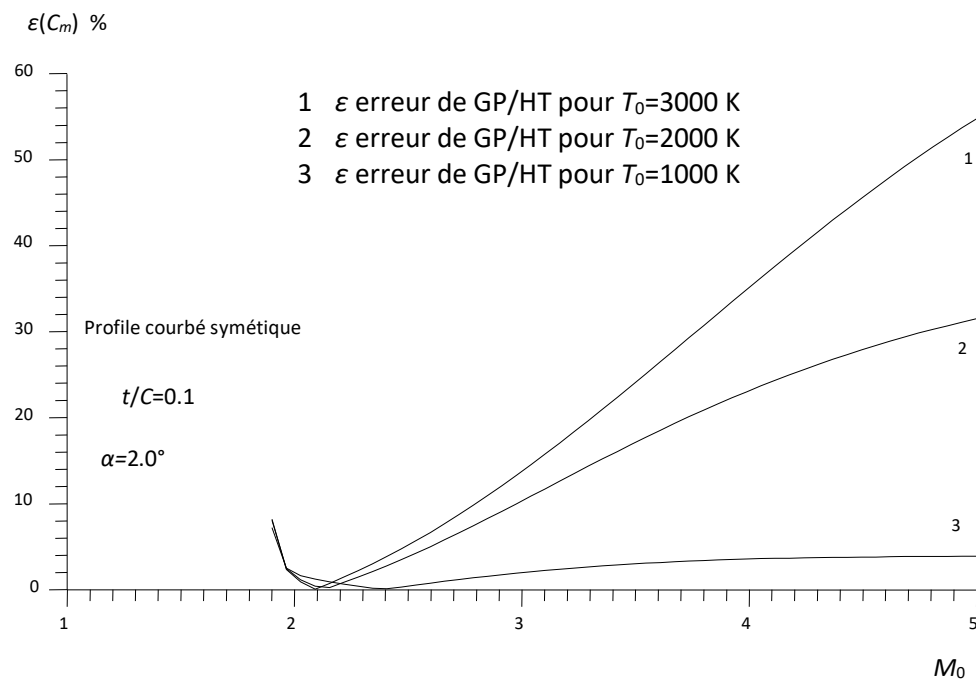


Figure 5.57 : Variation de l'erreur relative commise par le modèle *PG* par rapport au modèle *HT* sur le coefficient C_m en fonction de M_0 pour le profil courbé symétrique.

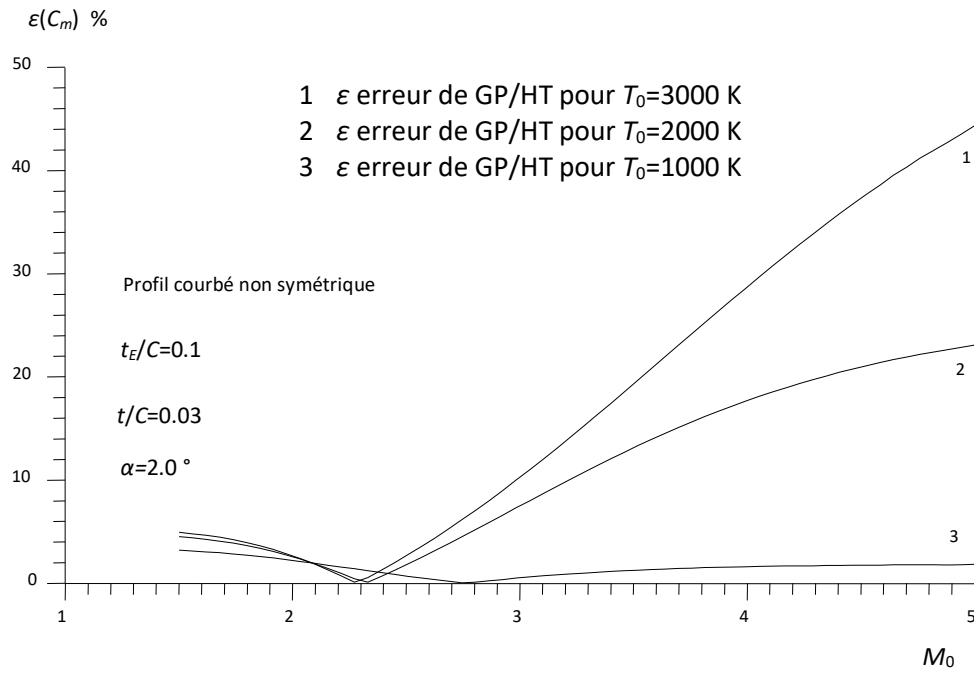


Figure 5.58 : Variation de l'erreur relative commise par le modèle *PG* par rapport au modèle *HT* sur le coefficient C_m en fonction de M_0 pour le profil courbé non symétrique.

5.2. Effet de la nature des gaz sur l'écoulement supersonique autour du profil d'aile pointu :

Les références [4-5,27-28] ont étudié l'effet du gaz générateur sur le calcul de l'écoulement supersonique à haute température HT. Notre étude consiste à étudier l'effet des gaz sur l'écoulement supersonique autour d'un profil d'aile pointue en termes de détermination des coefficients dynamiques du gaz C_D , C_L et C_m . Pour raison de faire une comparaison entre les coefficients C_D , C_L et C_m du gaz avec ceux de l'air afin de déterminer les gaz les plus performants par rapport à l'air, nous introduisons les trois coefficients de comparaison suivants. Donc :

$$\lambda_D = \frac{(C_D)_{gas}}{(C_D)_{air}} \quad (5.1)$$

$$\lambda_L = \frac{(C_L)_{air}}{(C_L)_{gas}} \quad (5.2)$$

$$\lambda_m = \frac{(C_m)_{gas}}{(C_m)_{air}} \quad (5.3)$$

Si le gaz considéré se comporte mieux par rapport à l'air, il doit avoir des coefficients C_D et C_m inférieurs à ceux de l'air. En revanche, le coefficient C_L doit être supérieur à celui de l'air. Donc pour un gaz meilleur par rapport à l'air, il faut obtenir des coefficients de comparaison λ_D , λ_L et λ_m inférieurs à l'unité. Le gaz possédant les plus petites valeurs de λ_D , λ_L et $\lambda_m (<1)$ est le gaz qui présente les meilleurs performances dynamiques du profil.

Il est très important de calculer la différence entre les coefficients C_D , C_L et C_m du gaz sélectionné avec ceux de l'air pour déterminer le pourcentage de gain en performance. On utilise la relation suivante :

$$\varepsilon_\lambda(\%) = |1 - \lambda| \times 100 \quad (5.4)$$

L'application est faite pour 7 différents gaz générateurs qui sont H_2 , O_2 , N_2 , CO , CO_2 , $H_2O_{(vapeur)}$, et air. L'application est également faite pour un profil d'aile courbé symétrique (voir figure 4.11). On note que l'application est valable pour tout type de profil d'aile.

Avant de procéder à la présentation des différents résultats obtenus, on constate que toutes les figures contiennent 7 courbes pour 7 gaz différents comme illustré dans le tableau (5.9). La courbe 1 en bleu présente les résultats pour H_2 . La courbe 2 en rouge présente les résultats pour O_2 . La courbe 3 en violet présente les résultats pour N_2 . La courbe 4 en couleur verte présente les résultats pour le CO . La courbe 5 en couleur marron présente les résultats pour le CO_2 . La courbe 6 en couleur violet foncé présente les résultats pour H_2O et la courbe 7 en couleur noire représente les résultats pour l'air. Pour notre application, nous avons pris les données présentées dans le tableau (5.10).

Tableau 5.9: La légende des figures

Courbe	couleur	gaz
1	Bleu	H ₂
2	Rouge	O ₂
3	Violet	N ₂
4	Vert	CO
5	Marron	CO ₂
6	Violet foncé	H ₂ O
7	Noir	Air

Tableau 5.10: les données principales de l'application

paramètre	M_∞	T_0 (K)	P_0 (atm)	α (°)	t/C (%)
valeur	5.00	3500	1.00	2.00	4

Dans la présentation des résultats, nous avons fait varier séparément les 4 paramètres principaux α, M_∞, T_0 et t/C pour les 7 gaz du tableau (5.9) et les mêmes données du tableau (5.10) pour obtenir les trois coefficients dynamiques de gaz C_D, C_L et C_m ainsi que les coefficients de comparaison λ_D, λ_L et λ_m .

Dans nos résultats, nous ne intéressons pas aux commentaires liés à la variation spécifique des coefficients C_D, C_L et C_m ainsi qu'aux λ_D, λ_L et λ_m sans ajouter l'effet du gaz générateur.

Une discrétisation modérée de profil choisi a été utilisée avec un nombre réduit de points afin de minimiser le temps de calcul numérique. Le raffinement du maillage peut ensuite améliorer les résultats graphiques et tabulés.

5.2.1 Paramètres à haute température de l'écoulement à travers l'onde de choc oblique et la détente de Prandtl Meyer

Le tableau (5.11) représente un exemple typique sur les paramètres à travers une onde de choc oblique faible dans un segment typique de la figure (3.1.a) avec les données $M_1=5.00$, $T_0=3500$ K et un angle de déviation de l'écoulement $\alpha = 10^\circ$ pour les 7 gaz du tableau (5.9). Le but de cet exemple est de valider le programme numérique, étant donné que dans un profil d'aile il y aura une série de segments ou l'écoulement crée une onde de choc infinitésimale par rapport au segment amont. Sachant clairement qu'à travers une onde de choc oblique faible, il y aura une diminution du nombre de Mach, une augmentation de la température statique et une augmentation de la pression statique et totale par rapport au flux amont du segment adjacent [5]. On constate que le gaz influence principalement sur tous les paramètres d'une onde de choc oblique démontrant comme résultat préliminaire l'influence du gaz sur les coefficients C_D , C_L et C_m .

Tableau 5.11 : Exemple sur l'effet du gaz sur les paramètres de l'onde de choc oblique pour $M_1=5.00$, $T_0=3500$ K et $\alpha = 10^\circ$.

	β (°)	M_2	P_2/P_1	T_2/T_1
H ₂	19.1464	4.0728	3.0063	1.3941
O ₂	18.9330	4.1712	2.9087	1.3329
N ₂	19.0296	4.1256	2.9544	1.3612
CO	19.0091	4.1333	2.9495	1.3574
CO ₂	18.4050	4.4465	2.6363	1.1706
H ₂ O	18.5727	4.3436	2.7532	1.2352
Air	19.0254	4.1396	2.9552	1.3613

De même, le tableau (5.12) représente également un exemple typique sur les paramètres à travers une détente de Prandtl Meyer présentés dans la figure (3.1.b) pour les mêmes données de l'écoulement amont $M_1=5.00$, $T_0=3500$ K et un angle de déviation de l'écoulement $\alpha = 10^\circ$ pour les 7 gaz du tableau (5.9).

Le but de cet exemple est de valider aussi le programme numérique développé, étant donné que dans un profil d'aile il y aura une série de segments ou l'écoulement crée une expansion infinitésimale par rapport au segment amont. Sachant clairement qu'à travers une expansion il y aura une augmentation du

nombre de Mach, une diminution de la température statique et une diminution de la pression statique. La pression totale reste constante à travers une expansion de Prandtl Meyer [27]. On constate que le gaz influence principalement sur tous les paramètres d'une détente de Prandtl Meyer démontrant comme résultat préliminaire l'influence du gaz sur les coefficients C_D , C_L et C_m .

Tableau 5.12 : Exemple sur l'effet du gaz sur les paramètres de la détente de Prandtl Meyer pour $M_1=5.00$, $T_0=3500$ K et $\alpha = 10^\circ$.

	$\nu_2 (^\circ)$	M_2	P_2/P_1	T_2/T_1
H ₂	94.9754	6.2605	0.1688	0.6745
O ₂	102.3295	6.0804	0.1907	0.7121
N ₂	98.8375	6.1639	0.1799	0.6938
CO	99.6657	6.1567	0.1806	0.6949
CO ₂	129.6077	5.6224	0.2750	0.8400
H ₂ O	119.9297	5.8176	0.2318	0.7769
Air	98.5757	6.1622	0.1782	0.6902

5.2.2 Coefficients dynamiques des gaz à haute température

Le tableau (5.13) représente un exemple typique de l'effet de 7 gaz du tableau (5.9) sur les coefficients dynamiques des gaz C_D , C_L et C_m et les coefficients de comparaison λ_D , λ_L et λ_m du problème avec les données présentées au tableau (5.10). Les résultats de ce tableau ne représentent qu'un seul point du profil discrétisé. Il est clairement illustré l'influence des 7 gaz générant l'écoulement sur l'ensemble des coefficients. Pour cet exemple, on note l'existence des gaz avec de meilleures performances par rapport à l'air, d'autres avec des performances mauvaises, et d'autres encore avec les mêmes performances que l'air. On remarque également que les gaz ne présentent pas une amélioration globale au même temps dans tous les coefficients. Lorsque le gaz présente une augmentation de la traînée, il améliore le moment de tangage et n'améliore pas la force de portance. Donc le choix d'un tel gaz dépend du besoin du constructeur quant au coefficient souhaitant son amélioration.

Tableau 5.13: comparaison des coefficients dynamiques des gaz avec l'air

	$C_D (\times 10^{-5})$	$C_L (\times 10^{-5})$	$C_m (\times 10^{-5})$	λ_D	λ_L	λ_m
H ₂	0.2081	4.5449	2.0104	1.2280	0.8143	1.2254
O ₂	0.1544	3.3702	1.4953	0.9112	1.0981	0.9114
N ₂	0.1785	3.8962	1.7263	1.0532	0.9499	1.0522
CO	0.1737	3.7920	1.6804	1.0252	0.9760	1.0242
CO ₂	0.0447	0.9744	0.4360	0.2637	3.7980	0.2657
H ₂ O	0.0743	1.6201	0.7223	0.4386	2.2843	0.4402
Air	0.1694	3.7010	1.6406	1.0000	1.0000	1.0000

Le tableau (5.14) représente l'effet des 7 gaz sur la variation d'entropie total (saut d'entropie total) ainsi que la position dynamique du centre de gaz pour les données de profil d'aile du tableau (5. 10). On note l'influence du gaz sur ces deux paramètres. On ne peut pas comparer la variation d'entropie entre les 7 gaz puisque la valeur présentée dans le tableau (5.9) est donnée sous la forme adimensionnelle $\Delta S/R$. Mais si on compare la valeur réelle du saut d'entropie on peut dire que le gaz H₂ présente le plus grand saut d'entropie étant donné que le nombre de Mach à travers une onde de choc oblique est le plus petit possible en comparaison avec les 6 autres gaz, c'est à dire que le H₂ a fourni beaucoup d'énergie pour réduire le nombre de Mach après le choc. Pour le profil, le saut d'entropie obtenu est le résultat de tous les sauts d'entropie infinitésimaux le long des chocs infinitésimaux successifs sur la surface du profil.

Nous notons qu'il n'y aura aucune influence du gaz sur la position dynamique du centre du gaz obtenue.

Tableau 5.14 : Effet du gaz sur la variation d'entropie et la position du centre dynamique du gaz

	$\Delta S/R$	x_{GDC}/C	y_{GDC}/C
H ₂	0.1165	0.4271	0.0353

O ₂	0.1092	0.4284	0.0355
N ₂	0.1121	0.4270	0.0354
CO	0.1094	0.4278	0.0354
CO ₂	0.1015	0.4320	0.0359
H ₂ O	0.0882	0.4301	0.0359
Air	0.1207	0.4284	0.0352

5.2.3 Effet des gaz à haute température en fonction de α

Les figures [5.59-5.61] représentent l'effet des 7 gaz du tableau (5.9) sur la variation des coefficients C_D , C_L et C_m en fonction de l'angle d'incidence pour l'exemple du tableau (5.10).

Vu que le profil choisi est symétrique, le coefficient de portance C_L et le moment de tangage C_m sont égaux à zéro conformément aux figures (5.60) et (5.61) lorsque $\alpha=0^\circ$. Ce résultat peut être ajouté comme la 4^{ème} méthode de validation de nos résultats numériques.

Il est à noter qu'il existe une valeur maximale de l'angle d'incidence $\alpha_{\max}$ pour chaque gaz. Il ne faut pas dépasser une certaine valeur maximale de l'angle d'incidence pour ne pas avoir le phénomène de décrochage. Cette limite est autorisée jusqu'à environ 10° [67]. Ce résultat est en accord avec la limite obtenue dans notre étude.

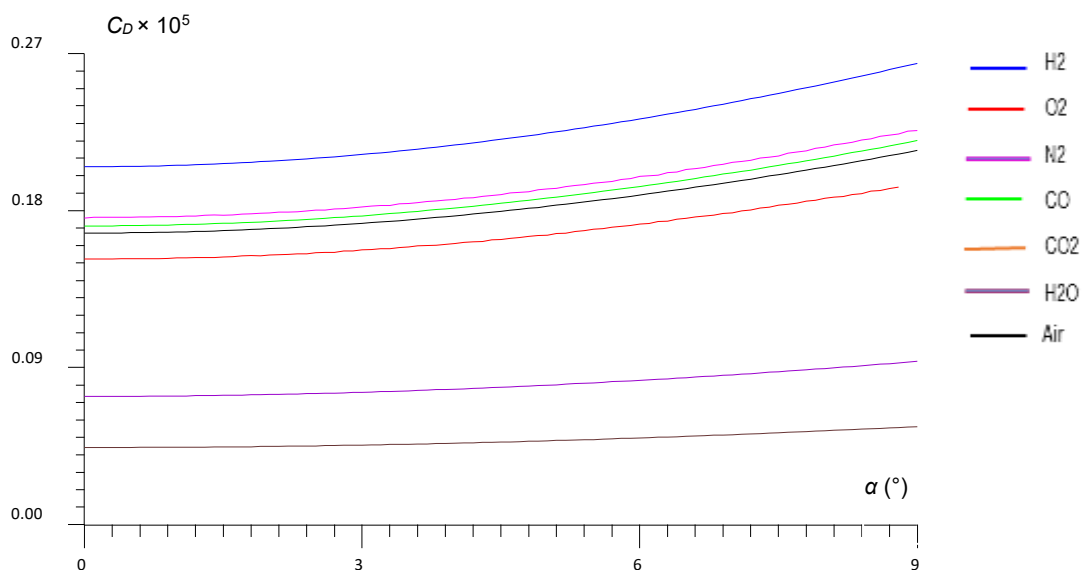


Figure 5.59 : Effet des gaz sur la variation de C_D en fonction de α pour le profil symétrique courbé

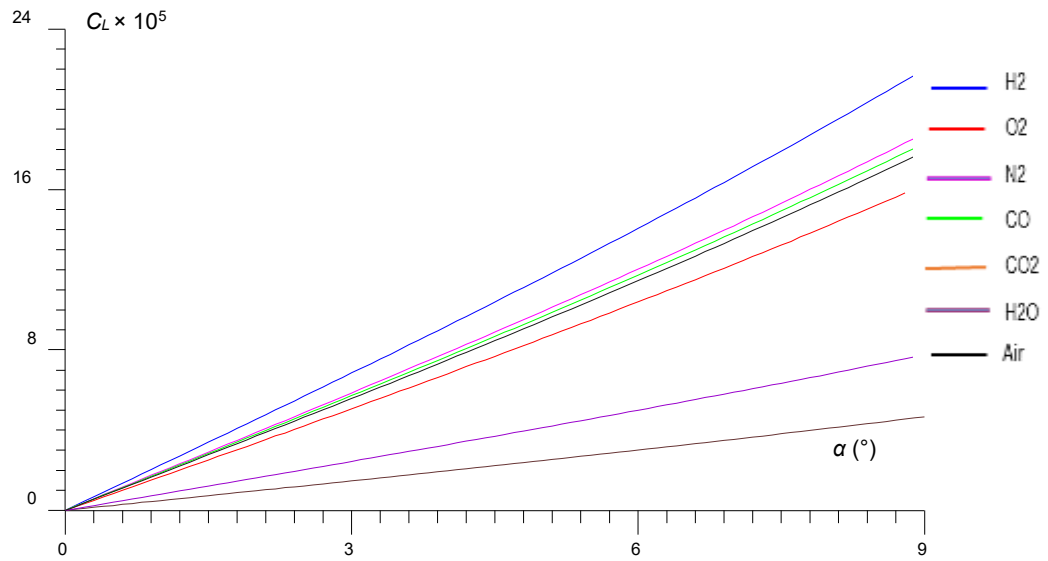


Figure 5.60. Effet des gaz sur la variation de C_L en fonction de α pour le profil symétrique courbé

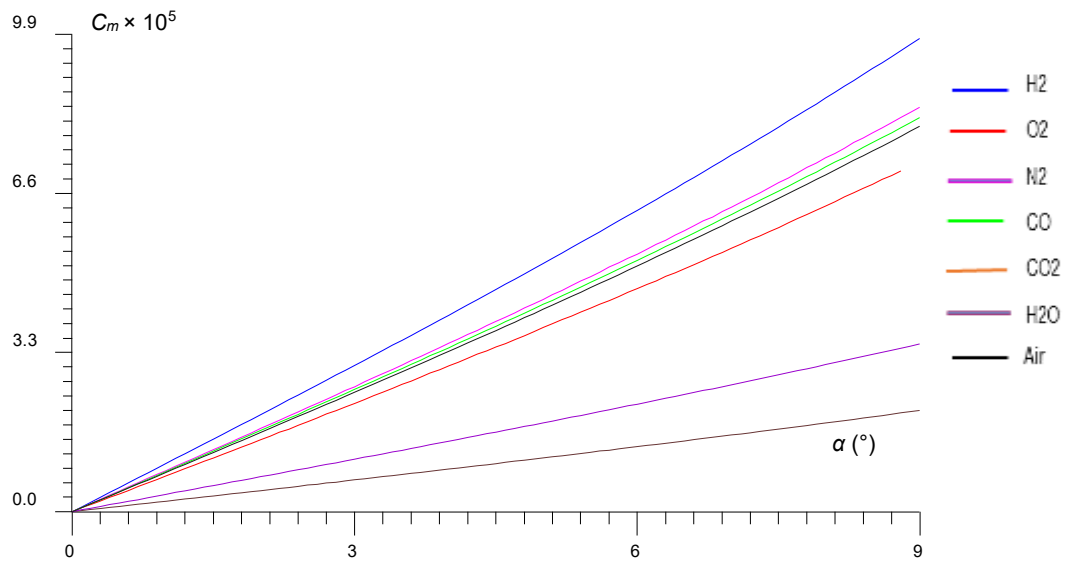


Figure 5.61. Effet des gaz sur la variation de C_m en fonction de α pour le Profil symétrique courbé

5.2.4 Effet des gaz à haute température en fonction de M_∞

Les figures [5.62-5.64] représentent l'effet des 7 gaz du tableau (5.9) sur la variation des coefficients C_D , C_L et C_m en fonction de nombre de mach à l'infini amont M_∞ pour l'exemple du tableau (5.10).

Lorsque M_∞ augmente progressivement, les trois coefficients diminuent progressivement. Tenant compte à la grande différence entre les valeurs des coefficients C_D , C_L et C_m pour les nombres de mach faibles et élevés, les coefficients dynamiques des gaz ne sont pas nulles mais ont des petites valeurs qui sont difficiles à distinguer sur le graphe. Ce qui nous intéresse c'est que lorsque M_∞ augmente, la nature du gaz n'a pas un grand effet sur les coefficients C_D , C_L et C_m comme illustré sur les figures [5.62-5.64].

Les résultats numériques obtenus démontrent qu'il existe un nombre de Mach minimum $(M_\infty)_{min}$ pour chaque gaz. Ainsi, lorsque $M_\infty < (M_\infty)_{min}$, on aura nécessairement l'apparition d'une onde de choc détachée sur le profil.

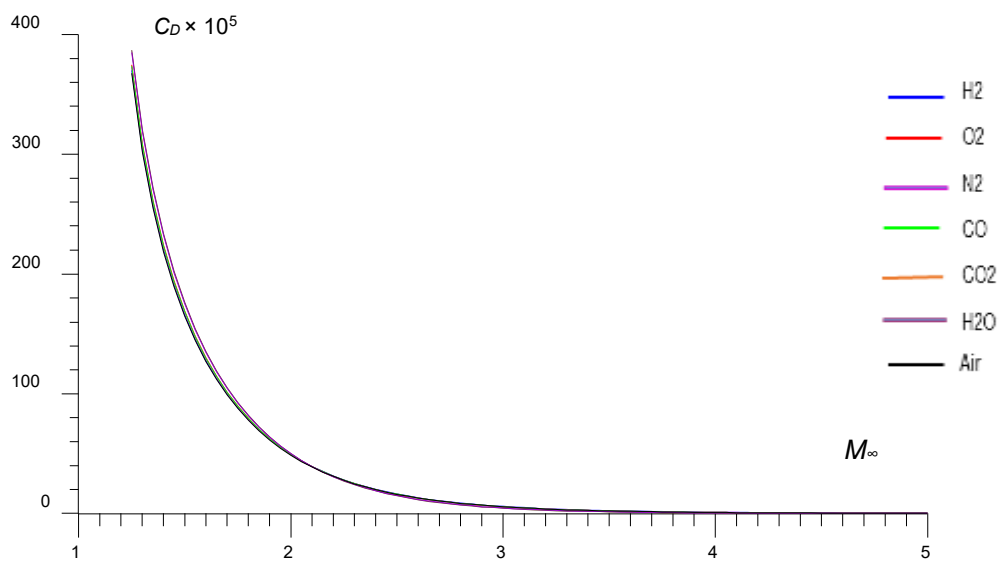


Figure 5.62. Effet des gaz sur la variation de C_D en fonction de M_∞ pour le profil symétrique courbé

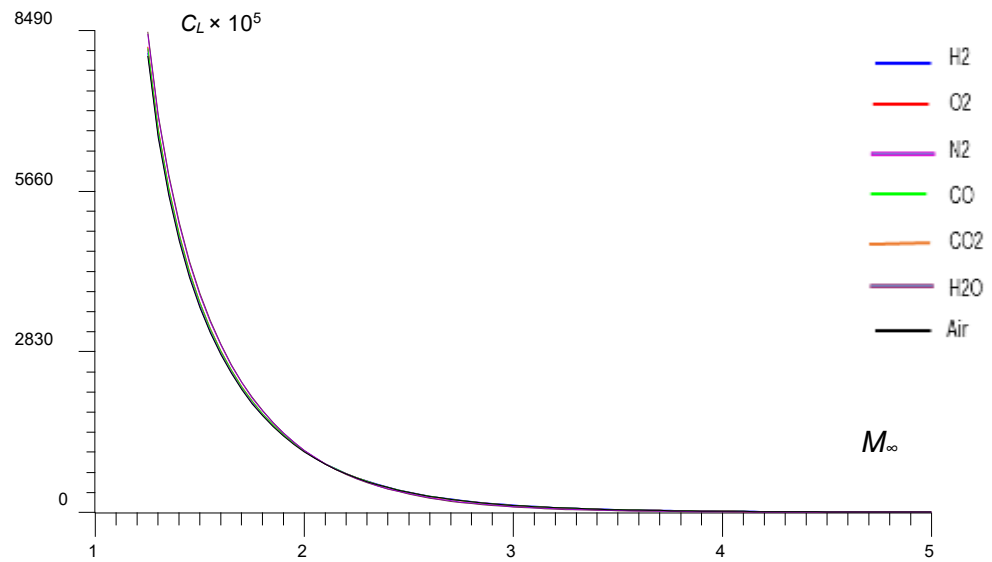


Figure 5.63. Effet des gaz sur la variation de C_L en fonction de M_∞ pour le profil symétrique courbé

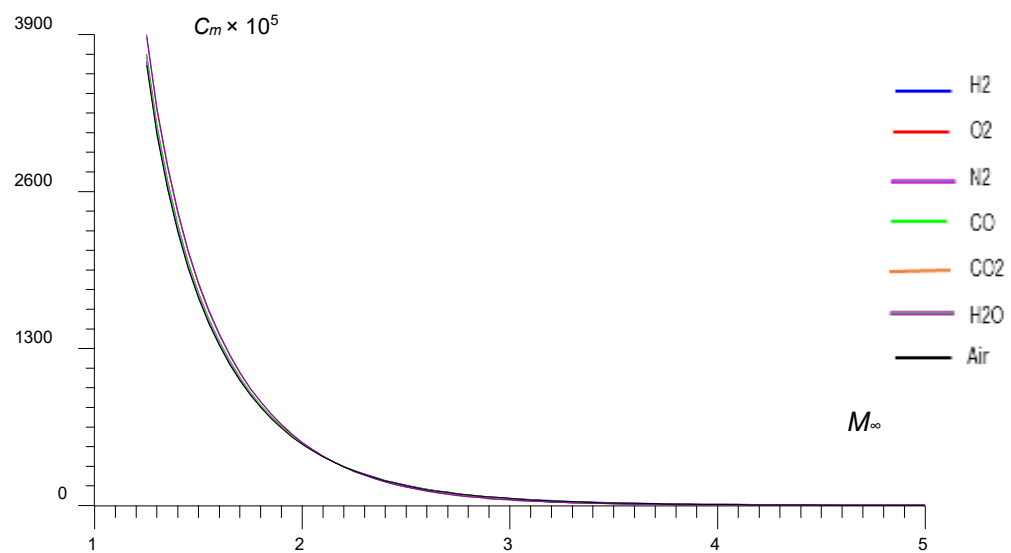


Figure 5.64. Effet des gaz sur la variation de C_m en fonction de M_∞ pour le profil symétrique courbé

5.2.5 Effet des gaz à haute température en fonction de T_0

Les figures [5.65-5.67] représentent l'effet des 7 gaz du tableau (5.9) sur la variation des coefficients C_D , C_L et C_m en fonction de la température génératrice T_0 pour l'exemple du tableau (5.10).

Les résultats numériques obtenus démontrent qu'il existe une certaine valeur minimale de température de stagnation $(T_0)_{min}$ pour chaque gaz. Ainsi, lorsque $T_0 < (T_0)_{min}$ on aura nécessairement l'apparition d'une onde de choc détachée sur le profil. Ce résultat démontre que nous ne pouvons pas utiliser le modèle PG pour certains gaz pour déterminer les coefficients C_D , C_L et C_m à faible température de stagnation T_0 .

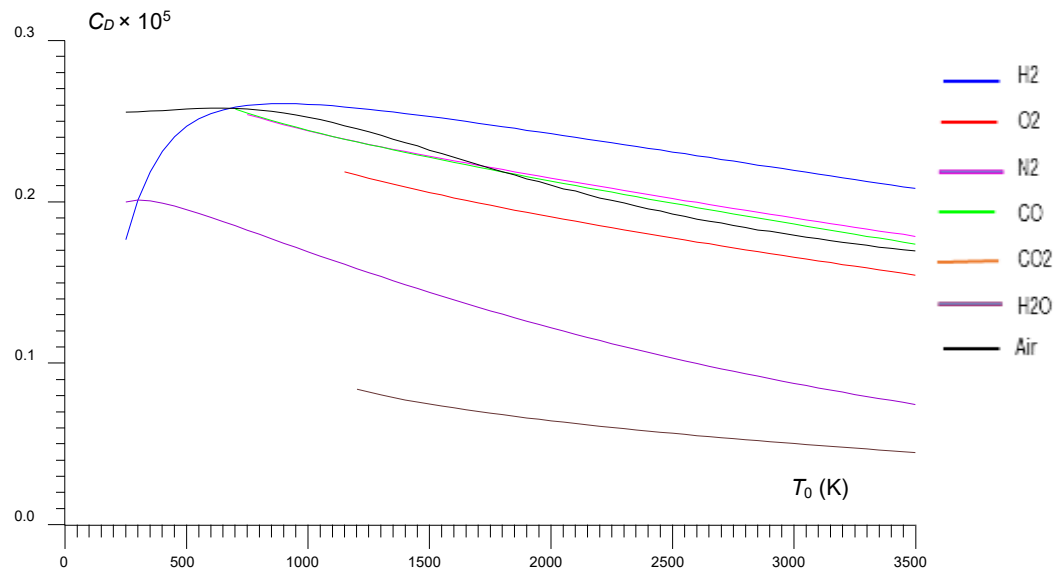


Figure 5.65. Effet des gaz sur la variation de C_D en fonction de T_0 pour le profil symétrique courbé

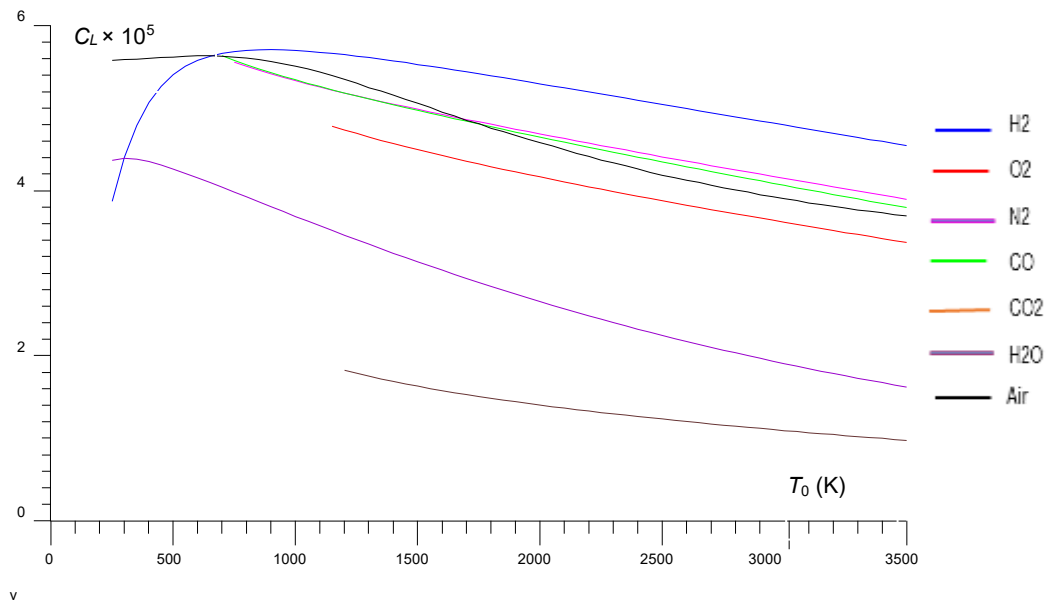


Figure 5.66. Effet des gaz sur la variation de C_L en fonction de T_0 pour le profil symétrique courbé

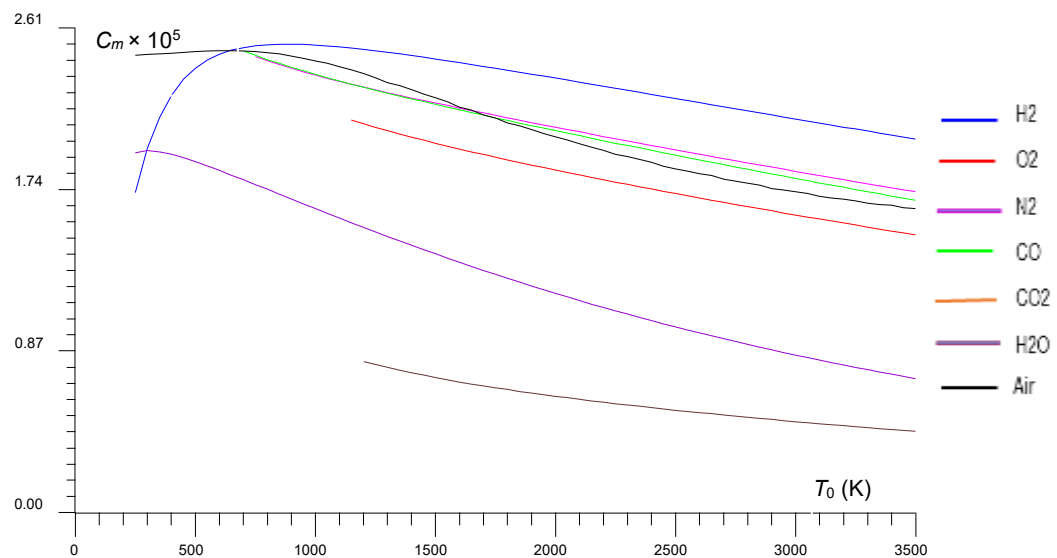


Figure 5.67. Effet des gaz sur la variation de C_m en fonction de T_0 pour le profil symétrique courbé

5.2.6 Effet des gaz à haute température en fonction de t/C

Les figures [5.68-5.70] représentent l'effet des 7 gaz du tableau (5.9) sur la variation des coefficients C_D , C_L et C_m en fonction de l'épaisseur maximale du

profil t/C pour l'exemple du tableau (5.10). L'augmentation de t/C donne une augmentation de ces trois coefficients pour les 7 gaz du tableau (5.9).

Les résultats numériques obtenus démontrent qu'il existe une certaine valeur maximale de l'épaisseur du profil $(t/C)_{\max}$ pour chaque gaz qu'on doit pas dépasser. Ainsi, lorsque $t/C > (t/C)_{\max}$, on aura nécessairement l'apparition d'une onde de choc détachée sur le profil puisque le profil devient plus épais. Dans les applications réelles, un profil aérodynamique mince est généralement utilisé pour les applications des écoulements supersoniques. D'après les figures [5.68-5.70], l'application est valable jusqu'à une valeur d'environ $t/C = 0,16$, soit pour une épaisseur maximale de 16 %. D'après cet important résultat on peut dire que l'utilisation des différents gaz du tableau (5.9) est autorisée pour l'application d'écoulements supersoniques autour des profils d'aile.

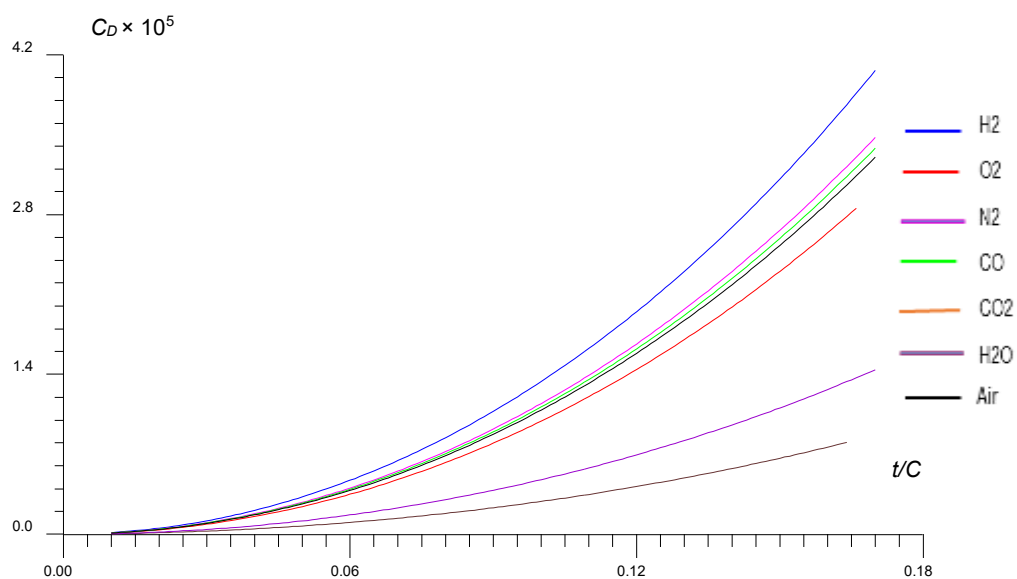


Figure 5.68. Effet des gaz sur la variation de C_D en fonction de t/C pour le profil symétrique courbé

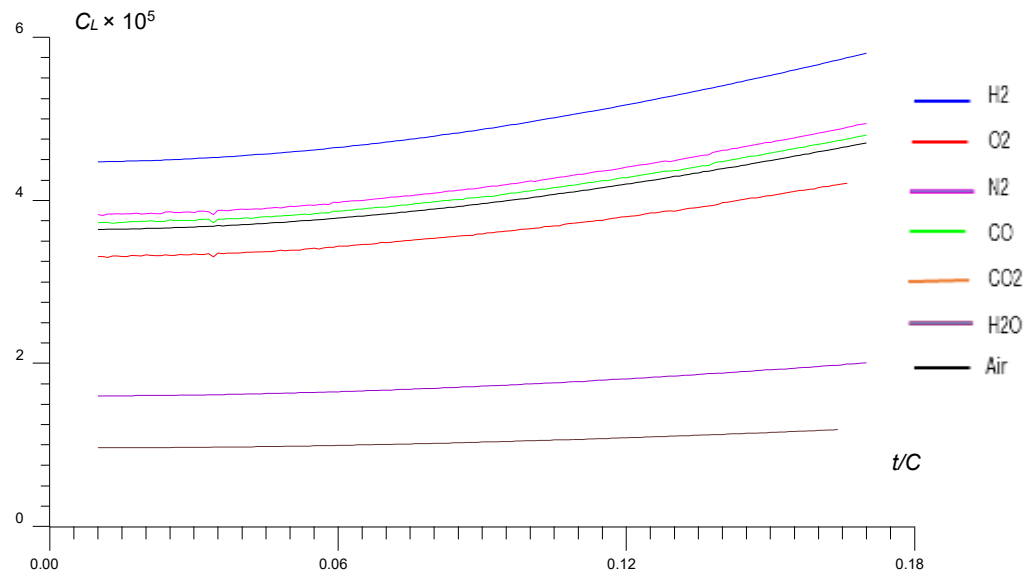


Figure 5.69. Effet des gaz sur la variation de C_L en fonction de t/C pour le profil symétrique courbé

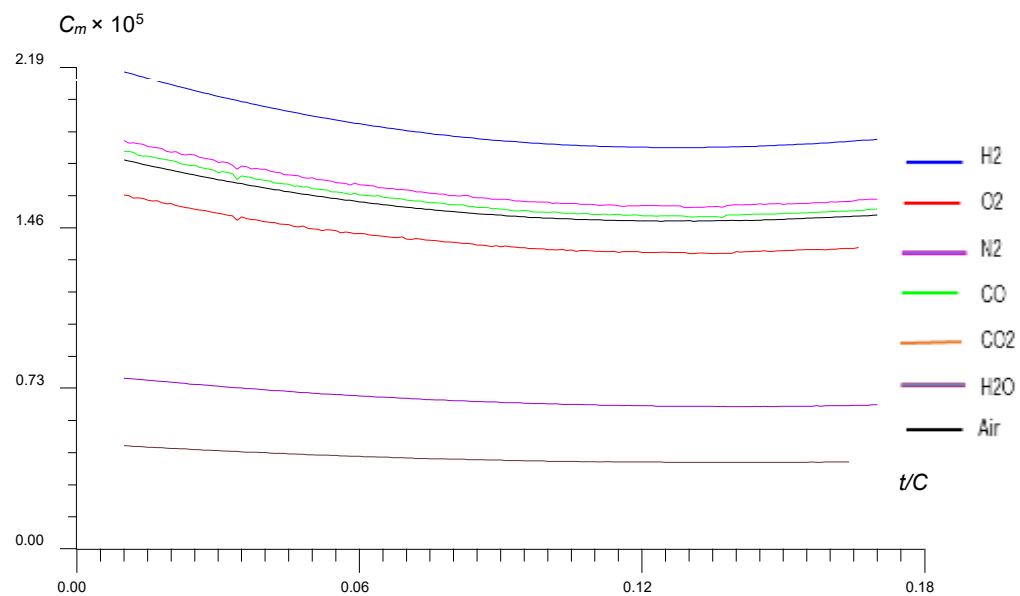


Figure 5.70. Effet des gaz sur la variation de C_m en fonction de t/C pour le profil symétrique courbé

5.2.7 Comparaison entre gaz et air

Les figures [5.71-5.73] représentent l'effet des 7 gaz du tableau (5.7) sur la variation des coefficients λ_D , λ_L et λ_m en fonction de l'angle d'incidence α pour

l'exemple du tableau (5.8). Notons que les trois coefficients ne dépendent pas de la variation de α . L'allure en pointillée correspond à $\lambda_D = \lambda_L = \lambda_m = 1$.

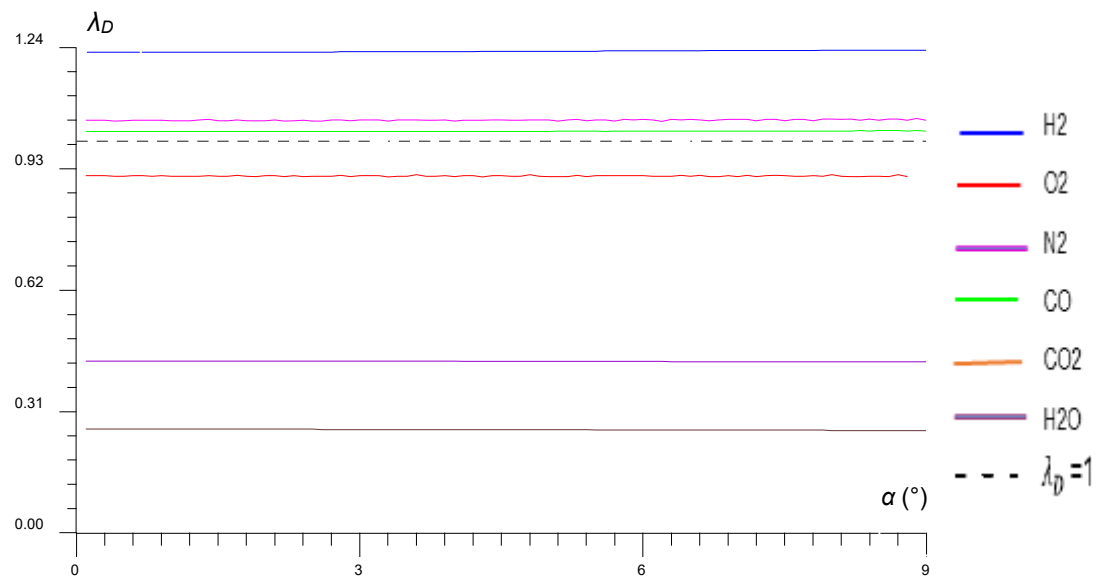


Figure 5.71. Comparaison de C_D entre gaz et air en fonction de α

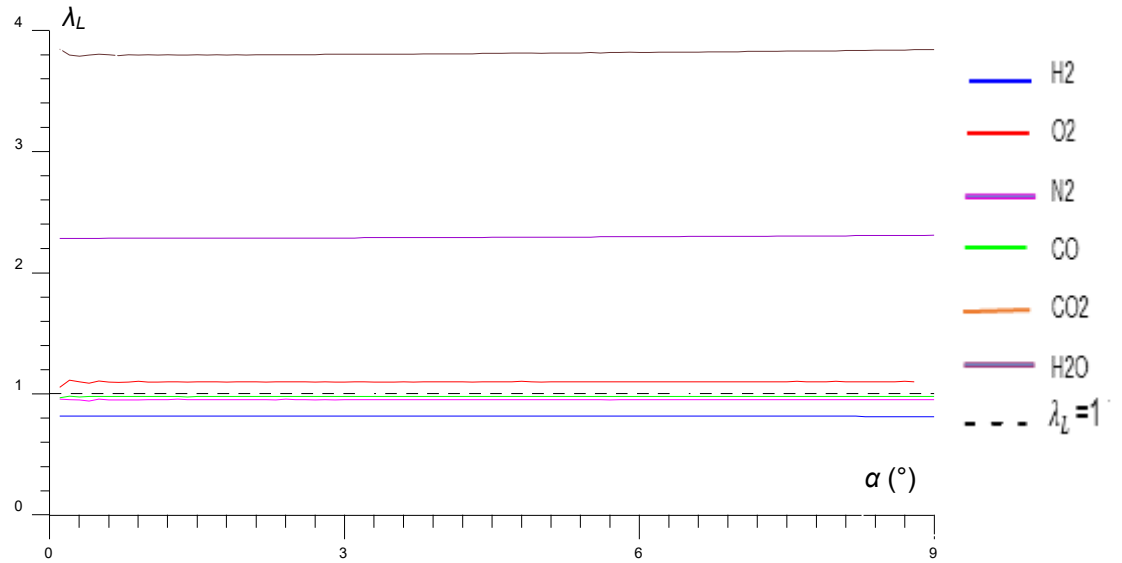


Figure 5.72. Comparaison de C_L entre gaz et air en fonction de α

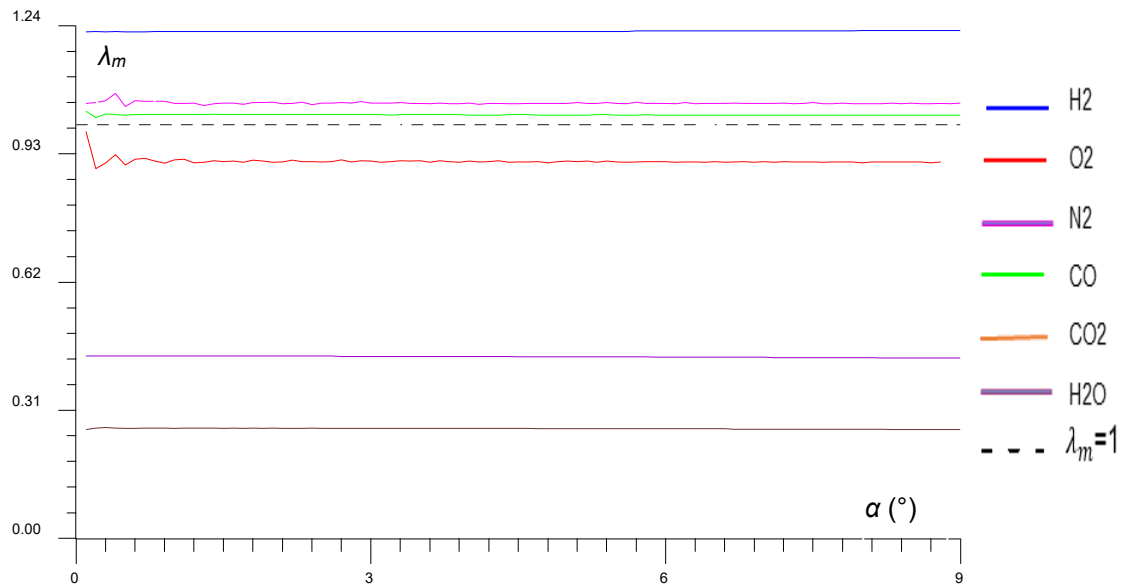


Figure 5.73. Comparaison de C_m entre gaz et air en fonction de α

Les figures [5.74-5.76] représentent l'effet des 7 gaz du tableau (5.9) sur la variation des coefficients λ_D , λ_L et λ_m en fonction de nombre de mach à l'infini amont M_∞ pour l'exemple du tableau (5.10). On constate qu'à faible nombre de Mach M_∞ jusqu'à environ 2,15 pour l'exemple du tableau 3, le H_2 présente une faible amélioration en portance puisque le coefficient λ_L est légèrement supérieur

à l'unité. Tandis que lorsque M_∞ dépasse 2.15, H_2 devient le meilleur gaz donnant de bonnes améliorations en portance par rapport à l'air puisque le coefficient λ_L devient inférieur à l'unité.

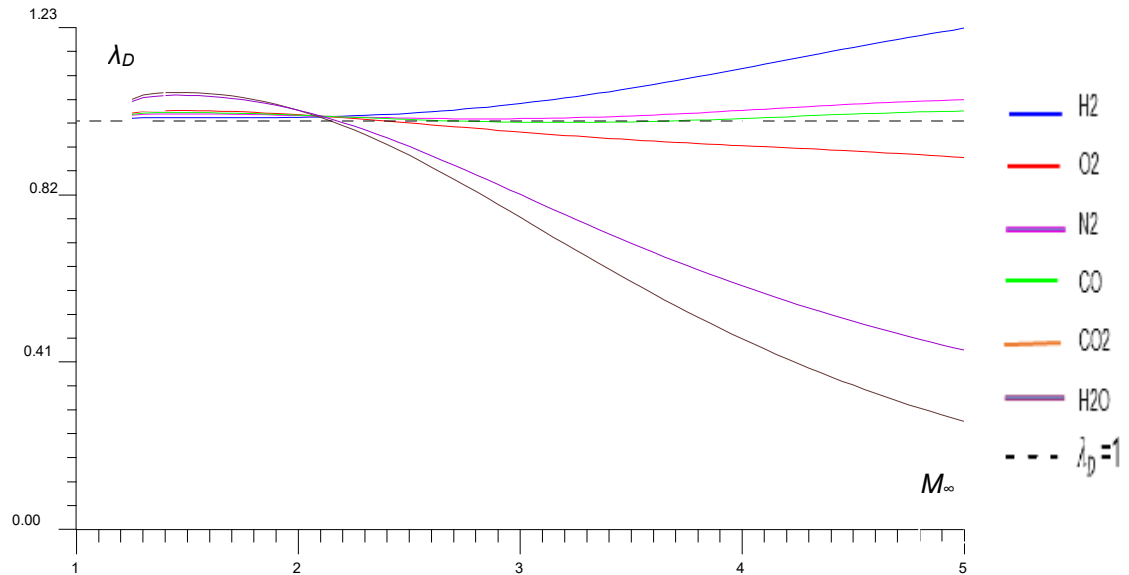


Figure 5.74. Comparaison de C_D entre gaz et air en fonction de M_∞

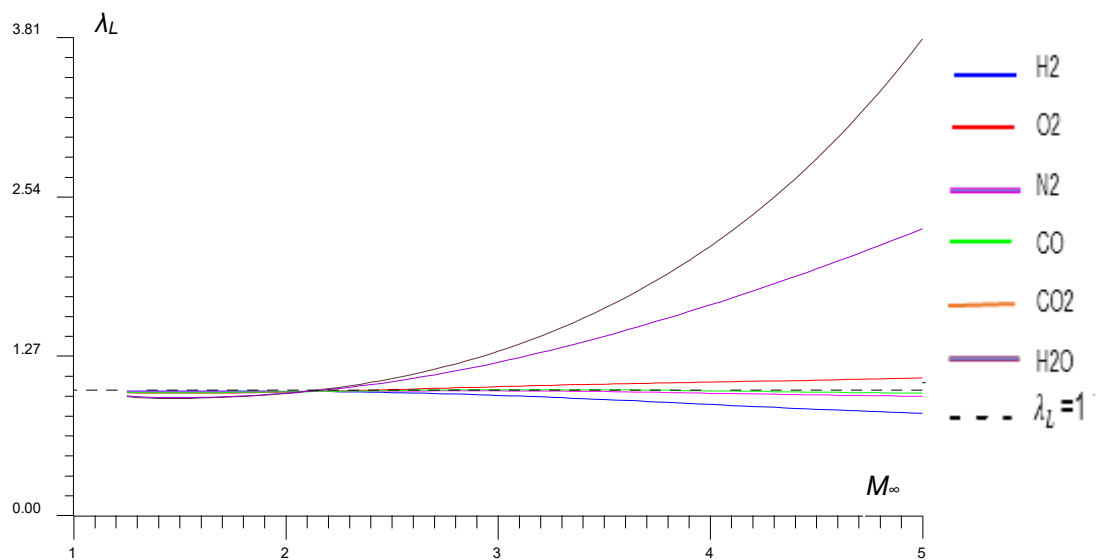


Figure 5.75. Comparaison de C_L entre gaz et air en fonction de M_∞

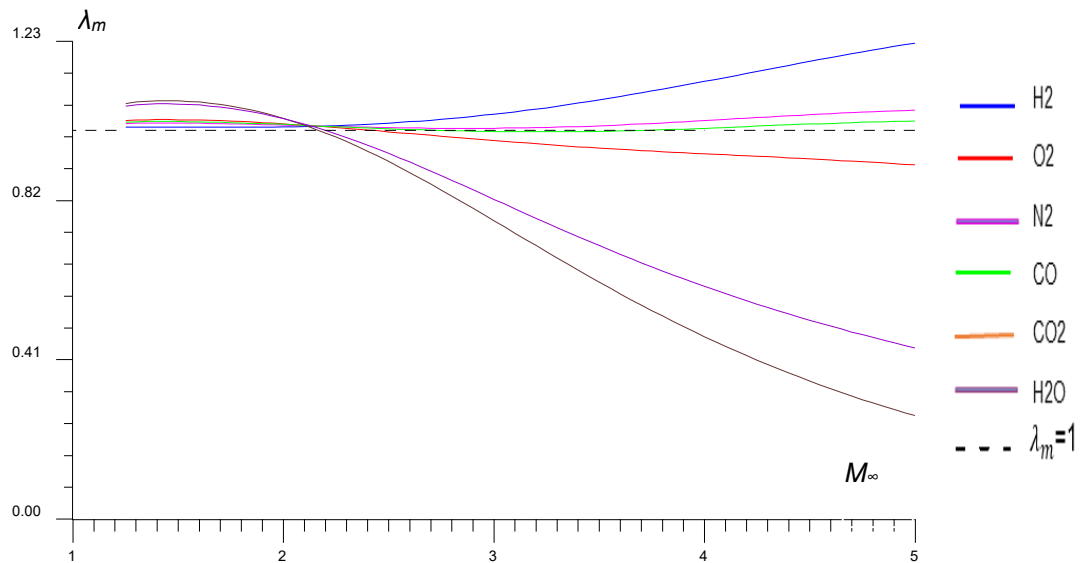
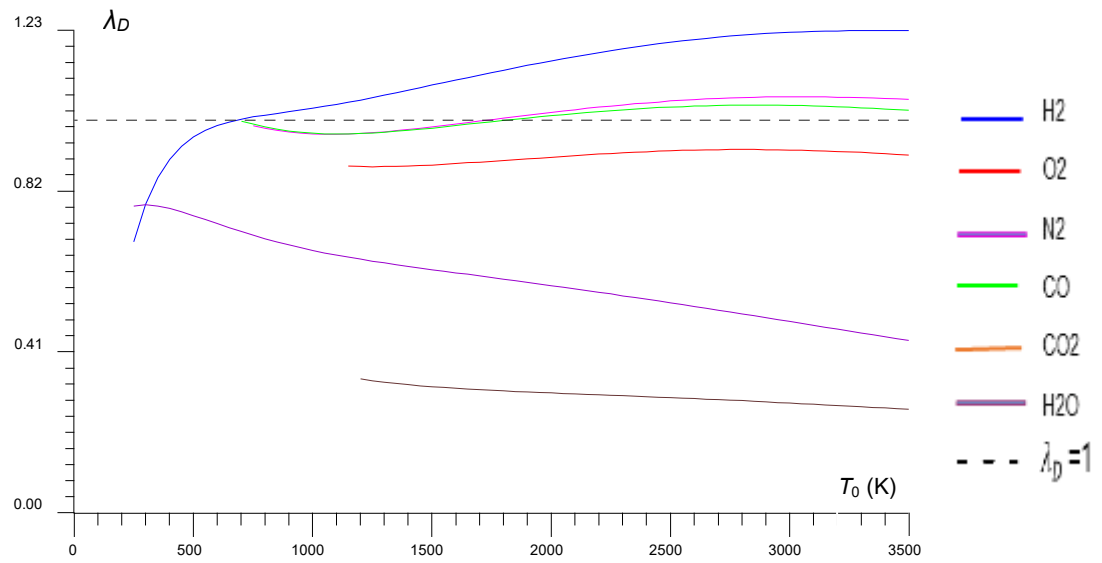
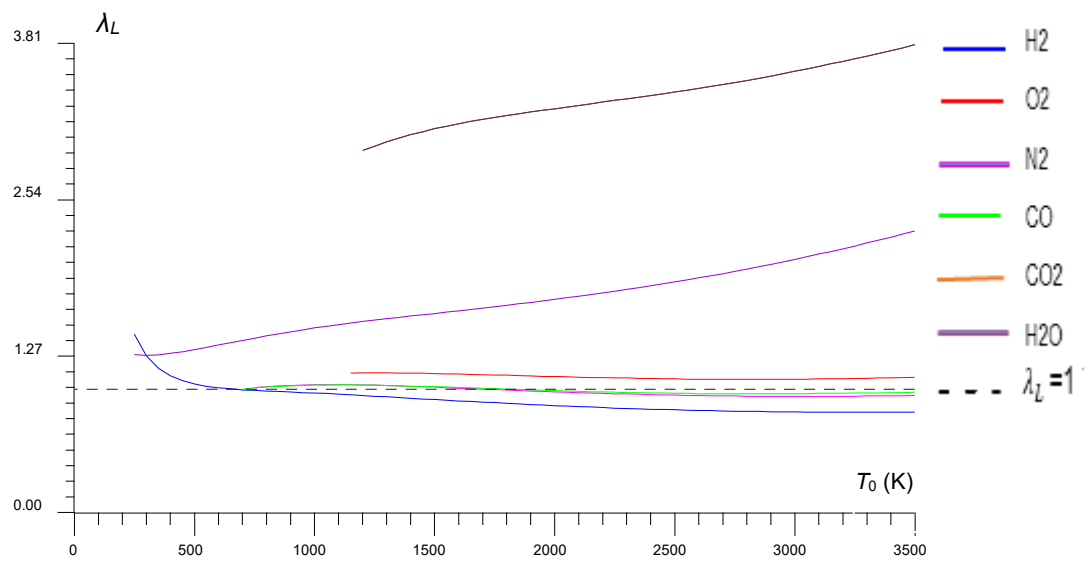


Figure 5.76. Comparaison de C_m entre gaz et air en fonction de M_∞

D'après la figure (5.75), les gaz H2, N2 et CO ont un coefficient de comparaison de portance $\lambda_L < 1$ ce qui signifie qu'ils ont des performances meilleur que l'air mais avec une légère amélioration.

Les figures [5.77-5.79] représentent l'effet des 7 gaz du tableau (5.9) sur la variation des coefficients λ_D , λ_L et λ_m en fonction de la température génératrice T_0 pour l'exemple du tableau (5.10). la même remarque concernant l'apparition de $(T_0)_{\min}$ est observé sur ces figures. La même remarque aussi sur le choix des gaz H2, N2 et CO qui donnent une meilleure portance par rapport à l'air s'observe malgré qu'avec des coefficients λ_L proche de l'unité comme montré sur la figure (5.78).


 Figure 5.77. Comparaison de C_D entre gaz et air en fonction de T_0

 Figure 5.78. Comparaison de C_L entre gaz et air en fonction de T_0

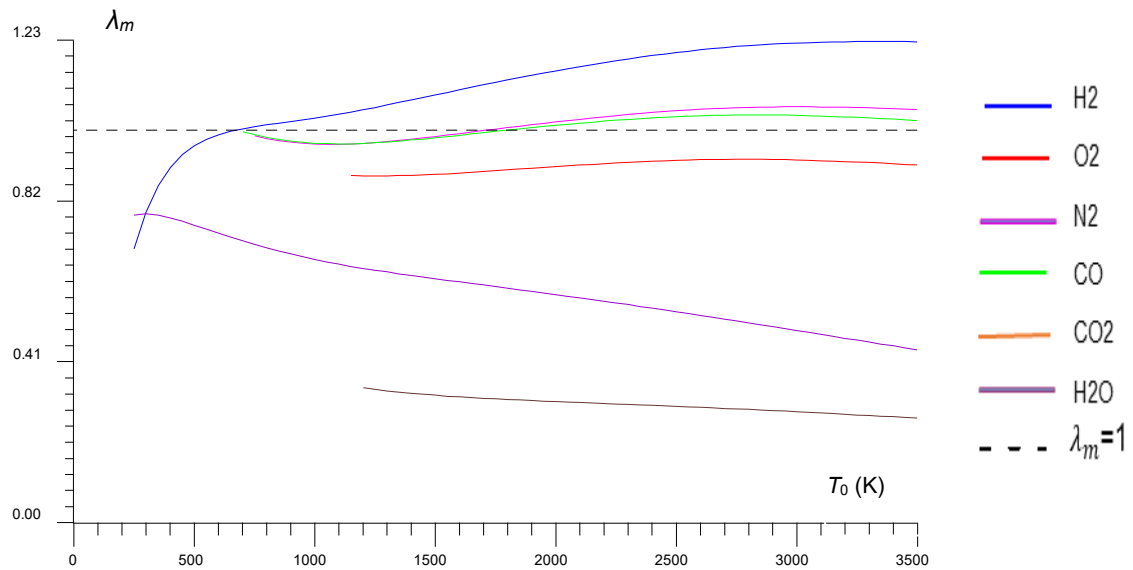


Figure 5.79. Comparaison de C_m entre gaz et air en fonction de T_0

Les figures [5.80-5.82] illustrent l'effet des 7 gaz présentés dans tableau (5.9) sur la variation des coefficients λ_D , λ_L et λ_m en fonction de l'épaisseur maximale du profil t/C selon l'exemple du tableau (5.10). On observe également dans ces figures, le même comportement concernant l'apparition du maximum de (t/C) . Il également à noter que le choix des gaz H₂, N₂ et CO permet une meilleur portance comparativement à l'air, ce qui reste valable même lorsque les coefficients λ_L sont proches de l'unité, comme illustré dans la figure (5.81).

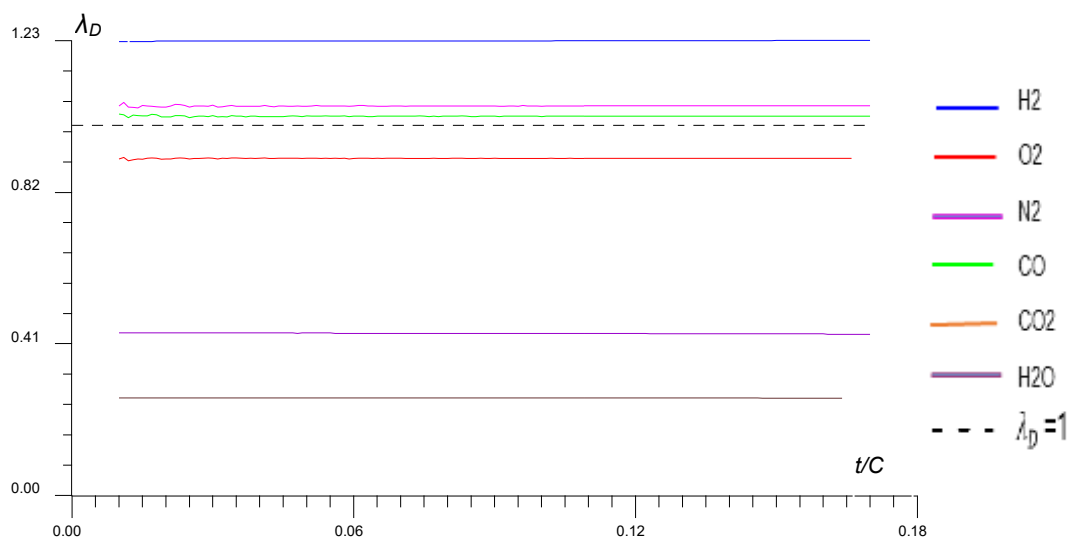


Figure 5.80. Comparaison de C_D entre gaz et air en fonction de t/C

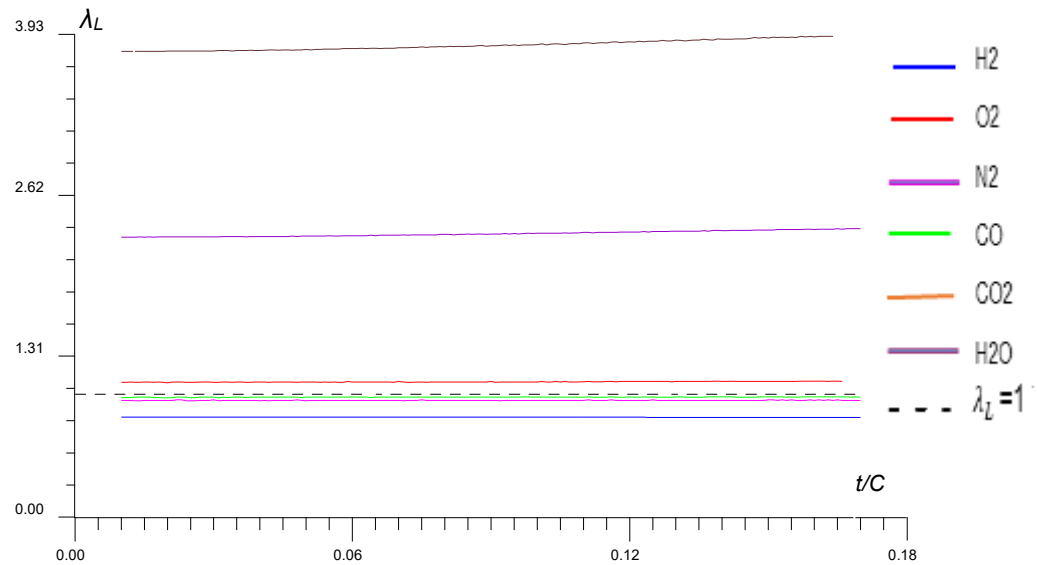


Figure 5.81. Comparaison de C_L entre gaz et air en fonction de t/C

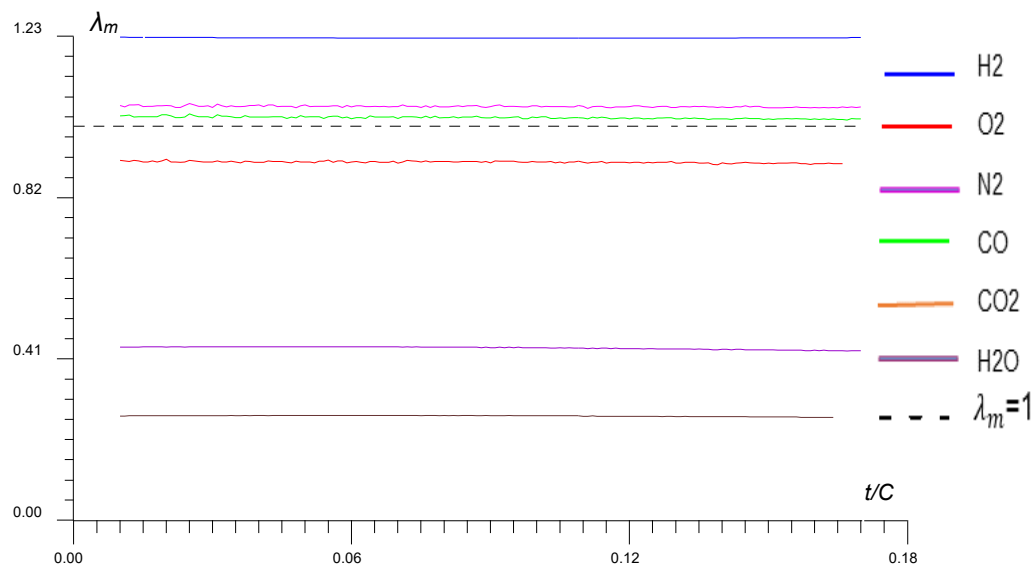


Figure 5.82. Comparaison de C_m entre gaz et air en fonction de t/C

Le tableau (5.15) représente la différence en pourcentage de l'utilisation des 7 gaz du tableau (5.9) à la place de l'air. Les valeurs obtenues sont calculées par la relation (5.4) uniquement pour l'exemple du tableau (5.10). Puis en considérant d'autres exemples, on obtiendra d'autres différences sur l'amélioration des paramètres d'écoulement. Ainsi, pour l'exemple du tableau (5.10), le gain maximum sur la portance est observé pour le cas de H2. Tandis que le gain maximum en traînée et en moment de tangage est observé pour le CO2 avec un

pourcentage de 73,62 %. Ce fameux tableau présente très clairement l'effet positif de l'utilisation d'un certain gaz par rapport à l'air pour améliorer C_D , C_L et C_m .

Le tableau (5.15) montre également qu'il est possible de diviser la gamme des gaz existant dans la nature en trois parties du point de vue des performances données. Donc une gamme donnant de meilleures performances par rapport à l'air. Une donnant des performances médiocres par rapport à l'air et la troisième donnant des performances équivalentes à l'air.

Tableau 5.15 : Différence entre gaz et air pour les données du problème du tableau (5.10)

Gas	H ₂	O ₂	N ₂	CO	CO ₂	H ₂ O _(vapeur)
$\varepsilon(\lambda_D) \%$	22.80	8.87	5.32	2.52	73.62	56.13
$\varepsilon(\lambda_L) \%$	18.56	9.81	5.00	2.39	279.80	128.43
$\varepsilon(\lambda_m) \%$	22.54	8.85	5.22	2.42	73.42	55.97

5.2.8 Validation et interprétation des résultats

La validation de nos résultats numériques ou plus précisément du programme développé se fait par trois méthodes différentes.

La première méthode est une validation à l'échelle infinitésimale sur les résultats d'une onde de choc oblique et d'une détente de Prandtl Meyer tels que présentés dans les tableaux (5.11 et 512) déjà discutée.

La deuxième méthode de validation est réalisée en présentant l'effet de discrétisation de la surface de l'extrados et de l'intrados du profil en augmentant progressivement le nombre de points k et l (voir figure 4.7) en passant d'une discrétisation faible avec 5, 10, 20 à une discrétisation modérée avec 200, 500, 700 points jusqu'à une discrétisation fine et très fine avec 1000, 5000 à 10000 points de chaque côté du profil. Les résultats obtenus démontrent une convergence des résultats telle que présentée dans le tableau (5.13). Le problème rencontré dans cette phase de calcul est l'augmentation du temps de

calcul par ordinateur qui devient assez importante. Alors la précision des résultats augmente avec l'augmentation du nombre de points k et l . Nous avons remarqué qu'à partir d'une certaine valeur de k et l , les résultats deviennent indépendants de la discrétisation.

La troisième méthode de validation des résultats est effectuée entre le modèle PG et notre modèle HT. Pour le modèle PG nous avons utilisé notre programme numérique développé en prenant une très petite température de stagnation au voisinage de $T_0=500K$ avec $M_\infty=2.00$ et en considérant uniquement l'air comme gaz. Les résultats trouvés sont comparés aux résultats de référence [1].

Nous avons constaté que nos résultats sont très proches des résultats de cette référence avec une erreur qui ne dépassait pas 2%. Il est à noter que cette référence traite le problème du calcul des coefficients aérodynamiques C_D , C_L et C_m d'un profil en utilisant le modèle PG. Ce modèle ne prend pas en considération l'effet de la température de stagnation. Ce modèle ne donne de bons résultats qu'à faible nombre de Mach M_∞ et faible température de stagnation T_0 qui ne dépassent pas respectivement $M_\infty=2,00$ et $T_0=500K$. On peut dire que le modèle PG est un cas particulier de notre modèle HT.

Lors de la préparation des figures (5.59 à 5.82), une discrétisation modérée a été utilisée avec un nombre réduit de points afin de minimiser le temps de calcul numérique. Le raffinement du maillage peut améliorer les résultats graphiques et tabulés.

Les figures (5.59 à 5.82) représentent également une présentation graphique plus détaillée des résultats du tableau (5.13) sur les six coefficients. Les mêmes remarques données pour le tableau (5.13) restent également valables pour ces figures, c'est-à-dire que pour chaque valeur de l'angle d'incidence α , de M_∞ , de T_0 et de t/C on aura les mêmes résultats de comparaison entre les gaz et sur la variation des coefficients C_D , C_L et C_m ainsi que des coefficients λ_D , λ_L et λ_m . Dans les figures (5.59 à 5.82), un gaz offrant des performances améliorées par rapport à l'air est celui qui donne une valeur de λ_D , λ_L et λ_m inférieure à l'unité. D'après ces figures, on remarque que l'amélioration de la traînée donne également une amélioration du moment de tangage, étant donné que leurs

coefficients de comparaison λ_D et λ_m sont à la fois inférieurs à l'unité. Tandis que le coefficient λ_L sera supérieur à l'unité, ce qui démontre la non-amélioration de la portance lorsqu'il y a amélioration de la traînée. Le cas inverse est observé dans ces figures. Donc nous ne pouvons pas améliorer les trois forces dynamiques des gaz en même temps. Notre recommandation est de baser sur l'amélioration des coefficients C_D et C_m ou C_L donnant de très bonnes améliorations dans d'autres paramètres de conception de la machine. Par exemple, améliorer la traînée (réduction de la traînée) entraînera une réduction du temps de vol et une réduction de la masse de carburant, tandis que l'amélioration de la portance entraînera une augmentation de la masse de la charge utile ainsi qu'une augmentation de la masse de la machine.

Dans ce cas, les gaz H_2 , N_2 et CO répondent positivement à l'augmentation de la portance et les H_2O et CO_2 répondent positivement à la diminution de la traînée et du moment de tangage. Plus le coefficient λ_L est petit, plus le gaz correspondant donne de meilleures améliorations par rapport aux autres gaz. Entre les 3 gaz, H_2 est le meilleur choix avec un taux de gain égal à 18,56% selon le Tableau (5. 13).

La géométrie du profil aérodynamique et tous les résultats sont obtenus de manière sans dimension. Par conséquent, nous n'avons pas besoin de connaître la valeur de la corde C du profil aérodynamique.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif principal de cette étude a été d'analyser l'effet de la température génératrice et du type de gaz générateur sur l'écoulement supersonique autour d'un profil d'aile pointu, en s'appuyant sur deux modèles : le modèle de gaz parfait (GP) et le modèle haute température (HT). Les résultats obtenus ont permis de dégager plusieurs conclusions fondamentales, tant sur le plan physique que numérique, avec des implications claires pour la conception aéronautique et aérospatiale.

Sur le plan physique, il a été démontré que l'apparition d'une onde de choc détachée dépend fortement du nombre de Mach amont, de l'angle de déviation de l'écoulement, de la température génératrice, ainsi que de la géométrie du profil. Pour une géométrie donnée, il existe une valeur critique en dessous de laquelle l'onde de choc devient détachée. Il a également été mis en évidence qu'il existe un angle de déviation maximal du profil permettant d'éviter une onde de choc détachée. De plus, l'écoulement est caractérisé par un saut d'entropie dû à la présence du choc, ainsi que par la possibilité d'apparition de chocs progressifs sur certains profils. L'utilisation de gaz à haute température peut modifier sensiblement ces comportements, d'où la nécessité de tenir compte de leurs propriétés spécifiques.

Sur le plan numérique, la précision des calculs dépend du raffinement du maillage et du choix des paramètres de discrétisation des profils. L'étude a également mis en évidence que l'erreur maximale liée aux coefficients dynamiques concerne le moment de tangage, pouvant atteindre 65 %.

D'un point de vue aérodynamique, l'étude montre que les coefficients aérodynamiques sont significativement influencés par la température génératrice. Le modèle GP devient donc inopérant lorsque la température dépasse une certaine valeur ($> 500\text{K}$), ce qui confirme l'importance d'utiliser le modèle HT dans les régimes thermiques élevés.

Concernant l'effet du gaz utilisé, l'étude introduit trois nouveaux coefficients dynamiques λ_D , λ_L et λ_m permettant de comparer les performances d'un gaz donné à celles de l'air. Si ces coefficients soient inférieurs à l'unité, cela signifie que le gaz offre de meilleures performances que l'air pour le paramètre considéré. L'application a été étendue à sept gaz (H_2 , O_2 , N_2 , CO , CO_2 , H_2O et l'air), et les résultats ont

montré des améliorations variables : jusqu'à 73,62 % pour CO_2 et 56,13 % pour H_2O , dans des conditions d'écoulement supersonique. Ces résultats suggèrent l'existence d'une catégorie de gaz offrant de meilleures performances globales, d'autres avec des performances moindres, et enfin une catégorie de gaz ayant des performances équivalentes à celles de l'air.

Toutefois, il a également été démontré qu'il n'est pas possible d'améliorer simultanément les trois coefficients dynamiques. En effet, une amélioration de la traînée s'accompagne généralement d'une réduction de la portance. Cette interaction complexe entre les paramètres dynamiques rend nécessaire un compromis en conception. Ainsi, pour améliorer la portance, l'usage de H_2 , N_2 et CO est recommandé ; pour la réduction de la traînée, H_2O et CO_2 sont préférables. Ces choix influencent directement la charge utile, le temps de vol, et le poids de l'aéronef. Par conséquent, l'utilisation de gaz alternatifs à l'air dans les conceptions aérospatiales représente une nouvelle approche prometteuse, ouvrant la voie à des architectures innovantes à valeur ajoutée.

L'étude a aussi mis en évidence l'existence de limites extrêmes de $\alpha_{\max}$, $(M_\infty)_{\min}$, $(T_0)_{\min}$ et $(t/C)_{\max}$ spécifiques à chaque gaz. Le dépassement de ces seuils entraîne la formation d'ondes de choc détachées et compromet la validité physique des résultats.

Enfin, l'extension du programme développé à différentes géométries de profils d'ailes a confirmé sa robustesse et sa polyvalence. Les résultats obtenus sur trois profils distincts montrent que, au-delà des paramètres α , T_0 , M_0 et t/C , la géométrie elle-même influence significativement les coefficients dynamiques. Le raffinement du maillage permet d'améliorer davantage la précision des résultats graphiques et numériques. Ces avancées ouvrent des perspectives vers la conception de véhicules capables d'évoluer en dehors de la couche atmosphérique.

Perspectives

Dans le prolongement de ce travail, plusieurs perspectives de recherche peuvent être envisagées. Tout d'abord, une validation complémentaire des résultats à l'aide de simulations numériques basées sur la mécanique des fluides numérique (CFD) serait souhaitable, tant pour l'écoulement de l'air que pour les gaz alternatifs. Ensuite, l'étude pourrait être élargie à des profils d'ailes équipés de dispositifs

mobiles (slats, ailerons) afin d'évaluer leur influence sur la maniabilité et la variation des coefficients dynamiques. Ces développements contribueraient à enrichir les modèles aérodynamiques actuels et à affiner les conceptions futures dans le domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [01]. Zebbiche T., Salhi M. and Boun-jad M., "Numerical computation of supersonic flow around a pointed airfoils," Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering, Vol. 12, N° 03, PP. 213-233, July 2012.
- [02]. Peterson C. R. and Hill P. G. "Mechanics and Thermodynamics of Propulsion," Addition-Wesley Publishing Company Inc. New York. 1965.
- [03]. Sutton G. P. and Biblarz O., "Rocket Propulsion Elements," 8^{ème} édition, John Wiley and Sons., 2010.
- [04]. Yahiaoui T. and Zebbiche T., "Gas effect on the supersonic flow at high temperature with application in nozzles," Journal of Aerospace Sciences and Technologies, Vol. 73, N° 02, PP. 118-128, May 2021.
- [05]. Yahiaoui T., Zebbiche T., Allali A. and Boun-jad M., "Gas effect for Oblique and Conical shock waves," Mathematical Modeling of Natural Phenomena, Vol. 15, Number of Article 73, 2020.
- [06]. John D Anderrson, Jr ,« Fundamentals of aerodynamics » 1984.
- [07]. Wentao Yong, « Study on Aerodynamic Characteristics of Supersonic Airfoil » Modern Mechanical Engineering, 2019, 9, 13-19
- [08]. Zebbiche T. and Youbi Z., "Effect of stagnation temperature on the supersonic flow parameters with application for air in nozzles," The Aeronautical Journal, Vol. 111, N° 1115, PP. 31–40, 2007.
- [09]. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Flow Parameters at High Temperature. Application for Air in nozzles," German Aerospace Congress 2005, DGLR-2005-0256, 26-29 Sep. 2005, Friedrichshafen, Germany.
- [10]. Zebbiche T. "Stagnation temperature effect on the Prandtl Meyer function," AIAA Journal. Vol. 45, N° 4, PP. 952–954, 2007.
- [11]. Zebbiche T. and Boun-jad M., "Numerical quadrature for the Prandtl—Meyer function at high temperature with application for air," Thermophysics and Aeromechanics, Vol. 19, No. 3, PP. 381-384, 2012.
- [12]. Zebbiche T, « CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES TUYERES SUPERSONIQUES DE PROPULSION » Thèse de doctorat , juin 2007.

- [13]. John D Anderrson, Jr "Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics » McGraw-Hill Book Company New York, (1989).
- [14]. John D Anderrson, Jr "Modern Compressible Flow with Historical Perspective" second edition, McGraw-Hill Book Company New York, (1990).
- [15]. Ascher H.Shapiro, « The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow » Volume 1, the Ronald Press Company New York, (1953).
- [16]. Ascher H.Shapiro, « The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow » Volume 1, the Ronald Press Company New York, (1953).
- [17]. Thomas B. Gatski and Jean-Paul Bonnet « Compressibility, Turbulence and High Speed Flow" Elsevier Ltd,(2009) .
- [18]. B.W.Imerie, " Compressible Fluid Flow" By Butterworth and Co Publishers Ltd, (1973).
- [19]. Narayanan Komearth, " Compressible Flow" , Georgia Institute of Technologie Atlanta, (2008).
- [20]. Robert Tosello, "Ondes de choc-Onde de Détonation", (2006).
- [21]. E.Bilgen, "Ecoulement compressible", Chapitre 9,(2005).
- [22]. Jean Délery, "Méthode de Mesure Aérodynamique", Document Onera,(2004).
- [23]. L.M.Milne Thomson, "Theoretical Aerodynamics", Fourth Edition, Dover Publications New York,(1966).
- [24]. Boun-jad M., Zebbiche T. and Allali A., "Gas effect at high temperature on the supersonic nozzle conception," International Journal of Aeronautical and Space Sciences, Vol. 18, N° 01, PP. 82-90, 2017.
- [25]. Boun-jad M., Zebbiche T. and Allali A., "High temperature gas effect on the supersonic axisymmetric Minimum Length Nozzle Conception," International Journal of Engineering and Technical Research, Vol. 7, N° 7, PP. 23-30, July 2017
- [26]. Boun-jad M., Zebbiche T. and Allali A., "Numerical study of gas effect at high temperature on the supersonic plug and expansion deflexion nozzles design," International Research Journal of Engineering and Technology, Vol. 4, N° 10, PP. 1480-1488, 2017.

- [27]. Boun-jad M., Zebbiche T. and Allali A., "High temperature gas effect on the Prandtl-Meyer function with application for supersonic nozzle design," *Mechanics & Industry*, Vol. 18, N° 02, Article N° 219, Number of pages 9, 2017.
- [28]. Boun-jad M. and Zebbiche T., "High Temperature Gas Effect on the Normal Shock Wave Parameters," *International Journal of Mechanical and Production Engineering*, Vol. 5, N° 10, PP. 78-85, 2017.
- [29]. Anderson J. D. Jr., "Fundamentals of Aerodynamics," McGraw-Hill Book company, New York, 1988.
- [30]. Anderson J. . Jr., "Modern Compressible Flow: With Historical Perspective," McGraw Hill Book company, New York, 1982.
- [31]. Comolet R., "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux," Tome 1, 3^{ème} Edition, Masson, 1979.
- [32]. Emanuel G., "Gasdynamic: Theory and Application", New York, AIAA Educational Serie, 1986.
- [33]. Oosthuisen P. H. and Carscallen W. E., "Compressible Fluid Flow," Mc Graw-Hill, New York, 1997.
- [34]. Zucker R. D. and Bilbarz O., "Fundamentals of GasDynamics," John Wiley & Sons, New Jersey, 2002.
- [35]. Zucro M. J. and Hoffman J. D., "Gas Dynamics," Vol. 1 and Vol. 2, New York, Wiley, 1976.
- [36]. Zebbiche T. and Youbi Z., "Parameters of Supersonic Flow at High Temperature. Application for Air," 4th International Conferences on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics HEFAT, 19-22 Sep. 2005, Caire, Egypt.
- [37]. Van Wylen G. J., "Fundamentals of classical thermodynamics," John Wiley and Sons, Inc, 1973.
- [38]. McBride B. J., Gordon S. and Reno M. A., "Thermodynamic Data for Fifty Reference Elements," NASA TP-3287, January 1993.
- [39]. Ryhming I. L., "Dynamique des Fluides," Presses Polytechnique romandes, Lausanne, Suisse, 1984.
- [40]. Van Wylen J. J. and Sonntag R. E., "Fundamentals of classical thermodynamics," 2^{ème} edition, John Willey and sons, inc., 1976.

- [41]. Ralston A. and Rabinowitz P., "A First Course in Numerical Analysis," McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [42]. Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T., "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing," Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [43]. Haynes W. M., "CRC Handbook of Chemistry and Physics," 93^{ème} edition, CRC Press/Taylor and Francis, Boca Raton, 2012.
- [44]. Dumitrescu L. Z., "Minimum Length Axisymmetric Laval Nozzles," AIAA Journal, Vol. 13, PP. 520-531, 1975.
- [45]. Démidovitch B. and I. Maron., "Eléments de calcul numérique," Editions Mir, Moscow, 1987.
- [46]. Fletcher C. A. J. "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories," Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [47]. Greer H., "Rapid Method for Plug Nozzle Design," ARS Journal, Vol. 31, N° 04, PP. 560-561, 1961.
- [48]. Onofri M., "CFD Results of Plug Nozzle Test Cases," AIAA-2002-4036 38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Indianapolis, Indiana, July 7-10, 2002.
- [49]. Rommel T., Hagemann G., Schley C. A. and all., "Plug Nozzle Flowfield Analysis," Journal of Propulsion and Power, Vol. 13, N° 5, PP. 629-634, 1997.
- [50]. Shapiro A. H., "Compressible Fluid Flow," Vol. 1, New York, the Ronald Press, 1953.
- [51]. Shapiro A. H., "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow," Vol. 1, The Ronald Press Company, New York, 1953.
- [52]. Takashi I., Fujii K. and Hayashi A. K., "Computations of Axisymmetric Plug-Nozzle Flow fields: Flow Structures and Thrust Performance," AIAA Journal of Propulsion and Power, Vol. 18, N° 2, PP. 254-260, 2002.
- [53]. Inge.L, RHYMING « Dynamique des fluides » presse polytechnique Roman Lausanne, Suisse , 2^{ième} edition , 1984.
- [54]. Moran J., "Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics," John Wiley & Sons, 1984.

- [55]. Abbott I. H. and VonDoenhoff A. E., "Theory of wing sections including summary of airfoil," Dover Publication, Inc., New York, 1959.
- [56]. HOUGHTON. E.L, CARPENTER. P.W « aerodynamics for engineering students » 5^{ième} edition, University of Warwick 2003.
- [57]. John D. Anderson « Modern compressible flow with historical perspective » 3^{ième} edition, 2002.
- [58]. THEODORE VON KARMAN «aerodynamics» Oxford University 1963.
- [59]. Kenneth E. T., "Computation of thermally perfect properties of oblique shock waves," NASA CR-4749, 1996.
- [60]. Kenneth E. T., "Computation of thermally perfect oblique shock waves properties," AIAA-97-0868, 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Aerospace Sciences Meetings, 06-09 January 1997.
- [61]. Tatum K. E., "Computation of Thermally Perfect Oblique Shock Wave Properties," 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, AIAA-97-0868, 1997.
- [62]. Yahya S. M., "Gas tables for compressible flow calculation," Fifth edition, New Age International Publishers, New Delhi, 2006.
- [63]. ANDRE L JAUMOTTE « Chocs et ondes de chocs » Tome 1 et 2 "Aspects fondamentaux",1971.
- [64]. Iserles A., "A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations," Cambridge University Press, 1996.
- [65]. Démidovitch B. and Maron I., "Eléments de calcul numérique," Editions MIR, Moscow, Russia, 1987.
- [66]. Merzbach U. C., Boyer C. B. A history of mathematics. John Wiley and sons. 3rd edition, 2011
- [67]. Corke T. C., Flint O. T., Dynamic Stall in Pitching Airfoils: Aerodynamic Damping and Compressibility Effects. Annual Review of Fluid Mechanics. 47 (2015) 479-505.