

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Saad Dahleb de Blida 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



Mémoire de Master

Option : Modélisation Stochastique et Statistique (MSS)

Thème :

**Application des tests d'accélération constante pour
étudier la fiabilité des systèmes du modèle Lomax avec
des schémas progressivement censurés de type II**

Réalisé par :

BOULILA Ikram & HARIK Leila

Devant le jury composé de :

Omar TAMI	Président	MCB.	Univ.Blida 1
Redouane FRIHI	Examineur	MCB.	Univ.Blida 1
Abdelaziz RASSOUL	Promoteur	Prof.	ENSH, Blida

Juin 2025

DÉDICACES

Avant toute chose, je rends grâce à Allah, Le Tout-Puissant, et je Le remercie pour Son aide et Son accompagnement à chaque étape de ce parcours. Sans Lui, rien n'aurait été possible.

Je dédie ce travail à mes chers parents, mon véritable soutien dans la vie, pour leur amour inconditionnel, leur patience et leurs innombrables sacrifices. Qu'Allah les protège et les récompense pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Je l'offre également à mes frères et sœurs bien-aimés : **Djamila, Mourad, Feriel, Zina, Nejme Elddine**. Merci pour votre présence constante, vos prières et votre soutien qui ont toujours été pour moi une source de force et de réconfort.

J'adresse aussi toute ma gratitude et mon affection à mes chères amies : **Sarah, Roumaïssa, Aya, Abla, Siham, Saberina et Yasmine**. Merci pour chaque moment de joie et de soutien, et pour avoir fait partie de cette belle aventure.

Enfin, une pensée toute particulière à notre chère professeure **Souhila**, que je remercie sincèrement pour son accompagnement, ses encouragements et ses prières sincères. Qu'Allah mette tout ce qu'elle a donné dans la balance de ses bonnes actions.

Je prie Allah que ce travail soit le début de belles réussites, et qu'Il nous accorde la réussite dans chaque étape à venir.

BOULILA.IkRAM

DÉDICACES

Avant toute chose, je loue Allah, Le Très-Haut, pour Sa grâce infinie, Son soutien constant et la force qu’Il m’a accordée durant tout ce parcours. Sans Sa volonté, ce travail n’aurait jamais vu le jour.

Je dédie ce modeste travail à mes parents bien-aimés, pour leur amour inégalé, leur patience exemplaire et leurs sacrifices silencieux qui m’ont permis d’avancer avec confiance. Qu’Allah les préserve et les comble de Ses bienfaits.

Une pensée remplie de reconnaissance à mes frères et sœurs : **Hamza, Dina, Noura, Fodil**, dont la présence et les encouragements m’ont toujours été d’un grand réconfort.

J’adresse également mes remerciements chaleureux à mes précieuses amies : **Sarah, Roumaïssa, Aya, Abla, Siham, Saberina et Yasmine**, pour les moments partagés, le soutien sincère et l’amitié qui a enrichi mon chemin.

Je n’oublie pas d’exprimer toute ma gratitude à notre estimée professeure **Souhila**, pour sa bienveillance, son accompagnement précieux et ses prières sincères. Que Dieu récompense généreusement ses efforts et son dévouement.

Je supplie Allah de faire de ce travail un pas vers de nouvelles réussites, et de nous guider vers un avenir rempli de bénédictions et de succès.

HARIK.LEILA

REMERCIEMENTS

Tout d’abord, nous louons Allah, Le Très-Haut, et Le remercions pour Son aide et Son soutien tout au long des étapes de la réalisation de ce travail, car Il nous a accordé la force, la volonté et la patience nécessaires pour achever cette recherche dans les meilleures conditions.

Nous exprimons nos sincères remerciements à notre honorable professeur **RAS-SOUL Abdelaziz**, qui ne nous a jamais ménagé ses conseils judicieux et ses remarques précieuses, et qui a consacré beaucoup de son temps et de ses efforts pour nous accompagner durant les différentes étapes de ce mémoire. Qu’il reçoive ici l’expression de notre profonde gratitude.

Nous souhaitons également adresser nos remerciements les plus profonds aux membres du jury pour avoir accepté d’évaluer ce travail, ainsi que pour leurs observations constructives qui ont contribué à son amélioration. Toute notre reconnaissance va à **Monsieur TAMI Omar**, président du jury, et à **Monsieur FRIHI Redouane**, examinateur, pour leur attention et leur appréciation de cet effort.

Nous n’oublions pas de remercier l’ensemble de nos enseignants, qui nous ont accompagnés durant toutes les années d’étude, et qui ont partagé avec nous leur savoir et leur expérience avec dévouement et sincérité.

Enfin, nous adressons une salutation de gratitude et de reconnaissance à toutes les personnes qui nous ont soutenus, de près ou de loin, pendant la période de préparation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction Générale	2
1 Notions de base de la Fiabilité	3
1.1 Mesures de Fiabilité	3
1.1.1 Indisponibilité	4
1.1.2 Temps moyen de défaillance du système	4
1.1.3 Fonction du taux de défaillance	5
1.1.4 Maintenabilité	6
1.1.5 Temps moyen de réparation (MTTR)	7
1.1.6 Disponibilité (Availability)	8
1.1.7 Temps moyen entre pannes (MTBF)	8
1.2 Lois de probabilité utilisées en fiabilité	8
1.2.1 Distribution binomiale	8
1.2.2 Distribution de Poisson	9
1.2.3 Distribution Exponentielle	9
1.2.4 Distribution Normale	11
1.2.5 Distribution Log-Normale	13
1.2.6 Distribution de Weibull	15
1.2.7 Distribution Gamma	16
1.2.8 Distribution Beta	17
1.2.9 Distribution de Pareto	18
1.2.10 Distribution de Rayleigh	18
1.2.11 Distribution de Lindley	18
1.3 Censure	20
1.3.1 Censure à droite	21
1.3.2 Censure à gauche	21
1.3.3 Censure par intervalle	22

1.3.4	Censure de Type I	22
1.3.5	Censure de Type II	23
1.4	Censure Progressive	23
1.4.1	Censure Progressive de Type-II	23
1.4.2	Censure Progressive de Type-I	24
1.5	Théorie de l'Estimation	25
1.5.1	Convergence asymptotique en loi	27
1.5.2	Lien avec l'estimateur du maximum de vraisemblance	27
1.6	Méthode d'Estimation du Maximum de Vraisemblance	27
1.6.1	Maximum de Vraisemblance pour des données complètes	28
1.6.2	Vraisemblance basée sur des données censurées de type II progressive	29
1.7	Méthode de Newton-Raphson pour la résolution d'équations non linéaires	30
1.7.1	Définition du problème	30
1.7.2	Principe de la méthode de Newton-Raphson	31
1.7.3	Algorithme de la méthode	31
1.7.3.1	Données	31
1.7.3.2	Étapes d'exécution	31
2	Tests d'accélération	32
2.1	Test de durée de vie accéléré (ALT)	32
2.2	Tests de Fiabilité	32
2.3	Contrainte dans des conditions accélérées	33
2.3.1	ALT à contrainte constante (CSALT)	33
2.3.1.1	Principe	33
2.3.1.2	Objectifs	33
2.3.1.3	Étapes de l'essai	33
2.3.1.4	Modèle CSALT à relation exponentielle	34
2.3.1.5	Avantages du modèle CSALT à relation exponentielle	34
2.3.1.6	Modélisation de l'effet du stress par le modèle CSALT multiplicatif	34
2.3.2	ALT à contrainte progressive (PSALT)	35
2.3.3	Step-Stress ALT (SSALT)	35
2.4	Importance des tests ALT	36
2.5	Types de matériaux soumis aux tests ALT :	37
2.6	ALT Facteurs affectant les tests	37
2.7	Modèles d'accélération ou relations stress-vie	37
2.8	Relations Contrainte-Durée de Vie	38
2.9	Modèle d'Exposition Cumulative (Cumulative Exposure Model)	39

2.10	Modèle Khamis-Higgins (K-H)	40
2.11	Modèle général des essais de vie accélérés à contrainte constante (CSALT)	40
3	Inférence statistique sur la distribution de Lomax avec les tests d'accélération et de censure	42
3.1	Distribution de Lomax	42
3.2	Inférence sur la distribution de Lomax à deux paramètres	44
3.2.1	Génération de la distribution	44
3.2.2	Fonction de densité jointe	45
3.2.3	Fonction de vraisemblance	45
3.2.4	Estimation par Maximum de Vraisemblance	45
3.2.5	Matrice d'information de Fisher	46
3.2.6	Présentation académique du package maxLik dans le cadre de l'estimation par maximum de vraisemblance	46
3.2.7	Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec des données complètes	47
3.3	Inférence sur la distribution de Lomax avec censure de type II	48
3.3.1	Estimation du maximum de vraisemblance pour la distribution Lomax sous censure de type II	49
3.3.2	Gradients	49
3.3.3	Matrice Hessienne	50
3.4	Inférence pour la loi de Lomax sous censure progressive de type II	51
3.4.1	Gradient de la log-vraisemblance	52
3.4.2	Matrice Hessienne	52
3.5	Inférence sur la distribution de Lomax sous un modèle d'accélération exponentiel de type CSALT	53
3.5.1	Matrice hessienne	54
3.5.2	Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec le test d'accélération CSALT	54
3.6	Inférence sur la distribution de Lomax sous un modèle d'accélération exponentiel de type CSALT avec censure de type II	55
3.6.1	Dérivées premières	55
3.6.2	Matrice Hessienne	56
3.6.3	Estimation des paramètres sous censure de type II avec le test d'accélération CSALT	56
3.7	Inférence des paramètres du modèle de Lomax sous un plan à accélération constante multiplicative (CSALT) avec censure progressive de type II	57
3.7.1	Fonction de risque	57

3.7.2	Matrice Hessienne	58
3.8	Application des Données Réelles	59
3.8.1	Ensemble des données	59
3.8.2	Description des données	60
3.8.3	Ajustement des données par la loi de Lomax	60
3.8.4	Estimation des paramètres du modèle	62
3.8.5	Estimation du Maximum de Vraisemblance (MLE) pour l'ensemble des données avec un censure progressive type II	62
3.8.6	Estimation du Maximum de Vraisemblance (MLE) avec censure progressive type II et un test d'accélération constante CSALT . . .	63

TABLE DES FIGURES

1.1	Fonction de fiabilité en fonction de temps	11
1.2	Courbe de fiabilité normale en fonction du temps.	13
1.3	Log-normale en fonction du temps	15
1.4	Fonction de fiabilité Gamma en fonction du temps	17
1.5	Illustration de la censure progressive de type II	25
1.6	Illustration de la censure progressive de type I	25
2.1	Différentes formes de changement de contrainte	36
2.2	Modèle d'exposition cumulé pour SSALT en 3 étapes	39
3.1	Densité de la loi de Lomax pour différentes valeurs de paramètres	44
3.2	Estimation du paramètre du modèle de Lomax avec censure type II . . .	51
3.3	Histogramme des paramètres descriptif des données des durées survie .	60
3.4	Résumé graphique des durées de survie des cobayes infectés par des bacilles tuberculeux virulents	60
3.5	Ajustement de la loi Lomax	62
3.6	Fonction de survie - Loi de Lomax pour $r=15$	64
3.7	Fonction de survie - Loi de Lomax pour $r=20$	64
3.8	Fonction de survie - Loi de Lomax pour $r=30$	64

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Relations contrainte-durée de vie couramment utilisées	38
3.1	Estimation des paramètres du modèle de Lomax en utilisant les données complet pour $\alpha = 2$ et $\theta = 2$	47
3.2	Estimation des paramètres du modèle de Lomax en utilisant les données complet pour $\alpha = 2.5$ et $\theta = 3$	48
3.3	Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec le censure type II pour $\alpha = 2$ et $\theta = 2$	50
3.4	Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec le censure type II pour $\alpha = 2.5$ et $\theta = 3$	50
3.5	Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec censure progressive de type II pour $\alpha = 1$, $\theta = 1$	53
3.6	Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec censure progressive de type II pour $\alpha = 2$, $\theta = 2$	53
3.7	Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec CSALT pour $\alpha = 1.2$, $\theta_0 = 2.8$ et $\beta = 1$	55
3.8	Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec CSALT et censure type II pour $\alpha = 2$, $\theta_0 = 3$ et $\beta = 2$	57
3.9	Estimations des paramètres pour différentes valeurs de n et r avec CSALT et censure progressive type II pour $\alpha = 1$, $\theta = 2$ et $\lambda = 1.5$	59
3.10	Estimations des paramètres pour différentes valeurs de n et r avec $\alpha = 2$, $\theta = 3$ et $\lambda = 2$ sous censure progressive de type II	59
3.11	Résumé de la description statistique du jeu de données	60
3.12	Comparaison des critères de validation de l'ajustement par des lois selon les critères AIC, BIC, KS, CvM et AD	61
3.13	Estimations MLE avec Censure Progressive Type II pour l'ensemble des données réelles ($n = 128$)	63

3.14 Estimations MLE avec Censure Progressive Type II et un test d'accélération constante CSALT pour l'ensemble des données réelles ($n = 128$) . .	63
---	----

ملخص : تتناول هذه المذكرة دراسة وتحليل موثوقية الأنظمة باستخدام اختبارات التسريع. يهدف البحث إلى تقييم عمر المنتجات والأجهزة بطريقة أسرع وأكثر كفاءة، من خلال تطبيق تقنيات اختبار الطول المختلفة مثل اختبار العمر المعجل تحت ظروف معروفة. تعتمد الدراسة على نماذج إحصائية، خاصة توزيع لومكس، لتقدير عمر النظام وتحديد عوامل التأثير على الأداء. تشمل الطرق المستخدمة في البحث تقديرات بطريقة الاعتماد على أعلى الاحتمالات وتحليل البيانات المراقبة بنوعها المراقبة من النوع الثاني والمراقبة التدريجية من النوع الثاني، مع التركيز على تحسين دقة التنبؤات وتنفيذ التحليلات باستخدام طرق تقديرية. يختتم البحث باستعراض نتائج تطبيقات التقنيات على أنواع مختلفة من الأنظمة، موضحاً مدى فعاليتها في تحسين فهم أداء وسلوك هذه الأنظمة على المدى الطويل.

الكلمات المفتاحية : الموثوقية، اختبارات التسريع، البيانات المراقبة، توزيع لومكس، الرقابة التدريجية من النوع الثاني، اختبار التحمل المتدرج المراقب (ثضاعة)، تقدير العلامات، طريقة الإمكان الأعظم.

Résumé :

Ce mémoire traite de l'étude et de l'analyse de la fiabilité des systèmes en utilisant les essais de vie accélérés. L'objectif de ce travail est d'évaluer la durée de vie des produits et des dispositifs de manière plus rapide et plus efficace, en appliquant différentes techniques d'essais de vie, telles que les tests d'accélération sous des conditions connues. L'étude repose sur des modèles statistiques, en particulier la loi de Lomax, afin d'estimer la durée de vie du système et d'identifier les facteurs influençant ses performances. La méthodologie adoptée comprend la méthode du maximum de vraisemblance, ainsi que l'analyse des données censurées, notamment la censure de type II et la censure progressive de type II, en mettant l'accent sur l'amélioration de la précision des estimations à l'aide de méthodes d'estimation. L'étude se conclut par la présentation des résultats de l'application de ces techniques à différents types de systèmes, mettant en évidence leur efficacité dans la compréhension du comportement et des performances des systèmes à long terme.

Mots-clés : Fiabilité, Tests d'accélération, Données censurées, Loi de Lomax, Censure de type II, Censure progressive de type II, CSALT (Censored Step-Stress Accelerated Life Testing), Estimation des paramètres, Méthode du maximum de vraisemblance.

Abstract :

This thesis deals with the study and analysis of system reliability using accelerated life testing. The objective of this work is to evaluate the lifetime of products and devices more quickly and efficiently by applying various life testing techniques, such as acceleration tests under known conditions. The study is based on statistical models, particularly the Lomax distribution, to estimate the system's lifetime and identify fac-

tors influencing its performance. The adopted methodology includes the maximum likelihood estimation method, as well as the analysis of censored data, particularly Type-II censoring and Type-II progressive censoring, with a focus on improving the accuracy of estimations using suitable estimation methods. The study concludes with the presentation of results obtained from the application of these techniques to different types of systems, highlighting their effectiveness in understanding the long-term behavior and performance of systems.

Keywords : Reliability, Accelerated life testing, Censored data, Lomax distribution, Type-II censoring, Type-II progressive censoring, CSALT (Censored Step-Stress Accelerated Life Testing), Parameter estimation, Maximum likelihood method.

Abréviations et Notations

Abréviations

TCL	Théorème central limite.
i.i.d	Indépendant et identiquement distribué.
EMV	Estimateur du Maximum de Vraisemblance.
MSE	Erreur quadratique moyenne
RMSE	Root Mean Squared Error (Racine de l'erreur quadratique moyenne)
MLE	Maximum likelihood estimator
ALT	Accelerated life test
PALT	Partially accelerated life test
SSALT	Stress accelerated life test
SSPALT	Step stress partially accelerated life test
cdf	Fonction de répartition
MTBF	Temps moyen entre les pannes
pdf	Fonction de densité de probabilité
MTTF	Temps moyen avant défaillance (Mean Time To Failure)
MTTR	Temps moyen de réparation (Mean Time To Repair)
AIC	Critère d'information d'Akaike (Akaike Information Criterion)
BIC	Critère d'information bayésien (Bayesian Information Criterion)
KS	Test de Kolmogorov-Smirnov
CvM	Test de Cramér-von Mises
AD	Test d'Anderson-Darling
CSALT	Test d'accélération constante (Constant Stress Life Test)

Notations

F	Fonction de distribution.
x_r	Point terminal supérieur (ou droit) .
F_n	Fonction de répartition empirique.
$(X_1, \dots, X_n)$	Échantillon de taille n de X .
$(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$	Échantillon ordonné.
$\mathbb{R}$	ensemble de nombre réels
$X_{(i)}$	La $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre.
$\mathcal{R}_\alpha$	Variation régulière d'indice α
L	Fonction à variation lente
$\xrightarrow{L}$	Convergence en loi
$\xrightarrow{P}$	Convergence en probabilité
$\xrightarrow{p.s}$	Convergence presque sure

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans un contexte industriel marqué par une évolution technologique rapide et une concurrence accrue, la **fiabilité des systèmes** devient un enjeu stratégique majeur. La fiabilité, définie comme la capacité d'un système ou d'un produit à accomplir sa fonction sans défaillance pendant une période donnée et dans des conditions d'utilisation spécifiques, constitue un indicateur essentiel de qualité et de performance.

Cependant, l'évaluation de la fiabilité dans des conditions normales peut nécessiter des temps d'observation très longs, ce qui est souvent incompatible avec les contraintes de coût et de délai. C'est dans cette optique que les **tests d'accélération** ont été développés. Ils consistent à soumettre les produits à des conditions sévères (températures élevées, surtension, pression accrue, etc.) dans le but de provoquer plus rapidement les défaillances, et ainsi estimer leur durée de vie réelle dans un laps de temps réduit.

Dans ce cadre, le présent mémoire a pour objectifs de :

1. Présenter les notions fondamentales de la fiabilité, notamment les mesures classiques, les types de censures, les lois de probabilité utilisées et les principes d'estimation statistique.
2. Étudier les tests d'accélération, en particulier le **modèle CSALT (Constant Stress Accelerated Life Test)**, et analyser leur apport dans la réduction du temps d'essai tout en conservant la pertinence des résultats.
3. Utiliser la **loi de Lomax** comme modèle statistique adapté aux données de défaillance à queue lourde, et proposer l'estimation de ses paramètres via la **méthode du maximum de vraisemblance (MV)**.
4. Traiter différents types de censures rencontrées dans les essais réels, notamment :
 - **La censure de type II** : où l'on observe les données jusqu'à ce qu'un nombre fixe de défaillances soit atteint, tandis que les autres unités survivantes sont censurées.

- **La censure progressive de type II** : dans laquelle, après chaque défaillance observée, un certain nombre d'unités sont retirées de l'essai selon un schéma prédéfini, reflétant des situations expérimentales plus réalistes liées à des contraintes de temps ou de ressources.
- 5. Analyser l'impact de ces types de censures sur la précision des estimations des paramètres de la loi de Lomax, notamment dans le cadre de tests d'accélération.
- 6. Fournir des illustrations numériques et des simulations mettant en évidence l'efficacité des modèles proposés et la robustesse des méthodes d'estimation dans différentes situations pratiques.

Ce travail vise ainsi à établir un pont entre les fondements théoriques de la fiabilité et leurs applications concrètes, afin de proposer des outils statistiques performants pour l'analyse, l'optimisation et la prise de décision dans la conception de systèmes fiables.

Le premier chapitre est consacré aux notions fondamentales de la fiabilité. Il présente les principales mesures statistiques telles que le temps moyen avant défaillance, les lois de probabilité usuelles, ainsi que les concepts de censure et de censure progressive. Il introduit également les méthodes d'estimation, notamment celle du maximum de vraisemblance.

Le deuxième chapitre porte sur les tests d'accélération. Il explore les essais sous conditions sévères, tels que le modèle CSALT, et présente les distributions de durée de vie les plus utilisées ainsi que les relations contrainte-vie.

Enfin, le troisième chapitre est dédié à l'inférence statistique autour de la loi de Lomax. Il propose des méthodes d'estimation des paramètres dans différents contextes : sans censure, avec censure de type II, avec censure progressive, et sous essais accélérés. Ce chapitre inclut également des applications numériques sur des données réelles.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE DE LA FIABILITÉ

Introduction

Le concept de **fiabilité** est l'une des pierres angulaires pour évaluer les performances des systèmes, en se concentrant sur l'analyse de leur fiabilité et leur capacité à fonctionner de manière continue au fil du temps. Dans ce chapitre, nous aborderons les concepts fondamentaux liés à la fiabilité, y compris les définitions principales et les mesures statistiques, telles que le **temps moyen avant défaillance** (MTTF), qui sont utilisées pour décrire le comportement des composants et des systèmes.

De plus, ce chapitre introduira le concept de **censure** (ou *révision*), qui est un processus clé dans l'analyse des données censurées. Il permet de traiter les informations incomplètes ou imprécises, comme les retards dans les défaillances ou les arrêts de l'observation. Ces facteurs influencent directement la précision des estimations statistiques.

Des modèles de distribution probabiliste, tels que les distributions **normale** et **exponentielle**, sont utilisés pour développer des modèles prédictifs robustes, permettant aux ingénieurs d'améliorer la conception des systèmes, de réduire les risques de défaillance et d'optimiser la gestion des opérations de maintenance. À travers ce chapitre, nous mettrons en évidence l'importance des concepts de **fiabilité** et de **censure** comme des outils essentiels pour améliorer la fiabilité des systèmes et atteindre une efficacité économique dans les applications industrielles et en ingénierie.

1.1 Mesures de Fiabilité

Les définitions de la fiabilité données dans la littérature varient entre les différents praticiens et chercheurs. La définition généralement acceptée est la suivante :

Définition 1.1 *La **fiabilité** est la probabilité qu'un système accomplisse correctement la fonction pour laquelle il a été conçu, et ce dans les limites de ses spécifications techniques.*

Plus précisément, elle désigne la probabilité qu'un produit ou composant fonctionne sans défaillance pendant une durée déterminée (durée de vie de conception), dans les conditions normales d'utilisation (température, tension, etc.). Autrement dit, la fiabilité est une mesure de la capacité du système à remplir sa mission avec succès. Elle constitue un critère essentiel de qualité exigé par les utilisateurs et pris en compte par les fabricants dès la phase de conception.

D'un point de vue mathématique, la fiabilité $R(t)$ est la probabilité qu'un système fonctionne avec succès entre le temps 0 et le temps t :

$$R(t) = P(T > t), \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

où T est une variable aléatoire représentant le temps jusqu'à la défaillance.

1.1.1 Indisponibilité

L'indisponibilité $F(t)$, une mesure de la défaillance, est définie comme la probabilité que le système tombe en panne avant le temps t :

$$F(t) = P(T \leq t), \quad \text{pour } t \geq 0$$

En d'autres termes, $F(t)$ est la fonction de distribution des défaillances. Si la variable aléatoire T a une fonction de densité $f(t)$, alors :

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(s) ds$$

ou, de manière équivalente :

$$f(t) = -\frac{d}{dt}[R(t)]$$

La fonction de densité peut être décrite mathématiquement en termes de T comme suit :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(t < T \leq t + \Delta t)$$

Cela peut être interprété comme la probabilité que le temps de défaillance T se produise entre le temps de fonctionnement t et l'intervalle suivant d'opération $t + \Delta t$.

1.1.2 Temps moyen de défaillance du système

Supposons que la fonction de fiabilité d'un système soit donnée par $R(t)$. Le temps moyen de défaillance attendu, qui représente la durée pendant laquelle un composant est censé fonctionner correctement, ou le temps moyen avant défaillance (MTTF), est donné par :

$$MTTF = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad (1.2)$$

En substituant :

$$f(t) = -\frac{d}{dt}[R(t)]$$

dans l'équation 1.2 et en effectuant une intégration par parties, nous obtenons

$$MTTF = - \int_0^{\infty} t d[R(t)] = [-tR(t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (1.3)$$

Le premier terme du côté droit de l'équation 1.3 est nul aux deux limites, puisque le système doit tomber en panne après un temps de fonctionnement fini. Par conséquent, nous devons avoir $tR(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Cela laisse le second terme, qui est égal à

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (1.4)$$

Ainsi, le MTTF est l'évaluation intégrale définie de la fonction de fiabilité. En général, si $\lambda(t)$ est défini comme la fonction de taux de défaillance, alors par définition le MTTF n'est pas égal à $1/\lambda(t)$.

1.1.3 Fonction du taux de défaillance

La probabilité d'une défaillance du système dans un intervalle de temps donné $[t_1, t_2]$ peut être exprimée en termes de la fonction de fiabilité comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt &= \int_{t_1}^{\infty} f(t) dt - \int_{t_2}^{\infty} f(t) dt \\ &= R(t_1) - R(t_2) \end{aligned}$$

ou en termes de la fonction de distribution des défaillances (ou la fonction d'irréliabilité) :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_{-\infty}^{t_2} f(t) dt - \int_{-\infty}^{t_1} f(t) dt = F(t_2) - F(t_1)$$

Le taux auquel les défaillances se produisent dans un certain intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est appelé **taux de défaillance**. Il est défini comme la probabilité qu'une défaillance par unité de temps se produise dans l'intervalle, étant donné qu'aucune défaillance ne s'est produite avant t_1 , le début de l'intervalle. Ainsi, le taux de défaillance est donné par :

$$\frac{R(t_1) - R(t_2)}{(t_2 - t_1)R(t_1)}$$

Notez que le taux de défaillance est une fonction du temps. Si nous redéfinissons l'intervalle comme $[t, t + \Delta t]$, l'expression ci-dessus devient :

$$\frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t R(t)}$$

Le taux dans les définitions ci-dessus est exprimé en défaillances par unité de temps, mais en réalité, les unités de temps peuvent être exprimées en miles, heures, etc.

La **fonction de risque** est définie comme la limite du taux de défaillance lorsque l'intervalle tend vers zéro. Ainsi, la fonction de risque $h(t)$ est le taux de défaillance instantané, et est définie par :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t R(t)} = \frac{1}{R(t)} \left[-\frac{d}{dt} R(t) \right] = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (1.5)$$

1.1.4 Maintenabilité

Lorsqu'un système tombe en panne, une intervention de maintenance est généralement effectuée afin de localiser et corriger la défaillance. Cela permet de restaurer le système à son état de fonctionnement en ajustant ou en remplaçant le composant défectueux.

La **maintenabilité** est définie comme la probabilité qu'un système défaillant soit remis en état de fonctionnement dans un délai donné, lorsque la maintenance est réalisée selon des procédures et des ressources spécifiées. Autrement dit, il s'agit de la capacité à diagnostiquer et réparer une panne dans un temps limité.

Les ingénieurs en maintenabilité travaillent en collaboration avec les concepteurs afin de garantir que le système soit facilement et efficacement maintenable par l'utilisateur final, et ce à un coût raisonnable. Cette démarche implique l'analyse des opérations de démontage, de remplacement des pièces, et de réassemblage, dans le but d'estimer le temps requis, les compétences nécessaires, les équipements de soutien ainsi que la documentation associée.

Soit T la variable aléatoire représentant le temps de réparation (ou temps d'arrêt total). Si T suit une densité de probabilité $g(t)$, alors la fonction de maintenabilité $V(t)$ est définie comme la probabilité que le système soit réparé avant l'instant t , soit :

$$V(t) = P(T \leq t) = \int_0^t g(s) ds$$

Par exemple, si :

$$g(t) = \mu e^{-\mu t}$$

où $\mu > 0$ est un taux de réparation constant, alors :

$$V(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

ce qui représente la forme exponentielle de la fonction de maintenabilité.

1.1.5 Temps moyen de réparation (MTTR)

Une mesure importante souvent utilisée dans les études de maintenance est le temps moyen de réparation (MTTR) ou le temps moyen d'arrêt. Le MTTR représente la valeur espérée de la variable aléatoire du temps de réparation et non du temps de défaillance. Il est donné par l'équation :

$$MTTR = \int_0^{\infty} t g(t) dt$$

Lorsque la distribution du temps de réparation suit une fonction de densité donnée par :

$$g(t) = \mu e^{-\mu t}$$

alors, selon l'équation précédente :

$$MTTR = \frac{1}{\mu}$$

Lorsque le temps de réparation T suit une distribution log-normale de densité $g(t)$, la fonction de densité est donnée par :

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad t > 0$$

alors il peut être démontré que :

$$MTTR = m \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

où m représente la médiane de la distribution log-normale.

Afin de concevoir et de fabriquer un système maintenable, il est nécessaire de prédire le **MTTR** pour diverses conditions de panne pouvant survenir dans le système. Cette prédiction repose généralement sur les expériences passées des concepteurs et l'expertise disponible pour effectuer les réparations.

Le temps de réparation du système est constitué de deux intervalles distincts : le temps de réparation passif et le temps de réparation actif.

1.1.6 Disponibilité (Availability)

La fiabilité est une mesure qui exige le succès du système pendant toute la durée de la mission. Aucune panne ou réparation n'est autorisée. Les missions spatiales et les vols d'avion sont des exemples de systèmes où les pannes et réparations sont interdites. La disponibilité est une mesure qui permet à un système d'être réparé en cas de panne. La disponibilité d'un système est définie comme la probabilité que le système soit opérationnel à un instant t . Mathématiquement :

$$\text{Disponibilité} = \frac{\text{Temps de fonctionnement du système}}{\text{Temps de fonctionnement} + \text{Temps d'arrêt du système}} = \frac{\text{MTTF}}{\text{MTTF} + \text{MTTR}}$$

La disponibilité est une mesure de succès principalement utilisée pour les systèmes réparables. Pour les systèmes non réparables la disponibilité $A(t)$ est égale à la fiabilité $R(t)$. Dans les systèmes réparables $A(t)$ sera supérieur ou égal à $R(t)$.

1.1.7 Temps moyen entre pannes (MTBF)

Le temps moyen entre pannes (MTBF) est une mesure importante dans les systèmes réparables. Cela signifie que le système a connu une panne et a été réparé. Comme le **MTTF** et **MTTR**, **MTBF** est une valeur attendue de la variable aléatoire du temps entre les pannes. Mathématiquement,

$$\text{MTBF} = \text{MTTF} + \text{MTTR}$$

1.2 Lois de probabilité utilisées en fiabilité

Cette section présente certaines des fonctions de distribution courantes ainsi que plusieurs modèles de risque ayant des applications en ingénierie de la fiabilité.

1.2.1 Distribution binomiale

La distribution binomiale est l'une des variables aléatoires discrètes les plus largement utilisées dans la fiabilité et l'inspection de la qualité. Elle a des applications en ingénierie de la fiabilité, par exemple, lorsqu'on traite d'une situation où un événement est soit un succès, soit un échec.

La fonction de densité de probabilité (pdf) de la distribution est donnée par :

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

où

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

où n est le nombre d'essais, x est le nombre de succès, et p est la probabilité de succès d'un essai unique.

La fonction de fiabilité, $R(k)$, (c'est-à-dire, au moins k éléments sur n sont bons) est donnée par :

$$R(k) = \sum_{x=k}^n \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

1.2.2 Distribution de Poisson

Bien que la distribution de Poisson puisse être utilisée d'une manière similaire à la distribution binomiale, elle est utilisée pour traiter des événements dont la taille de l'échantillon est inconnue. Il s'agit également d'une distribution de variable aléatoire discrète dont la fonction de densité de probabilité (pdf) est donnée par :

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \quad \text{pour } x = 0, 1, 2, \dots$$

où λ est le taux de défaillance constant, et x est le nombre d'événements. En d'autres termes, $P(X = x)$ est la probabilité que x défaillances se produisent exactement dans le temps t . Ainsi, la distribution de Poisson de fiabilité, $R(k)$ (la probabilité d'avoir k défaillances ou moins), est donnée par :

$$R(k) = \sum_{x=0}^k \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

Cette distribution peut être utilisée pour déterminer le nombre de pièces de rechange nécessaires à la fiabilité des systèmes redondants de secours pendant une mission donnée.

1.2.3 Distribution Exponentielle

La distribution exponentielle joue un rôle essentiel en ingénierie de la fiabilité car elle a un taux de défaillance constant. Cette distribution a été utilisée pour modéliser la durée de vie des composants et systèmes électroniques et électriques. Cette distribution est appropriée lorsque l'on considère qu'un composant usé qui n'a pas encore échoué est aussi fiable qu'un composant neuf – une hypothèse plutôt restrictive. Par conséquent, elle doit être utilisée avec prudence, car de nombreuses applications existent où la propriété d'absence de mémoire ne s'applique pas.

Pour cette distribution, nous avons reproduit les équations 1.6 et 1.7, respectivement :

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \quad (1.6)$$

$$R(x) = e^{-\frac{x}{\theta}} = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \quad (1.7)$$

où $\theta = 1/\lambda > 0$ est un paramètre du MTTF (temps moyen avant défaillance), et $\lambda \geq 0$ est un taux de défaillance constant.

La fonction de risque ou le taux de défaillance pour la fonction de densité exponentielle est constant, c'est-à-dire :

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}}{e^{-\frac{x}{\theta}}} = \frac{1}{\theta} = \lambda$$

Le taux de défaillance de cette distribution est λ , une constante, ce qui est la principale raison pour laquelle cette distribution est largement utilisée. En raison de sa propriété de taux de défaillance constant, la distribution exponentielle est un excellent modèle pour la longue période de "défaillance intrinsèque" stable.

La courbe de baignoire. Étant donné que la plupart des pièces et des systèmes passent la majeure partie de leur durée de vie dans cette partie de la courbe de baignoire, cela justifie l'utilisation fréquente de l'exponentielle (lorsque les défaillances précoces ou l'usure ne sont pas une préoccupation). Le modèle exponentiel fonctionne bien pour les temps d'inter-arrivée. Lorsque ces événements déclenchent des défaillances, le modèle de durée de vie exponentielle peut être utilisé. La courbe de baignoire est une représentation graphique du taux de défaillance d'un système en fonction du temps. Elle comporte trois phases :

- une phase initiale de défaillances précoces, où le taux de défaillance diminue (dus à des défauts de fabrication),
- une phase de défaillance intrinsèque stable, où le taux reste constant (fonctionnement normal),
- une phase finale d'usure, où le taux de défaillance augmente (vieillessement du système).

Cette forme en « baignoire » justifie le nom donné à cette courbe et elle est largement utilisée en fiabilité.

Nous allons maintenant discuter de certaines propriétés de la distribution exponentielle qui sont utiles pour comprendre ses caractéristiques, quand et où elle peut être appliquée.

Propriété 1.1 *La loi exponentielle est la seule loi de probabilité continue vérifiant :*

$$P(X \geq x) = P(X \geq x + s \mid X \geq s), \quad \text{pour } x > 0, s > 0 \quad (1.8)$$

Ce résultat signifie que la probabilité de survie d'un composant après un certain temps s est la même que celle d'un nouveau composant. C'est l'hypothèse dite « aussi bon que neuf ».

Propriété 1.2 Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi exponentielle de paramètre λ , alors :

$$2\lambda \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2(2n)$$

où $\chi^2(2n)$ désigne la loi du khi-deux avec $2n$ degrés de liberté. Ce résultat est utile pour construire un intervalle de confiance pour le paramètre λ .

1.2.4 Distribution Normale

La distribution normale joue un rôle important en statistique classique grâce au *Théorème Central Limite*. En ingénierie de fiabilité, la distribution normale s'applique principalement aux mesures de la susceptibilité des produits et aux contraintes externes. Cette distribution à deux paramètres est utilisée pour décrire les systèmes dans lesquels une défaillance résulte d'un effet d'usure pour de nombreux systèmes mécanique.

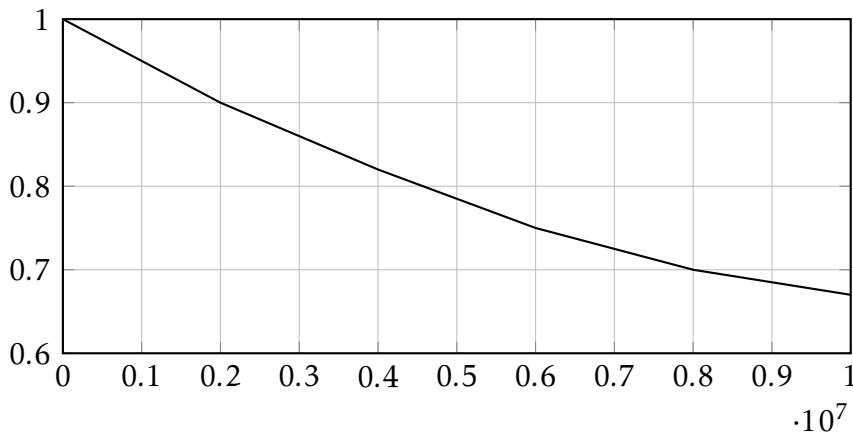


FIGURE 1.1 – Fonction de fiabilité en fonction de temps

La distribution normale suit la forme bien connue en cloche. Cette distribution est symétrique par rapport à la moyenne et la dispersion est mesurée par la variance. Plus la valeur est grande, plus la distribution est aplatie. La fonction de densité de probabilité (pdf) est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

où μ est la valeur moyenne et σ est l'écart-type. La fonction de répartition cumulative (cdf) est :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds$$

La fonction de fiabilité est :

$$R(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds$$

Il n'existe pas de solution sous forme fermée pour l'équation ci-dessus. Cependant, des tables de la fonction de densité normale standard sont facilement disponibles.

1) et peuvent être utilisées pour trouver des probabilités pour toute distribution normale. Si

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

est substitué dans la densité normale, on obtient :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < Z < \infty$$

Ceci est une densité normale standard, avec une valeur moyenne de 0 et un écart-type de 1. La fonction de répartition standardisée est donnée par :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \quad (1.9)$$

où Φ est une fonction de distribution normale standard. Ainsi, pour une variable aléatoire normale T , avec une moyenne μ et un écart-type σ ,

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

où Φ fournit la relation nécessaire si des tables normales standard doivent être utilisées. La fonction de risque pour une distribution normale est une fonction strictement croissante de x . Cela peut être facilement démontré en prouvant que $h'(x) \geq 0$ pour tout x .

Puisque

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)}$$

alors

$$h'(x) = \frac{R(x)f'(x) + f^2(x)}{R^2(x)} \geq 0 \quad (1.10)$$

On peut essayer cette démonstration en utilisant la définition de base d'une fonction

de densité normale f .

1.2.5 Distribution Log-Normale

La distribution log-normale des durées de vie est un modèle très flexible qui peut s'adapter empiriquement à de nombreux types de données de défaillance. Cette distribution, avec ses applications en ingénierie de maintenabilité, est capable de modéliser les probabilités de défaillance des systèmes réparables et d'intégrer l'incertitude dans l'information sur les taux de défaillance. La fonction de densité log-normale est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2}, \quad x \geq 0, \quad (1.11)$$

où μ et σ sont des paramètres tels que $-\infty < \mu < \infty$ et $\sigma > 0$. Notez que μ et σ ne sont pas la moyenne et l'écart-type de la distribution.

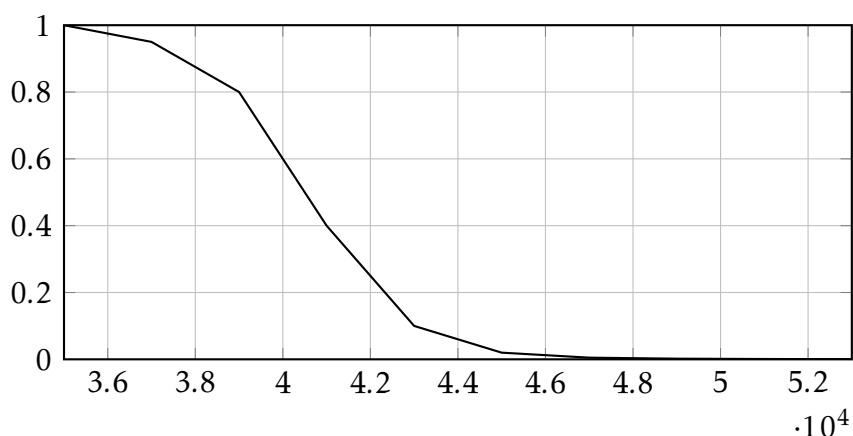


FIGURE 1.2 – Courbe de fiabilité normale en fonction du temps.

La relation avec la loi normale (il suffit de prendre les logarithmes naturels de toutes les données et des points temporels pour obtenir des données "normales") facilite l'utilisation de nombreux logiciels d'analyse statistique pour traiter les données normales.

Mathématiquement, si une variable aléatoire X est définie comme $X = \ln T$, alors X suit une loi normale avec une moyenne μ et une variance σ^2 . C'est-à-dire :

$$E(X) = E(\ln T) = \mu$$

et

$$V(X) = V(\ln T) = \sigma^2$$

Puisque $T = e^X$, la moyenne de la distribution log-normale peut être trouvée en utilisant la loi normale. Considérons :

$$E(T) = E(e^X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{\left[x - \frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]} dx$$

En réarrangeant l'exposant, cette intégrale devient :

$$E(T) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2} (x - (\mu + \sigma^2))^2} dx$$

Ainsi, la moyenne de la distribution log-normale est :

$$E(T) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

De manière similaire :

$$E(T^2) = E(e^{2X}) = e^{2\mu + 2\sigma^2}$$

Ainsi, la variance de la loi log-normale est :

$$V(T) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

La fonction de répartition de la loi log-normale est donnée par :

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sigma s \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln s - \mu}{\sigma}\right)^2} ds$$

Cela peut être relié à la variable centrée réduite Z par :

$$F(t) = P(T \leq t) = P(\ln T \leq \ln t)$$

$$= P\left[Z \leq \frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right]$$

Par conséquent, la fonction de fiabilité est donnée par :

$$R(t) = P\left[Z > \frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right] \quad (1.12)$$

Et la fonction de risque est :

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma t R(t)}$$

où Φ est la fonction de répartition de la densité normale standard.

Exemple 1.1 Le temps de défaillance d'un certain composant suit une distribution log-normale avec $\mu = 5$ et $\sigma = 1$. Trouver la fiabilité du composant et le taux de risque pour une

durée de vie de 50 unités de temps.

Solution : En substituant les valeurs numériques de μ , σ et x dans l'équation 1.12, nous calculons :

$$R(50) = P\left[Z > \frac{\ln 50 - 5}{1}\right] = P(Z > -1.09)$$

$$= 0.8621$$

De même, la fonction de risque est donnée par :

$$h(50) = \frac{\phi\left(\frac{\ln 50 - 5}{1}\right)}{50(1)(0.8621)} = 0.032 \text{ défaillances/unité.}$$

Ainsi, les valeurs de la distribution log-normale sont facilement calculées en utilisant les tables de la loi normale standard.

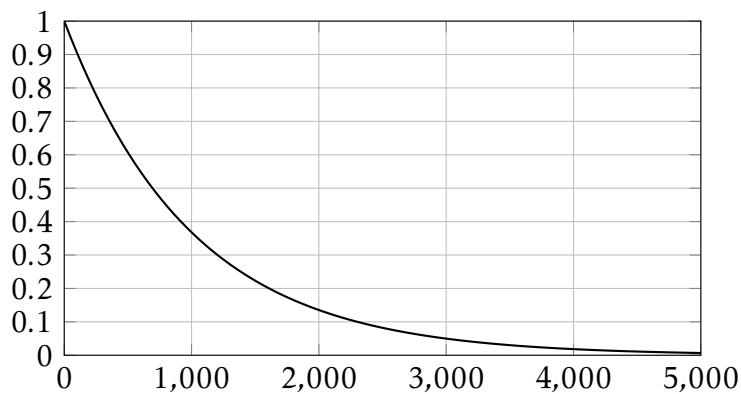


FIGURE 1.3 – Log-normale en fonction du temps

Le modèle de durée de vie log-normale, comme le modèle normal, est suffisamment flexible pour en faire un modèle empirique très utile. La figure 1.3 montre la fiabilité log-normale en fonction du temps. Elle peut être dérivée théoriquement sous des hypothèses correspondant à de nombreux modèles de défaillance.

1.2.6 Distribution de Weibull

La distribution exponentielle est souvent limitée en application en raison de sa propriété sans mémoire. La distribution de Weibull [1] est une généralisation de la distribution exponentielle et est couramment utilisée pour représenter la durée de vie en fatigue, la durée de vie des roulements à billes et la durée de vie des tubes à vide. La distribution de Weibull est extrêmement flexible et appropriée pour modéliser la durée de vie des composants avec des fonctions de taux de risque fluctuantes et pour

représenter divers types d'applications en ingénierie. La fonction de densité de probabilité à trois paramètres est donnée par :

$$f(x) = \frac{\beta(x - \gamma)^{\beta-1}}{\theta^\beta} e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\theta}\right)^\beta}, \quad x \geq \gamma \geq 0$$

où θ et β sont respectivement appelés paramètres d'échelle et de forme, et γ est appelé paramètre de localisation. Ces paramètres sont toujours positifs. En utilisant différents paramètres, cette distribution peut suivre la distribution exponentielle, la distribution normale, etc. Il est clair que, pour $x \geq \gamma$, la fonction de fiabilité $R(x)$ est :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\theta}\right)^\beta}, \quad \text{pour } x > \gamma > 0, \beta > 0, \theta > 0 \quad (1.13)$$

Ainsi,

$$h(t) = \frac{\beta(t - \gamma)^{\beta-1}}{\theta^\beta}, \quad t > \gamma > 0, \beta > 0, \theta > 0 \quad (1.14)$$

On peut montrer que la fonction de risque est décroissante pour $\beta < 1$, croissante pour $\beta > 1$, et constante lorsque $\beta = 1$.

Remarquons que les distributions de Rayleigh et exponentielle sont des cas particuliers de la distribution de Weibull avec $\beta = 2$, $\gamma = 0$, et $\beta = 1$, $\gamma = 0$, respectivement. Par exemple, lorsque $\beta = 1$ et $\gamma = 0$, la fiabilité de la distribution de Weibull dans l'équation 1.13 se réduit à :

$$R(t) = e^{-\frac{t}{\theta}}$$

La fonction de risque donnée dans l'équation 1.14 se réduit à $1/\theta$, une constante. Ainsi, l'exponentielle est un cas particulier de la distribution de Weibull. De même, lorsque $\gamma = 0$ et $\beta = 2$, la fonction de densité de probabilité de Weibull devient la densité de Rayleigh. C'est-à-dire :

$$f(x) = \frac{2}{\theta} x e^{-\frac{x^2}{\theta}}, \quad \text{pour } \theta > 0, x \geq 0$$

1.2.7 Distribution Gamma

La distribution gamma peut être utilisée comme fonction de probabilité de défaillance pour des composants dont la distribution est asymétrique. La fonction de densité de défaillance pour une distribution gamma est :

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (1.15)$$

où α est le paramètre de forme et β est le paramètre d'échelle. Ainsi,

$$R(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} e^{-\frac{s}{\beta}} ds$$

Si α est un entier, on peut montrer par intégration successive par parties que :

$$R(x) = e^{-\frac{x}{\beta}} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^i}{i!} \quad (1.16)$$

et

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{e^{-\frac{x}{\beta}} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^i}{i!}}$$

La fonction de densité gamma a des formes très similaires à la distribution de Weibull. Pour $\alpha = 1$, la distribution gamma devient la distribution exponentielle avec un taux de défaillance constant $\frac{1}{\beta}$. La distribution gamma peut également être utilisée pour modéliser le temps jusqu'à la n^{ime} défaillance d'un système si la distribution de défaillance sous-jacente est exponentielle. Ainsi, si X_i est exponentiellement distribué avec le paramètre $\theta = \frac{1}{\beta}$, alors

$$T = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

suit une distribution gamma avec les paramètres β et n .

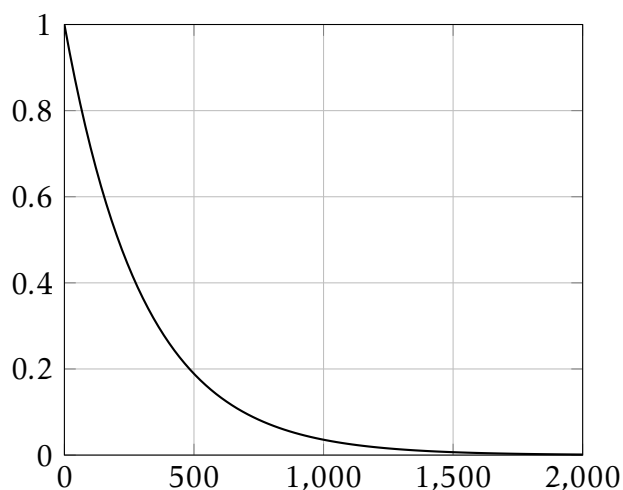


FIGURE 1.4 – Fonction de fiabilité Gamma en fonction du temps

1.2.8 Distribution Beta

La fonction de densité Beta à deux paramètres, $f(x)$, est donnée par :

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

où α et β sont les paramètres de distribution. Cette distribution à deux paramètres est couramment utilisée dans de nombreuses applications d'ingénierie de fiabilité.

1.2.9 Distribution de Pareto

La distribution de Pareto a été initialement développée pour modéliser les revenus d'une population. Des phénomènes tels que la taille des populations urbaines, les fluctuations des prix des actions et les revenus personnels ont des distributions avec des queues très longues. La fonction de densité de probabilité de la distribution de Pareto est donnée par :

$$f(x) = \frac{\alpha k^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad k \leq x < \infty$$

Les valeurs de la moyenne, de la variance et de la fiabilité pour la distribution de Pareto sont respectivement :

- $E[X] = \frac{k}{\alpha-1}$, pour $\alpha > 1$
- $\text{Var}(X) = \frac{\alpha k^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$, pour $\alpha > 2$
- $R(x) = \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha$

1.2.10 Distribution de Rayleigh

La fonction de Rayleigh est une distribution de durée de vie flexible qui peut s'appliquer à de nombreux modes de défaillance des processus de dégradation. La fonction de densité de probabilité de Rayleigh est donnée par :

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (1.17)$$

Les valeurs de la moyenne, de la variance et de la fiabilité pour la fonction de Rayleigh sont respectivement :

$$E[X] = \sigma \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Var}(X) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2$$

$$R(x) = e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

1.2.11 Distribution de Lindley

La distribution de Lindley a été initialement proposée comme une distribution à un seul paramètre par [2]. Elle a suscité un intérêt croissant ces dernières années en

raison de son utilité dans la modélisation des données de durée de vie complexes. [3] ont étudié certaines propriétés de cette distribution et ont démontré, dans la partie application, qu'elle est plus flexible et performante que la distribution exponentielle pour modéliser les données de durée de vie.

Pour améliorer sa flexibilité, plusieurs chercheurs ont proposé des généralisations en la combinant avec d'autres distributions connues. Parmi celles-ci, on trouve l'extension à deux paramètres étudiée par [4], [5], [6, 7].

Par la suite, [8] ont introduit une nouvelle version à deux paramètres qui offre un meilleur ajustement pour les données asymétriques, comparée à la distribution de Lindley inverse proposée par [9]. [10] ont également proposé d'utiliser la distribution généralisée de Lindley développée par [5] comme alternative à la distribution de Weibull dans la modélisation des données de vitesse du vent.

Les généralisations à trois paramètres ont reçu une attention particulière. Elles ont été définies, analysées et proposées comme modèles compétitifs par rapport aux distributions bien connues. Parmi ces généralisations, on cite celles proposées par [11], [12], ainsi que la distribution de Lindley à trois paramètres proposée par [13], qui repose sur une exponentiation de la distribution de Lindley.

En revanche, peu d'intérêt a été porté aux généralisations comportant plus de trois paramètres. L'un des rares modèles à quatre paramètres est la distribution de Lindley beta-généralisée, introduite par [14].

Densité de probabilité (PDF) :

Si la variable aléatoire X suit la loi de Lindley avec le paramètre $\theta > 0$, alors la densité de probabilité est donnée par :

$$f(x; \theta) = \frac{\theta^2}{1 + \theta} (1 + x) e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

Fonction de répartition (CDF) :

$$F(x; \theta) = 1 - \left(\frac{1 + \theta + \theta x}{1 + \theta} \right) e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

Valeurs statistiques fondamentales :

— **Espérance :**

$$E[X] = \frac{2}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}.$$

— **Variance :**

$$\text{Var}(X) = \frac{2(2 + \theta)}{\theta^2(1 + \theta)}.$$

— **Coefficient d'asymétrie (Skewness) :** Il dépend de θ mais reste toujours positif, ce qui indique que la loi de Lindley est plus asymétrique que la loi exponentielle. Dans le domaine de la fiabilité (*Fiabilité*), la loi de Lindley est utilisée pour modéliser les temps de défaillance des systèmes. Nous définissons quelques concepts fondamen-

taux de la fiabilité en utilisant cette loi.

La fonction de fiabilité

Elle est donnée par :

$$R(x) = 1 - F(x)$$

En utilisant la fonction de répartition cumulative (CDF) de la loi de Lindley, nous obtenons :

$$R(x; \theta) = \left(\frac{1 + \theta + \theta x}{1 + \theta} \right) e^{-\theta x}$$

La fonction de taux de défaillance :

Elle est donnée par :

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)}$$

En utilisant la fonction de densité $f(x)$ et la fonction de fiabilité $R(x)$:

$$h(x; \theta) = \frac{\frac{\theta^2}{1+\theta}(1+x)e^{-\theta x}}{\left(\frac{1+\theta+\theta x}{1+\theta} \right) e^{-\theta x}}$$

En simplifiant, on obtient :

$$h(x; \theta) = \frac{\theta^2(1+x)}{(1+\theta+\theta x)}$$

1.3 Censure

L'inférence sous censure est une préoccupation clé dans l'analyse de la fiabilité et de la survie, en raison de sa fréquence dans les données de durée de vie. La censure se produit lorsque le moment exact de la défaillance n'est pas connu. On peut alors connaître soit un intervalle dans lequel la défaillance s'est produite (censure par intervalle), une borne supérieure (censure à gauche), ou un moment où l'unité fonctionnait encore (censure à droite).

Même si les temps de défaillance exacts ne sont pas disponibles, toute information partielle reste utile pour une analyse statistique rigoureuse. Le développement de méthodes spécifiques pour traiter ces données est donc essentiel pour améliorer la qualité des inférences.

Les données censurées peuvent être :

- **Censurées individuellement** : tous les temps de censure sont identiques, par exemple lorsqu'un test s'arrête au même instant pour toutes les unités encore en fonctionnement.

- **Censurées de manière multiple** : les temps de censure varient selon les unités, souvent à cause de durées d'utilisation différentes.

La fin d'une expérience peut aussi être déterminée selon des critères spécifiques :

- **Censure de type I** : lorsque l'essai se termine après une période de temps fixée.
- **Censure de type II** : lorsqu'il s'arrête après un nombre donné de défaillances observées.

Les informations issues des censures de type I et II diffèrent et exigent des méthodes statistiques adaptées pour modéliser correctement les données de durée de vie.

Pour illustrer ce concept, considérons une étude sur 70 soldats en quarantaine, exposés au COVID-19. Certains développent des symptômes après la période d'observation, d'autres quittent l'étude prématurément, et d'autres encore ne présentent aucun symptôme pendant les 14 jours. Le temps exact d'infection n'est donc pas observé pour tous, ce qui représente un cas typique de données censurées.

En analyse de survie, l'objectif est de modéliser la distribution théorique du temps jusqu'à l'événement, tout en tenant compte des données censurées et non censurées, afin d'obtenir des estimations fiables et interprétables.

Dans les études de fiabilité ou d'analyse de survie, il arrive souvent que le moment exact de survenue de l'événement ne soit pas connu pour toutes les unités, en raison de la fin de la période d'observation ou d'autres contraintes. La manière dont cette information est manquante diffère selon les situations, ce qui conduit à plusieurs types de censure. Il est donc essentiel de distinguer entre ces types afin de choisir la méthode statistique appropriée. Ci-dessous, nous présentons les types de censure les plus courants.

1.3.1 Censure à droite

La **censure à droite** correspond à une situation dans laquelle la durée de vie réelle d'une unité dépasse un temps d'observation donné, sans que la défaillance ne soit effectivement constatée. Autrement dit, on observe uniquement que $T > a$, où a est le temps limite de l'expérience. Ce type de censure reflète l'incapacité de suivre certaines unités jusqu'à leur défaillance effective, souvent pour des raisons pratiques ou temporelles.

1.3.2 Censure à gauche

On dit qu'une variable aléatoire X est censurée à gauche si sa valeur ne dépasse pas un certain temps a , c'est-à-dire que l'événement d'intérêt s'est produit avant le temps a , sans que l'on connaisse le moment exact de sa survenue.

Formellement, soit T une variable aléatoire représentant le temps de survie (ou de défaillance). Si l'on sait uniquement que $T \leq a$, sans connaître la valeur exacte de T , alors l'observation est censurée à gauche.

Ainsi, on modélise cette situation par :

$$T \leq a$$

où le temps a représente un seuil de censure connu à l'avance.

Dans ce contexte, on utilise souvent un couple de variables aléatoires (T, δ) , où :

- T est le temps observé,
- $\delta = 0$ indique une censure à gauche (l'événement s'est produit avant T),
- $\delta = 1$ indique une observation exacte (le temps de l'événement est connu).

1.3.3 Censure par intervalle

La censure par intervalle concerne un sujet pour lequel on sait que l'événement d'intérêt s'est produit dans un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, sans connaître le moment exact de sa survenue. Par exemple, supposons qu'un patient a été testé négatif à un instant t_1 , puis positif à un moment ultérieur t_2 ; on en déduit que l'événement (ex. : la rémission, la rechute, etc.) s'est produit quelque part entre t_1 et t_2 . Dans un essai clinique, si un patient est en rémission à la 8^{ème} semaine mais absent à la 11^{ème} semaine, puis revient non en rémission, alors l'intervalle de censure est $[8, 11]$:

$$I_i = [8, 11]$$

Si X est le temps réel de l'événement et b est une borne supérieure de l'intervalle de censure, la variable de durée observée est donnée par :

$$T = \min(X, b)$$

Les données issues de cette forme de censure sont exprimées comme des couples de variables aléatoires (T, d) , où :

- T est le temps observé ou la borne de l'intervalle,
- $d = 1$ si l'événement est observé (pas censuré),
- $d = 0$ si l'observation est censurée à droite à b .

1.3.4 Censure de Type I

Lorsque la recherche est censée être achevée à un moment spécifique T déterminé par l'expérimentateur, la censure de type I se produit. Un sujet qui ne peut pas voir

l'événement est considéré comme censuré à la fin de la période de recherche. Dans la censure de type I, la quantité d'éléments non censurés est une variable aléatoire.

1.3.5 Censure de Type II

Il est possible que le temps soit laissé ouvert au début de la censure de type II. L'expérience est autorisée à se poursuivre jusqu'à ce qu'un certain pourcentage des n objets, r/n , ait "échoué". L'échantillon aléatoire avec des valeurs ordonnées $T_1, T_2, \dots, T_n$ est noté $T_1, T_2, \dots, T_n$. Notre préoccupation est les $r^{\text{ème}}$ plus petites observations dans un échantillon aléatoire de taille n , puisque l'observation se terminera lorsque le temps d'échec $r^{\text{ème}}$ se produira.

Alternativement, imaginons que seules les $r < n$ durées de vie soient observées pour un échantillon donné $T_1, T_2, \dots, T_n$ d'éléments. Avant d'examiner les données de survie, la valeur de r est fixée. Cela signifie que les données observées sont constituées des r observations les plus petites. D'autres statistiques peuvent être utilisées pour représenter cela en termes de variables aléatoires.

Seules les premières r réponses classées $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont visibles parmi les réponses disponibles $T_1, T_2, \dots, T_n$. Autrement dit,

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq t_{(3)} \leq \dots \leq t_{(r-1)} \leq t_{(r)}$$

1.4 Censure Progressive

Un type de censure est l'échantillonnage avec censure progressive. L'idée de base derrière une technique de censure progressive est qu'elle permet de retirer des unités à chaque temps d'échec enregistré. Récemment, la distribution de durée de vie créée sur des données censurées progressivement a reçu une attention impressionnante. En particulier pour estimer des paramètres inconnus ou des fonctions de survie et de risque associées. Le schéma de censure progressive a une valeur significative dans les études de tests de durée de vie. Il permet l'élimination des éléments vivants de l'expérience à différents niveaux. Cela permettra potentiellement d'économiser beaucoup pour le chercheur en termes de coût et de temps.

1.4.1 Censure Progressive de Type-II

Les suppressions sont effectuées pendant les périodes de défaillance qui ont été identifiées dans la procédure de censure progressive de Type-II. Lorsqu'une défaillance est détectée, le nombre d'unités, qui sont préétablies, est immédiatement retiré des unités restantes. En conséquence, le nombre d'observations est prédéterminé, mais la durée de l'expérience est imprévisible. L'approche suivante peut être utilisée pour générer des statistiques d'ordre censurées de Type-II de manière progressive. Par exemple,

Pour tester la fiabilité des produits, n unités sont mises en place en même temps. Lorsque la première défaillance se produit, R_1 unités survivantes sont sélectionnées aléatoirement et retirées de l'expérience. Après la deuxième défaillance, immédiatement R_2 unités sont retirées, et ainsi de suite.

Après la $r^{\text{ème}}$ défaillance, le processus est répété jusqu'à ce que toutes les R_r unités restantes soient retirées. Les R_i sont spécifiés avant de commencer l'expérience. L'investigateur détermine le nombre d'éléments dans l'échantillon n , le nombre de défaillances r , et le schéma des échantillons de censure progressive avant de commencer une expérience de vie. $(R_1, R_2, \dots, R_r)$.

Avec :

$$n = r + \sum_{i=1}^r R_i$$

La figure 1.5 illustre un exemple d'échantillon de censure progressive de Type II où n , r et R sont des valeurs fixes tandis que le temps total de l'expérience est une variable aléatoire.[15]

1.4.2 Censure Progressive de Type-I

La censure progressive de Type I est basée sur des points de temps prédéterminés $T_1, T_2, \dots, T_r$. Les temps de défaillance sont enregistrés un par un jusqu'à ce que l'expérience soit terminée au point de temps T_r .

En conséquence, les temps d'intervention $T_1, T_2, \dots, T_r$ ont des valeurs fixes. Cependant, la taille de l'échantillon ainsi que le schéma de censure utilisé ont été choisis au hasard (et peuvent varier par rapport au schéma de censure initialement prévu à un certain moment en raison du manque d'unités survivantes pour compléter la censure requise). La durée du test est donc contrainte par T_r .

Cependant, il n'est pas fixe (aléatoire) dans le cas de la censure progressive de type II.

La Figure 1.6 est une explication de l'échantillon de censure progressive de type I où n et R sont des variables aléatoires tandis que le temps total de l'expérience est une valeur fixe. [16]

Si $R_1 = R_2 = \dots = R_r = 0$, alors $n = r$ représente l'échantillon complet.

Si $R_1 = R_2 = \dots = R_{r-1} = 0$, nous avons $R_r = n - r$, ce qui représente le type conventionnel.

Indication : Dans la figure (1.5 et 1.6) m représente r .

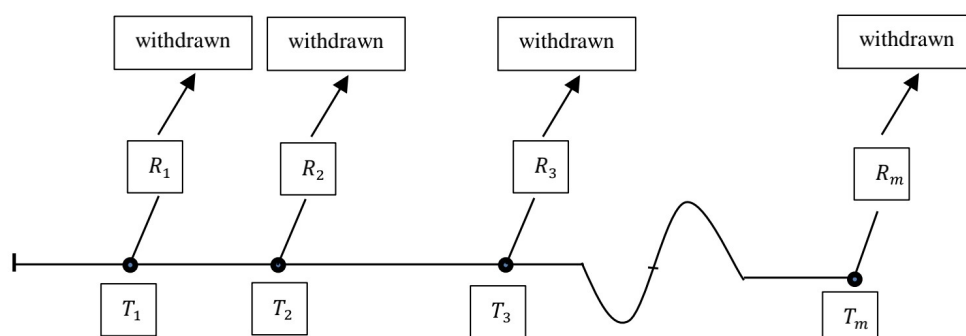


FIGURE 1.5 – Illustration de la censure progressive de type II

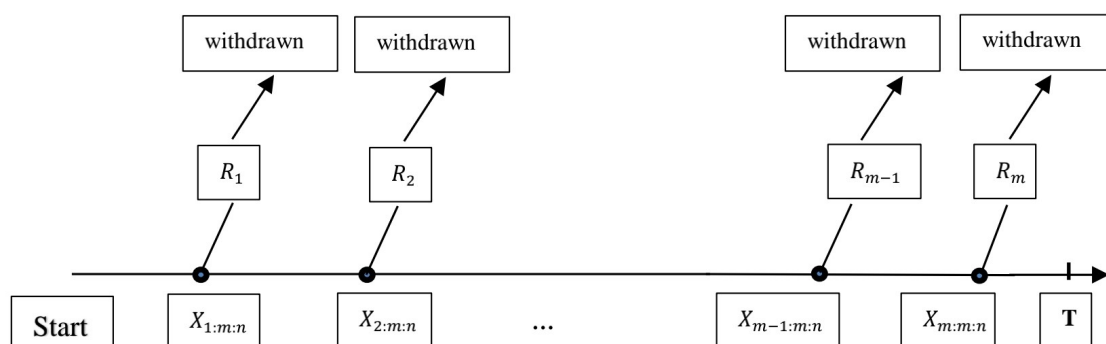


FIGURE 1.6 – Illustration de la censure progressive de type I

1.5 Théorie de l'Estimation

L'estimation est une branche fondamentale de la statistique qui consiste à utiliser les données observées pour approcher les caractéristiques inconnues d'une population, appelées *paramètres*. Elle peut être ponctuelle, lorsqu'on cherche à donner une valeur unique à un paramètre, ou par intervalle, lorsqu'on souhaite déterminer une plage de valeurs plausible avec un certain niveau de confiance.

Dans notre contexte, nous nous intéressons principalement à l'**estimation ponctuelle**, où l'objectif est de construire une fonction des observations appelée *estimateur* notée $\hat{\theta}$, qui vise à approcher le paramètre inconnu θ .

Un estimateur est dit **bon** s'il satisfait un certain nombre de propriétés souhaitables. Ces propriétés garantissent la qualité statistique de l'estimation obtenue :

- Non-biaisé
- Consistant

- Efficace
- Suffisant

En d'autres termes, si $\hat{\lambda}$ est une bonne estimation ponctuelle de λ , alors on peut choisir la fonction $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de sorte que $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ soit non seulement un estimateur non biaisé de λ , mais aussi que sa variance soit minimale parmi toutes les estimations possibles.

Nous allons maintenant présenter les définitions et les résultats théoriques qui permettront de construire et d'évaluer de tels estimateurs.

Définition 1.2 Pour un entier positif donné n , la statistique $Y = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est appelée un estimateur sans biais du paramètre θ si l'espérance de Y est égale à un paramètre θ , c'est-à-dire :

$$E(Y) = \theta$$

Définition 1.3 La statistique Y est appelée un estimateur consistant du paramètre θ si Y converge stochastiquement vers un paramètre θ lorsque n tend vers l'infini. Si ϵ est un nombre positif arbitrairement petit et que Y est consistant, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y - \theta| \leq \epsilon) = 1$$

Définition 1.4 La statistique Y sera appelée l'estimateur sans biais de variance minimale du paramètre θ si Y est sans biais et que la variance de Y est inférieure ou égale à la variance de tout autre estimateur sans biais de θ . Un estimateur ayant la propriété de variance minimale dans les grands échantillons est dit efficace.

Définition 1.5 Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon aléatoire issu d'une loi dépendant d'un paramètre inconnu θ .

Une statistique $T(X)$ est dite **suffisante** pour θ si la distribution conditionnelle de l'échantillon X sachant $T(X) = t$ **ne dépend pas** du paramètre θ .

La définition 1.4 est utile pour trouver une borne inférieure sur la variance de tous les estimateurs sans biais. Nous établissons maintenant une inégalité de borne inférieure connue sous le nom d'inégalité de Cramér-Rao.

Théorème 1.1 (Inégalité de Cramér-Rao) Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ un échantillon aléatoire provenant d'une distribution de densité de probabilité $f(x; \theta)$ pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$, où θ_1 et θ_2 sont connus. Soit $Y = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un estimateur sans biais de θ . L'inégalité de borne inférieure sur la variance de Y , $\text{Var}(Y)$, est donnée par :

$$\text{Var}(Y) \geq \frac{1}{nE \left[\left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]}$$

1.5.1 Convergence asymptotique en loi

Définition 1.6 : La *convergence en loi* (ou *convergence en distribution*) est un type de convergence utilisé en théorie des probabilités. Soit une suite de variables aléatoires (X_n) et une variable aléatoire X , on dit que :

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$$

si la fonction de répartition de X_n converge vers celle de X en tout point de continuité de F_X . Formellement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } F_X \text{ est continue.}$$

Cette notion est fondamentale pour étudier le comportement des estimateurs lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

1.5.2 Lien avec l'estimateur du maximum de vraisemblance

Soit $\hat{\theta}_n$ un estimateur du paramètre θ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance (EMV). Sous certaines conditions régulières, l'EMV admet une propriété asymptotique remarquable :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, I(\theta_0)^{-1})$$

où $I(\theta_0)$ représente l'information de Fisher évaluée en θ_0 . Cela implique que, pour de grandes tailles d'échantillons

$$\hat{\theta}_n \approx \mathcal{N}\left(\theta_0, \frac{1}{n}I(\theta_0)^{-1}\right)$$

1.6 Méthode d'Estimation du Maximum de Vraisemblance

L'estimation du maximum de vraisemblance est une technique d'inférence statistique largement utilisée pour estimer les paramètres dans les modèles probabilistes de génération de données. Cette approche, qui est théoriquement simple, fournit des estimations de paramètres avec des caractéristiques statistiques solides. Les estimateurs du maximum de vraisemblance pour les deux paramètres inconnus μ et σ présentent des propriétés asymptotiques intrigantes, comme déterminé par [17]. En utilisant cette approche, les estimateurs sont cohérents, asymptotiquement normaux et asymptotiquement non biaisés.

Même lorsqu'une racine cohérente unique de l'équation de vraisemblance est connue pour exister, il est parfois difficile de construire une solution claire pour l'estimation du maximum de vraisemblance d'un paramètre en fonction de l'échantillon. Dans de

telles situations, des méthodes numériques doivent être utilisées pour évaluer l'estimateur du maximum de vraisemblance par itérations répétées. La racine d'une équation peut être trouvée en utilisant de nombreuses méthodes numériques. L'une des méthodes les plus couramment utilisées pour la détection des racines est l'approche de Newton-Raphson. L'approche de Newton peut être facilement étendue pour relever le défi de la recherche de solutions à un système d'équations non linéaires. De plus, à mesure que l'on se rapproche de la racine, la stratégie peut être prouvée comme quadratiquement convergente.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta)$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des observations aléatoires et indépendantes issues d'une population avec une fonction de densité $f(x)$. Dans le cas général, on cherche à trouver un estimateur ou des estimateurs $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m$ (s'ils existent) tels que :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m) > f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_m)$$

où $\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_m$ représente d'autres estimateurs différents de $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m$.

1.6.1 Maximum de Vraisemblance pour des données complètes

Pour tout θ , la statistique $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est appelée un estimateur du maximum de vraisemblance de θ et sera notée comme :

$$\hat{\theta} = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

La valeur observée de $\hat{\theta}$ est appelée l'EMV (estimateur du maximum de vraisemblance) de θ .

La fonction de vraisemblance, $L(X; \theta)$, est le produit de la fonction de densité de probabilité évaluée en chaque point de l'échantillon :

$$L(X, \theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i; \theta)$$

où $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ est trouvé en maximisant $L(X; \theta)$ par rapport à θ . En pratique, il est souvent plus facile de maximiser $\ln[L(X; \theta)]$ pour trouver le vecteur des estimateurs du maximum de vraisemblance, ce qui est valide car la fonction logarithmique est monotone. La fonction de log-vraisemblance est donnée par :

$$\ln L(X, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(X_i; \theta)$$

et est asymptotiquement distribuée normalement puisqu'elle est constituée de la somme de n variables indépendantes, conformément au théorème central limite. Puisque $L(X; \theta)$ est une fonction de densité de probabilité conjointe pour $X_1, X_2, \dots, X_n$, elle doit s'intégrer à 1, c'est-à-dire :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty L(X; \theta) dX = 1$$

En supposant que la vraisemblance est continue, la dérivée partielle du côté gauche par rapport à l'un des paramètres, θ_i , donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty L(X; \theta) dX &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \theta_i} L(X; \theta) dX \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L(X; \theta) L(X; \theta) dX \\ &= E \left[\frac{\partial \log L(X; \theta)}{\partial \theta_i} \right] \\ &= E[U_i(\theta)] \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

où $U(\theta) = (U_1(\theta), U_2(\theta), \dots, U_m(\theta))'$ est souvent appelé le **vecteur de score** et le vecteur $U(\theta)$ a pour composantes :

$$U_i(\theta) = \frac{\partial [\log L(X; \theta)]}{\partial \theta_i} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m$$

Ce qui, lorsqu'il est mis à zéro et résolu, donne le vecteur MLE $\hat{\theta}$.

Supposons que nous puissions obtenir une fonction non triviale de $X_1, X_2, \dots, X_n$, disons $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$, telle que, lorsque θ est remplacé par $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$, la fonction de vraisemblance L atteindra un maximum. En d'autres termes,

En général, la mécanique pour obtenir l'EMV peut être obtenue comme suit :

- Étape 1. Trouver la fonction de densité jointe $L(X, \theta)$
- Étape 2. Prendre le logarithme naturel de la densité $\ln L$
- Étape 3. Prendre les dérivées partielles de $\ln L$ par rapport à chaque paramètre
- Étape 4. Égaler les dérivées partielles à zéro
- Étape 5. Résoudre pour les paramètres

1.6.2 Vraisemblance basée sur des données censurées de type II progressive

Supposons que nous ayons une variable aléatoire X suivant une distribution logistique généralisée (GL) à deux paramètres (μ, σ) . Ainsi, la fonction de densité de pro-

tabilité est donnée par l'équation 1.18 et la fonction de distribution cumulative par l'équation 1.19.

Supposons que n objets identiques sont soumis à un test, chacun suivant une distribution de durée de vie logistique généralisée (μ, σ) . Nous avons un échantillon d'observations selon un schéma de censure progressive $(R_1, R_2, \dots, R_r)$ de type II : $X_{1:r:n}, X_{2:r:n}, \dots, X_{r:r:n}$. Alors, la densité de probabilité conjointe de ces valeurs est :

$$f_{X_{1:r:n}, X_{2:r:n}, \dots, X_{r:r:n}}(x_1, x_2, \dots, x_r) = \prod_{i=1}^r f(x_i)[1 - F(x_i)]^{R_i} \quad (1.18)$$

où $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_r < \infty$.

Les fonctions de densité de probabilité et de distribution cumulative de cet échantillon sont notées respectivement $f(\cdot)$ et $F(\cdot)$, comme indiqué dans les équations 1.18 et 1.19. De plus :

$$K = n(n - R_1 - 1) \cdots (n - R_1 - R_2 - \dots - R_{r-1} - r + 1). \quad (1.19)$$

Pour plus de détails, voir [18].

Nous supposons que $R_1, R_2, \dots, R_r$ représente le schéma, n est la taille de l'échantillon et r est le nombre d'échecs, qui sont fixés à l'avance.

Ainsi :

$$D = (X_{1:r:n}, X_{2:r:n}, \dots, X_{r:r:n}). \quad (1.20)$$

1.7 Méthode de Newton-Raphson pour la résolution d'équations non linéaires

Les équations non linéaires constituent l'un des problèmes fondamentaux en mathématiques, en ingénierie et en physique, et il est souvent difficile de trouver leurs solutions analytiques. C'est pourquoi des méthodes numériques telles que la méthode de Newton-Raphson sont utilisées pour obtenir une approximation de la solution de ces équations de manière efficace [19].

1.7.1 Définition du problème

Supposons que nous ayons l'équation :

$$f(x) = 0$$

où $f(x)$ est une fonction continue et différentiable. L'objectif est de trouver la valeur de x qui satisfait cette équation.

1.7.2 Principe de la méthode de Newton-Raphson

La méthode repose sur l'utilisation de la tangente à la courbe de la fonction en un point pour améliorer l'approximation de la racine. Si nous avons une approximation initiale x_0 , l'approximation suivante se calcule par la relation :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

où :

- x_n est l'approximation actuelle de la racine.
- $f(x_n)$ est la valeur de la fonction en x_n .
- $f'(x_n)$ est la dérivée de la fonction en x_n .

Cette idée aide à “approximer” la racine progressivement en utilisant les informations dérivées de la fonction elle-même

1.7.3 Algorithme de la méthode

1.7.3.1 Données

- La fonction $f(x)$.
- La dérivée de la fonction $f'(x)$.
- Une approximation initiale x_0 .
- Un seuil d'arrêt ϵ (par exemple 10^{-6}).
- Un nombre maximal d'itérations N .

1.7.3.2 Étapes d'exécution

1. Choix du point de départ :

On commence par une approximation initiale x_0 proche de la racine attendue.

2. Calcul de l'itération :

En utilisant la formule :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

on met à jour la valeur de x .

3. Vérification de la condition de convergence :

Si : $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$

alors nous considérons que la racine a convergé et le problème est résolu.

4. Répétition :

Si la condition de convergence n'est pas satisfaite, on répète les étapes jusqu'à atteindre le nombre maximal d'itérations N .

2.1 Test de durée de vie accéléré (ALT)

Une technologie utilisée pour accélérer le processus de détermination de la fiabilité des produits, en particulier ceux à haute fiabilité. Cela se fait en exposant les produits à des conditions de fonctionnement plus sévères que d'habitude, telles que des températures plus élevées ou des niveaux de contrainte mécanique plus importants. Cela permet de réduire le temps nécessaire pour collecter suffisamment de données sur la durée de conservation du produit.

2.2 Tests de Fiabilité

Un test de fiabilité est une expérience systématique réalisée pour évaluer la capacité d'un produit ou d'un système à fonctionner sans défaillance pendant une période déterminée et sous des conditions spécifiques. Ces tests visent à analyser les données de durée de vie et l'usure du produit au fil du temps, permettant ainsi d'estimer le temps attendu avant une panne ou une anomalie.

Les tests de fiabilité sont appliqués dans divers domaines tels que la fabrication, l'ingénierie, l'électronique, l'automobile et l'aérospatiale. Leurs principes sont également utilisés dans d'autres disciplines, notamment l'analyse clinique, où ils sont connus sous le nom d'analyse de survie, en économie sous l'appellation d'analyse de durée, et en sociologie comme analyse historique. La théorie de la fiabilité fournit un cadre statistique pour l'étude des données de durée de vie, contribuant ainsi à l'amélioration de la qualité des produits, à l'identification des causes de défaillance et à la prise de décisions éclairées en matière de conception et de maintenance.

Les tests de fiabilité consistent à soumettre les produits à diverses contraintes afin d'évaluer leur comportement et de détecter d'éventuels points faibles. Les méthodes de test varient en fonction du type de produit et incluent des essais environnementaux

tels que les tests de durée de vie accélérée (ALT), qui intensifient les facteurs influençant la fiabilité, ainsi que des tests cycliques simulant une utilisation répétée pour identifier les défaillances liées à l'usure ou à la fatigue.

2.3 Contrainte dans des conditions accélérées

La contrainte dans des conditions accélérées peut être appliquée de différentes manières, à savoir par des niveaux de contrainte constante, de contrainte progressive et de contrainte par paliers (voir [20]). Le choix de la charge de contrainte dépend du mode d'utilisation du produit ou de l'unité en service, en dehors d'autres limitations pratiques et théoriques.

2.3.1 ALT à contrainte constante (CSALT)

Dans CSALT, la contrainte appliquée aux produits testés est indépendante du temps. Les unités de test sont soumises à un niveau de stress constant, plus élevé que d'habitude, jusqu'à ce que toutes les unités échouent (cas complet) ou que le test soit terminé, ce qui entraîne des données de test censurées.

2.3.1.1 Principe

Dans ce type d'essai, chaque unité est testée sous une contrainte fixe (comme une température élevée, une surtension, une pression accrue, etc.) durant toute la durée de l'essai. On suppose que l'augmentation du niveau de stress réduit le temps de vie, permettant ainsi une observation plus rapide des défaillances.

2.3.1.2 Objectifs

- Accélérer le processus de défaillance pour réduire la durée d'essai.
- Modéliser la relation entre la contrainte appliquée et la durée de vie.
- Estimer la durée de vie du produit dans des conditions normales d'utilisation à partir des données obtenues sous contraintes élevées.

2.3.1.3 Étapes de l'essai

1. Diviser les échantillons en plusieurs groupes.
2. Appliquer à chaque groupe un niveau de contrainte constant différent.
3. Enregistrer les temps de défaillance de chaque unité.
4. Estimer les paramètres du modèle de durée de vie sous chaque niveau de contrainte.
5. Utiliser un modèle d'accélération pour extrapoler la durée de vie en conditions normales.

2.3.1.4 Modèle CSALT à relation exponentielle

Dans le cadre des essais de fiabilité, le modèle **CSALT** (*Constant-Stress Accelerated Life Testing*) constitue l'un des outils les plus répandus pour analyser l'effet d'un facteur de stress (tel que la température, la pression ou la tension électrique) sur la durée de vie d'un dispositif ou d'un composant. Ce modèle repose sur l'hypothèse que la contrainte appliquée demeure constante tout au long de l'essai.

Dans sa version à relation exponentielle, le modèle établit un lien fonctionnel de type exponentiel entre la contrainte z et un paramètre d'échelle du modèle, généralement noté θ , sous la forme suivante :

$$\theta(z) = \theta_0 \cdot \exp(\beta z)$$

Cette relation permet de modéliser l'effet de la contrainte sur le comportement de défaillance : une valeur positive de β suggère que la contrainte prolonge la durée de vie, tandis qu'une valeur négative indique une accélération du processus de défaillance. Le modèle exponentiel CSALT est particulièrement apprécié pour sa simplicité analytique, la clarté de son interprétation et sa capacité d'adaptation à divers contextes industriels et expérimentaux.

2.3.1.5 Avantages du modèle CSALT à relation exponentielle

Le modèle CSALT à relation exponentielle présente plusieurs avantages qui expliquent sa large adoption dans les études de fiabilité :

- **Simplicité mathématique** : la forme exponentielle facilite l'analyse théorique et le calcul des estimateurs par des méthodes classiques comme le maximum de vraisemblance.
- **Interprétation intuitive** : le paramètre β permet une interprétation directe de l'effet de la contrainte sur la durée de vie (accélération ou ralentissement).
- **Flexibilité** : le modèle peut être intégré facilement à différents types de lois de durée de vie (comme Weibull, Log-normale, Lomax, etc.).
- **Compatibilité avec les plans d'expérience** : il s'adapte bien aux essais où la contrainte est maintenue constante, ce qui est courant dans les tests accélérés en laboratoire.
- **Facilité d'estimation** : les paramètres peuvent être estimés efficacement à l'aide de logiciels statistiques, même sur des données censurées.

2.3.1.6 Modélisation de l'effet du stress par le modèle CSALT multiplicatif

Le modèle **CSALT** (Constant Stress Accelerated Life Test) est un cadre utilisé pour analyser la fiabilité des systèmes soumis à des conditions de fonctionnement accéléré-

rées. Le principe consiste à exposer les unités testées à un niveau de stress constant plus élevé que la normale (comme une température ou une tension plus élevée), dans le but d'observer plus rapidement les défaillances.

Pour exploiter les données issues de ces essais accélérés, on suppose qu'il existe une relation déterministe entre le comportement du système sous stress et en conditions normales. Dans le cas du **modèle multiplicatif**, l'effet du stress est modélisé par un facteur d'accélération $\lambda > 1$ appliqué directement à la fonction de risque :

$$h_{\text{acc}}(x) = \lambda \cdot h(x)$$

Cette hypothèse implique que le stress augmente la probabilité instantanée de défaillance à chaque instant t , sans changer la forme fonctionnelle de la loi de durée de vie.

Puisque la fonction de densité est donnée par $f(x) = h(x) \cdot S(x)$ et la fonction de survie par $S(t) = \exp\left(-\int_0^x h(u) du\right)$, le passage au régime accéléré modifie la fonction de survie comme suit :

$$S_{\text{acc}}(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda h(u) du\right) = [S(x)]^\lambda$$

En remplaçant dans l'expression de la densité, on obtient la densité sous stress :

$$f_{\text{acc}}(x) = h_{\text{acc}}(x) \cdot S_{\text{acc}}(x) = \lambda h(x) \cdot [S(x)]^\lambda = \lambda f(x) \cdot [S(x)]^{\lambda-1}$$

Cette relation montre que l'effet du stress ne se limite pas à un simple facteur multiplicatif sur la densité initiale, mais implique aussi une pondération par la fonction de survie, ce qui modifie la dynamique de défaillance sous stress.

Ce modèle est particulièrement adapté lorsque le mécanisme de défaillance ne change pas entre les régimes, et permet une extrapolation fiable de la durée de vie en conditions normales à partir d'observations obtenues sous stress.

2.3.2 ALT à contrainte progressive (PSALT)

Dans PSALT, la contrainte appliquée à un produit test augmente continuellement au fil du temps.

2.3.3 Step-Stress ALT (SSALT)

Le test de stress par étapes est un type particulier de test de vie accéléré dans lequel la contrainte appliquée à chaque unité est augmentée par paliers au fil du temps. Dans ce cas, il pourrait y avoir plus d'un point de changement de contrainte. Par exemple,

dans le modèle SSALT en 3 étapes, un échantillon aléatoire de n unités est initialement placé sur un niveau de stress faible x_1 et exécuté jusqu'à l'heure prédéfinie T_1 . Après l'heure T_1 , le stress est modifié à x_2 pour les unités restantes non défectueuses. Le test se poursuit jusqu'au temps T_2 , où la contrainte est modifiée à x_3 , et se poursuit jusqu'à ce que toutes les unités échouent ou soient censurées. Les temps de défaillance ordonnés observés à partir de ces tests sont ensuite utilisés pour estimer les paramètres de la distribution des temps de défaillance dans des conditions de fonctionnement normales. La figure 2.1 montre différentes formes de charges de contrainte.

Le principal avantage de SSALT est la réduction de la durée globale du test par rapport aux autres méthodes. SSALT entraîne des défaillances plus rapides en raison des niveaux de stress croissants.

Dans l'analyse des données ALT, nous devons déterminer la fonction de densité de probabilité (p.d.f.) d'une unité de test dans les conditions de conception à partir des données ALT au lieu des données de test de durée de vie traditionnelles.

obtenu dans des conditions normales Pour ce faire, nous devons avoir une distribution de vie appropriée et une relation vie contrainte

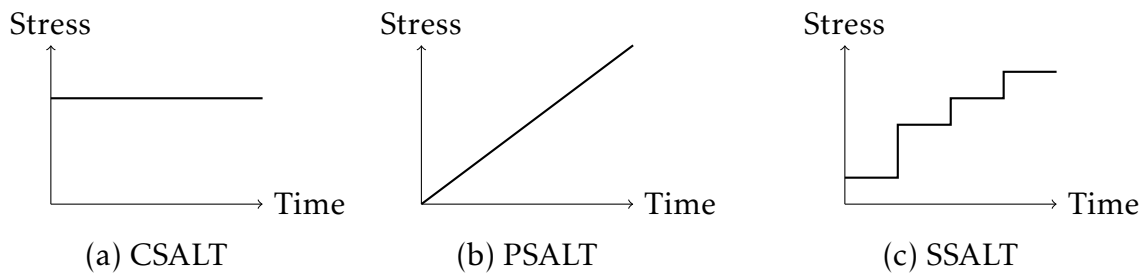


FIGURE 2.1 – Différentes formes de changement de contrainte

2.4 Importance des tests ALT

- Déterminer la durée de vie des matériaux permet d'estimer la durée pendant laquelle un matériau peut fonctionner de manière fiable avant de se détériorer ou de tomber en panne.
- Amélioration de la qualité des produits : utilisée pour identifier les faiblesses des matériaux et les améliorer pour augmenter leur durabilité et leur fiabilité.
- Accélérez le processus de R&D : aide à évaluer rapidement les nouveaux matériaux et à identifier les meilleurs pour différentes applications.
- Assurance de sécurité des produits : utilisée pour garantir que les matériaux utilisés dans les produits sont sûrs et fiables à utiliser.

2.5 Types de matériaux soumis aux tests ALT :

Les tests ALT sont largement utilisés pour une variété de substances, notamment :
Métaux : étudier l'effet du stress mécanique, de la température, de l'humidité et des produits chimiques sur les métaux.

Plastiques : pour évaluer l'effet de la charge mécanique, de la température et des intempéries sur les plastiques.

Isolateurs et matériaux électriques : Étudier l'effet de divers facteurs sur les matériaux isolants utilisés dans les industries électriques.

Céramique : Évaluer l'effet des contraintes mécaniques, de l'humidité et de la température sur les céramiques.

Caoutchouc et matériaux élastiques : Évaluer l'effet de la charge mécanique, de la température et des intempéries sur le caoutchouc et les matériaux élastiques.

Lubrifiants : Pour évaluer l'effet de la vitesse, de la température et des contaminants sur les lubrifiants.

2.6 ALT Facteurs affectant les tests

Type de matériau : Les matériaux varient dans leur réponse aux conditions difficiles, les conditions appropriées doivent donc être choisies pour chaque matériau.

Conditions de test : inclure la température, l'humidité, la pression, la contrainte mécanique, etc. Ces conditions doivent être soigneusement sélectionnées pour atteindre les objectifs du test.

Durée de l'essai : La durée de l'essai doit être suffisante pour que le matériau subisse une décomposition et une dégradation.

2.7 Modèles d'accélération ou relations stress-vie

L'interprétation des données ALT nécessite l'utilisation de modèles d'accélération. Les modèles d'accélération qui décrivent la relation entre la durée de vie et les conditions de stress fournissent un moyen efficace pour l'ALT. Le tableau 2.1 présente la liste de quelques relations stress-vie bien connues [21].

Dans le tableau 2.1, L représente une mesure de vie quantifiable; T , V , X_i sont les variables accélérées; et A , B , k , p , β_i représentent les paramètres inconnus.

La relation stress-vie d'Arrhenius est largement utilisée dans l'ALT pour décrire les effets de la température sur le taux de réaction chimique. Elle a été introduite par le chimiste suédois Svandte [22]. La relation est définie comme

$$L(T) = A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \quad (2.1)$$

TABLE 2.1 – Relations contrainte-durée de vie couramment utilisées

Nom de la relation	Environnement utilisé	Forme mathématique
Relation de la loi d'Arrhenius	Utilisée lorsque la variable d'accélération est thermique (c'est-à-dire la température)	$L(T) = A \exp(-\frac{E}{kT})$
Relation d'Eyring	Le plus souvent utilisée lorsque la variable d'accélération (ou contrainte) est thermique, mais elle est également utilisée pour des variables de contrainte autres que thermiques, telles que l'humidité [23] [24]	$L(T) = \frac{A}{T} \exp(\frac{B}{kT})$
Relation de la loi de puissance inverse	Principalement utilisée lorsque la variable d'accélération est non thermique, telle que la tension	$L(T) = \frac{A}{V^p}$
Relation log-linéaire	Couramment utilisée lorsqu'un test implique plusieurs variables de contrainte	$\log(L_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i,$ $i = 1, 2, \dots, m$

2.8 Relations Contrainte-Durée de Vie

Dans l'étude de la fiabilité, des relations mathématiques sont utilisées pour modéliser l'effet de la contrainte sur la durée de vie des composants. Parmi ces relations, on distingue la relation log-quadratique et la relation log-linéaire :

— **Relation log-quadratique :**

$$\log(L_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2$$

— **Relation log-linéaire :**

$$\log(L_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

où L_i représente la durée de vie, x_i la variable de contrainte, et $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ sont des constantes déterminées par les données expérimentales.

2.9 Modèle d'Exposition Cumulative (Cumulative Exposure Model)

Ce modèle est utilisé pour analyser les données issues des tests de contrainte par paliers. Il suppose que la durée de vie restante d'un composant dépend uniquement de la quantité de dommage cumulé actuel et du niveau de contrainte actuel, indépendamment de la manière dont le dommage s'est accumulé.

Le modèle est utilisé pour relier la distribution de la durée de vie sous contrainte par paliers à la distribution de la durée de vie sous contrainte constante.

Le changement de niveau de contrainte n'affecte pas directement la durée de vie, mais seulement en modifiant le niveau de dommage cumulé.

La Figure 2.2(i) décrit le modèle CE de base, avec un SSALT à 3 étapes (Figure 2.2(ii)), et trois CDF pour les contraintes constantes x_1, x_2, x_3 (Figure 2.2(iii)). Dans la Figure , les flèches montrent que les unités suivent d'abord la CDF pour x_1 jusqu'au premier temps de maintien τ_1 . Lorsque la contrainte passe de x_1 à x_2 , les unités restantes non défectueuses suivent la CDF pour x_2 .

en commençant par la fraction accumulée ayant échoué. De même, lorsque la contrainte passe de x_2 à x_3 , les unités survivantes suivent la CDF pour x_3 , en commençant par la fraction accumulée ayant échoué. La figure 2.2(iii) montre la CDF du SSALT, qui est constituée des segments des CDF pour le CSALT

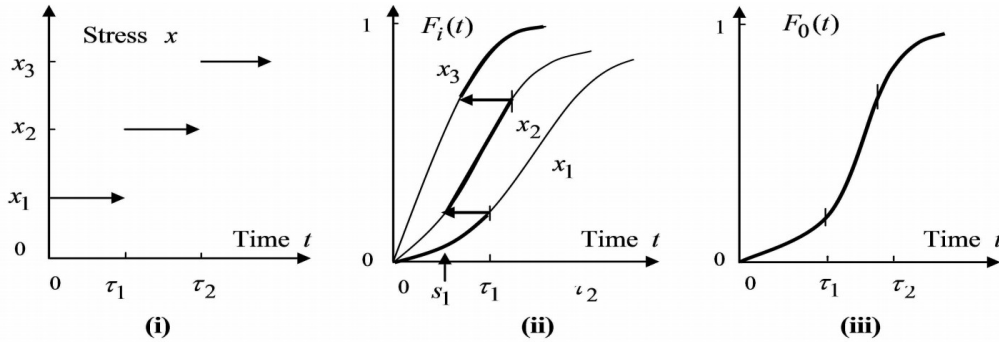


FIGURE 2.2 – Modèle d'exposition cumulé pour SSALT en 3 étapes

Formulation mathématique du modèle d'exposition cumulative pour SSALT à m étapes peut être exprimé comme suit :

$$F_0(t) = \begin{cases} F_1(t), & 0 \leq t < \tau_1 \\ F_2(t - \tau_1 + s_2), & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \vdots & \vdots \\ F_n(t - \tau_{n-1} + s_{m-1}), & \tau_{m-1} \leq t < \infty \end{cases} \quad (2.2)$$

où $s_0 = \tau_0 = 0$; et s_i est la solution de $F_{i+1}(s_i) = F_i(\tau_i - \tau_{i-1} + s_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots, m-1$.

Le modèle CE dans le cas de la distribution de Weibull devient assez compliqué. Pour cette raison, [25] ont proposé un modèle alternatif au modèle CE de Weibull, connu sous le nom de modèle K-H.

2.10 Modèle Khamis-Higgins (K-H)

Le modèle K-H est basé sur la transformation temporelle du modèle CE exponentiel. Il présente certains avantages analytiques par rapport au modèle CE en termes de flexibilité de modélisation et la simplicité computationnelle. De plus, il possède une propriété réalistiquement attrayante en termes de fonction de risque. Plus tard, [26] ont montré que le modèle K-H est un cas particulier du modèle de taux d'échec altéré (TFRM) proposé par [27]. Pour un paramètre d'échelle θ_i au niveau de stress x_i , $i = 1, 2, \dots, m$, la fonction de risque $h(\theta_i)$, lorsque le paramètre de forme reste constant, est donnée par :

$$h_t(t) = \begin{cases} h(t|\theta_1), & 0 \leq t < \tau_1 \\ \alpha_1 h(t|\theta_2), & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{m-1} h(t|\theta_m), & \tau_{m-1} \leq t < \infty \end{cases} \quad (2.3)$$

2.11 Modèle général des essais de vie accélérés à contrainte constante (CSALT)

Dans les essais de vie accélérés à contrainte constante (*Constant Stress Accelerated Life Tests* - CSALT), les unités testées sont soumises à des niveaux de contrainte fixes, supérieurs à ceux rencontrés en conditions normales d'utilisation, dans le but d'accélérer les défaillances et de réduire la durée des tests. On suppose que le temps de vie d'une unité T suit une loi de probabilité donnée (par exemple la loi de Lomax, de Weibull ou exponentielle), et que le paramètre d'échelle (ou un autre paramètre de durée de vie) dépend du niveau de contrainte x via un modèle d'accélération approprié.

La relation générale entre le paramètre d'échelle $\eta(x)$ et la contrainte x peut être exprimée comme suit :

$$\eta(x) = h(x; \beta)$$

où :

- $\eta(x)$ est le paramètre d'échelle associé au niveau de contrainte x ,
- $h(\cdot)$ est la fonction d'accélération,
- $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots)$ est le vecteur des paramètres du modèle d'accélération.

Les modèles d'accélération les plus couramment utilisés sont :

- **Le modèle d'Arrhenius**, souvent utilisé lorsque la contrainte est une température (en kelvins) :

$$\eta(x) = \exp\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{x}\right)$$

- **Le modèle de puissance inverse (Inverse Power Law)** :

$$\eta(x) = \beta_0 \cdot x^{-\beta_1}$$

- **Le modèle log-linéaire** :

$$\log \eta(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

La fonction de densité de probabilité du temps de vie sous un niveau de contrainte donné x s'écrit alors :

$$f(t | x) = f(t; \eta(x))$$

L'estimation des paramètres du modèle de vie ainsi que ceux du modèle d'accélération se fait généralement à partir des données de défaillance collectées sous différents niveaux de contrainte constante.

CHAPITRE 3

INFÉRENCE STATISTIQUE SUR LA DISTRIBUTION DE LOMAX AVEC LES TESTS D'ACCÉLÉRATION ET DE CENSURE

Introduction

L'utilisation de la distribution à queue lourde est requise pour de nombreuses analyses de données de durée de vie. La distribution de Pareto est l'une des distributions à queue lourde qui modélise habituellement les données non négatives. Elle a été introduite par [28] comme modèle de distribution des revenus. Plusieurs formes différentes de la distribution de Pareto ont été étudiées par de nombreux auteurs, notamment [29], [30], [31] et [32]. L'une des hiérarchies populaires de la distribution de Pareto est la loi de Pareto de type II, également connue sous le nom de distribution de Lomax. La distribution de Lomax a été appliquée dans divers domaines tels que l'ingénierie, la fiabilité et les essais de durée de vie.

L'une des familles de distributions paramétriques les plus célèbres avec ces caractéristiques est la distribution de Lomax, une famille de distributions à deux paramètres dont la fonction de distribution cumulative (cdf) et la fonction de densité de probabilité (pdf) sont exprimées comme suit.

3.1 Distribution de Lomax

La distribution de Lomax est également connue sous le nom de distribution de Pareto-II. Elle a été introduite pour modéliser les données de défaillance des entreprises par [33]. Certaines de ses applications peuvent être observées dans les domaines de l'analyse des revenus [34], [35], de la modélisation de la fiabilité et des tests de durée de vie accélérés [36], [37], de l'ajustement des données de taille des entreprises [38], de la caractéristique de fonctionnement du récepteur par [39] et des propriétés

de distribution et des moments de relation de récurrence des valeurs enregistrées par [40]. Dans les situations où l'on suppose que la distribution de la population est à queue lourde, [41] a soutenu que la distribution de Lomax offre une alternative efficace par rapport à d'autres distributions de durée de vie telles que les distributions exponentielle, Weibull ou gamma. On peut se référer [42] pour plus de détails.

Une variable aléatoire x a une distribution de Lomax avec deux paramètres λ et θ , si elle a la fonction de distribution cumulative suivante :

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-\alpha}, \quad x > 0, \quad \theta > 0, \quad \alpha > 0. \quad (3.1)$$

où α et θ sont les paramètres de forme et d'échelle, respectivement. La fonction de densité de probabilité (p.d.f.) est

$$f(x) = \frac{\alpha}{\theta} \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)} \quad x > 0, \quad \theta > 0, \quad \alpha > 0 \quad (3.2)$$

La fonction de fiabilité est

$$R(x) = \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-\alpha} \quad x > 0. \quad (3.3)$$

La fonction de taux de risque est

$$h(x) = \frac{\alpha}{\theta} \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-1} \quad x > 0, \quad \theta > 0, \quad \alpha > 0 \quad (3.4)$$

Espérance (MTTF), si $\alpha > 1$:

$$\mathbb{E}[x] = \frac{\theta}{\alpha - 1} \quad (3.5)$$

Variance, si $\alpha > 2$:

$$\text{Var}(x) = \frac{\theta^2 \alpha}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)} \quad (3.6)$$

Quantile d'ordre $p \in (0, 1)$:

$$Q(p) = \theta \left((1 - p)^{-1/\alpha} - 1 \right) \quad (3.7)$$

Dans le contexte de la distribution de durée de vie, la distribution de Lomax appartient à la classe des distributions à taux de défaillance décroissant [43].

Après avoir choisi une distribution de vie appropriée, la deuxième étape implique la sélection d'un modèle d'accélération ou d'une relation stress-vie appropriée.

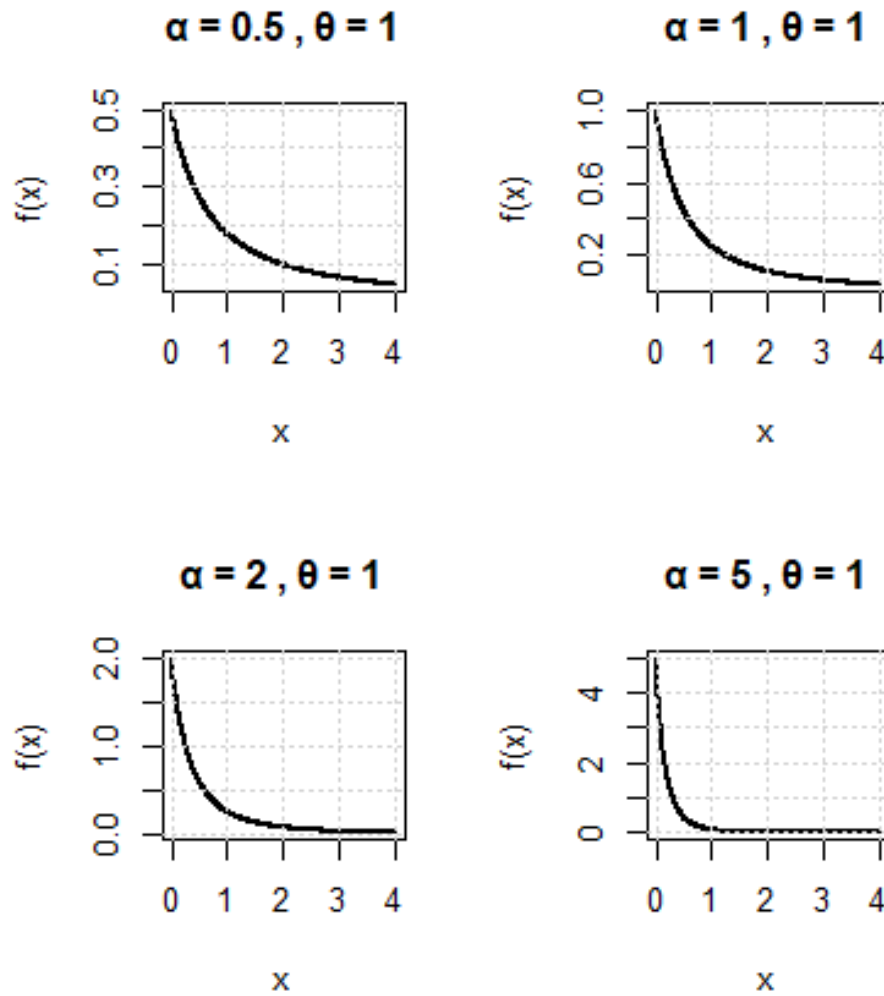


FIGURE 3.1 – Densité de la loi de Lomax pour différentes valeurs de paramètres

3.2 Inférence sur la distribution de Lomax à deux paramètres

La distribution de Lomax est une distribution continue utilisée pour modéliser des données à longue queue. Elle est caractérisée par deux paramètres positifs : un paramètre d'échelle θ et un paramètre de forme α . Sa fonction de densité est donnée par :

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha}{\theta} \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)}, \quad x > 0$$

3.2.1 Génération de la distribution

Une variable aléatoire X suivant une loi de Lomax peut être simulée en utilisant la méthode de l'inversion. Si U est une variable aléatoire uniforme sur $(0, 1)$, alors :

$$X = \theta \left((1 - U)^{-1/\alpha} - 1 \right)$$

Cette technique permet de générer des données synthétiques suivant la distribution de Lomax.

3.2.2 Fonction de densité jointe

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ un échantillon aléatoire indépendant et identiquement distribué selon la loi de Lomax (α, θ) .

La fonction de densité jointe est :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \alpha, \theta)$$

ce qui donne explicitement :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha, \theta) = \left(\frac{\alpha}{\theta} \right)^n \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{x_i}{\theta} \right)^{-(\alpha+1)}$$

3.2.3 Fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance est :

$$L(\alpha, \theta) = \left(\frac{\alpha}{\theta} \right)^n \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{x_i}{\theta} \right)^{-(\alpha+1)}$$

La log-vraisemblance est alors :

$$\ell(\alpha, \theta) = n \log \alpha - n \log \theta - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{x_i}{\theta} \right)$$

3.2.4 Estimation par Maximum de Vraisemblance

Pour estimer les paramètres α et θ par la méthode du maximum de vraisemblance, on considère :

— La dérivée partielle par rapport à α :

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{x_i}{\theta} \right) = 0$$

d'où :

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right)}$$

— La dérivée partielle par rapport à θ :

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + (1 + \alpha) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta^2 \left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right)} = 0$$

L'équation obtenue pour θ doit être résolue numériquement.

3.2.5 Matrice d'information de Fisher

Les éléments de la matrice d'information de Fisher définie par :

$$I_n(\theta)_{k,l} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ln f(t, \theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \right]$$

Après de longs calculs, nous obtenons les éléments :

$$\begin{aligned} I_{11} &= -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \alpha^2} \right) = -\mathbb{E} \left(-\frac{n}{\alpha^2} \right) \\ I_{22} &= -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} \right) = -\mathbb{E} \left(\frac{n}{\theta^2} - \frac{(1 + \alpha)}{\theta^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2x_i}{\theta + x_i} - \frac{x_i^2}{(\theta + x_i)^2} \right) \right) \\ I_{12} &= I_{21} = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \alpha \partial \theta} \right) = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta \partial \alpha} \right) = -\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta^2 \left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right)} \right) \end{aligned}$$

3.2.6 Présentation académique du package maxLik dans le cadre de l'estimation par maximum de vraisemblance

Le package maxLik dans le langage R est un outil avancé pour l'estimation par maximum de vraisemblance (Maximum Likelihood Estimation), développé par [44] et publié dans la revue *Computational Statistics*. Ce package repose sur :

1. **Deux couches principales :**
 - Couche de maximisation générale (maximization layer)
 - Couche d'estimation de la vraisemblance (likelihood maximization layer)
2. **Algorithmes d'optimisation pris en charge :**
 - BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)
 - Nelder-Mead
 - BHHH (Berndt-Hall-Hall-Hausman)

3. Fonctionnalités principales :

- Support des dérivées analytiques et numériques
- Calcul automatique de la matrice de variance-covariance
- Gestion des contraintes linéaires via SUMT
- Fonctions utilitaires telles que `summary()`, `coef()` et `vcov()`

4. Applications pratiques :

Le package a été utilisé pour estimer les paramètres d'une distribution normale comme suit :

```
library(maxLik)
logLikFun <- function(param) {
  mu <- param[1]
  sigma <- param[2]
  sum(dnorm(x, mean=mu, sd=sigma, log=TRUE))
}
mle <- maxLik(logLik=logLikFun, start=c(mu=0, sigma=1))
```

3.2.7 Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec des données complètes

Nous menons une étude par simulations numériques en utilisant le logiciel R. Pour comparer les estimateurs des paramètres inconnus du modèle afin de pouvoir choisir les plus précis. Pour cela, nous générons 100 échantillons de variables aléatoires de différentes tailles $n = 100, n = 500, n = 1000$ et $n = 2000$, nous calculons ensuite les différents estimateurs

TABLE 3.1 – Estimation des paramètres du modèle de Lomax en utilisant les données complet pour $\alpha = 2$ et $\theta = 2$

n	<i>Moyenne</i>		<i>MAE</i>		<i>RMSE</i>		<i>Biais</i>	
	α	θ	α	θ	α	θ	α	θ
100	1.9903	2.01788	0.0142	0.02218	0.0310	0.0493	-0.0096	0.0178
500	1.9953	2.0081	0.0052	0.0085	0.01529	0.0256	-0.0046	0.0081
1000	1.9967	2.0049	0.0035	0.0052	0.0088	0.0135	-0.0032	0.0049
2000	1.9965	2.0054	0.003	0.0056	0.0093	0.01404	-0.0034	0.0054

TABLE 3.2 – Estimation des paramètres du modèle de Lomax en utilisant les données complet pour $\alpha = 2.5$ et $\theta = 3$

n	Moyenne		MAE		RMSE		Biais	
	α	θ	α	θ	α	θ	α	θ
100	2.5679	3.0403	0.1507	0.2150	0.1946	0.2767	0.0679	0.0403
500	2.5165	2.9873	0.05606	0.0971	0.0781	0.1316	0.0165	-0.0126
1000	2.5026	2.9942	0.0349	0.0655	0.04263	0.08222	0.0026	-0.0057
2000	2.5024	2.9976	0.02320	0.0429	0.0291	0.0567	0.0024	-0.0023

Ces tableaux illustrent les résultats d'une simulation pour l'estimation des paramètres du modèle de Lomax en utilisant la fonction de vraisemblance avec différentes tailles d'échantillon. Les résultats indiquent une amélioration de la précision des estimations (diminution des valeurs de Moyenne des estimations, MAE, RMSE et Biais) avec l'augmentation de la taille de l'échantillon.

3.3 Inférence sur la distribution de Lomax avec censure de type II

La loi de Lomax, grâce à sa flexibilité dans la modélisation des événements extrêmes, est largement utilisée dans les domaines de l'analyse de survie, de la fiabilité, de l'assurance et de la finance. Dans les essais de durée de vie, le recours à la censure est fréquent lorsque certaines observations ne sont que partiellement disponibles. La censure de type II est un mécanisme de censure classique où l'expérience se termine après l'observation d'un nombre fixe d'échecs, et les unités restantes sont considérées comme censurées.

Ce type de censure est courant dans les situations pratiques où les ressources ou le temps d'observation sont limités. Si l'on considère un échantillon de taille n , l'expérience se poursuit jusqu'à l'observation des r premières défaillances, tandis que les $n - r$ unités restantes sont censurées à droite.

La distribution de Lomax, également connue comme une version modifiée de la loi de Pareto de type II, a été introduite par [29]. Elle joue un rôle important dans l'analyse des données de durée de vie dans les domaines médicaux, biologiques, techniques et économiques. De nombreuses études ont exploré l'estimation de ses paramètres sous différentes conditions de censure.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'estimation des paramètres de la distribution de Lomax sous censure de type II. Nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance, implémentée à l'aide du package `maxLik` dans le logiciel R. Cette approche permet d'estimer les deux paramètres inconnus du modèle, en se basant sur une expression explicite de la fonction de vraisemblance sous censure de type II.

Des simulations seront réalisées pour évaluer les performances de cette méthode en

termes de biais et d'erreur quadratique moyenne.

3.3.1 Estimation du maximum de vraisemblance pour la distribution Lomax sous censure de type II

Supposons que nous ayons un échantillon trié par ordre croissant $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, où les premières r valeurs sont observées (c'est-à-dire le nombre d'échecs), tandis que les $n - r$ valeurs restantes sont censurées selon la censure de type II.

La distribution Lomax avec deux paramètres est donnée par la fonction de densité de probabilité :

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha}{\theta} \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)}$$

et la fonction de répartition :

$$F(x; \alpha, \theta) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-\alpha}$$

La fonction de vraisemblance sous censure de type II est donc donnée par :

$$L(\alpha, \theta) = \left[\prod_{i=1}^r \frac{\alpha}{\theta} \left(1 + \frac{x_{(i)}}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)} \right] \cdot \left(\left(1 + \frac{x_{(r)}}{\theta}\right)^{-\alpha} \right)^{n-r}$$

En prenant le logarithme, nous obtenons la fonction du logarithme de la vraisemblance :

$$\ln L(\alpha, \theta) = r \ln \alpha - r \ln \theta - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^r \ln \left(1 + \frac{x_{(i)}}{\theta}\right) - \alpha(n - r) \ln \left(1 + \frac{x_{(r)}}{\theta}\right)$$

3.3.2 Gradients

— Par rapport à α :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{r}{\alpha} - \sum_{i=1}^r \ln \left(1 + \frac{x_{(i)}}{\theta}\right) - (n - r) \ln \left(1 + \frac{x_{(r)}}{\theta}\right)$$

— Par rapport à θ :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{r}{\theta} + (\alpha + 1) \sum_{i=1}^r \frac{x_{(i)}}{\theta^2 + x_{(i)}\theta} + \alpha(n - r) \cdot \frac{x_{(r)}}{\theta^2 + x_{(r)}\theta}$$

3.3.3 Matrice Hessienne

$$H(\alpha, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} &= -\frac{r}{\alpha^2} \\ -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \theta} &= -\sum_{i=1}^r \frac{x_{(i)}}{\theta^2 + x_{(i)}\theta} - (n-r) \cdot \frac{x_{(r)}}{\theta^2 + x_{(r)}\theta} \\ -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} &= \frac{r}{\theta^2} - (\alpha+1) \sum_{i=1}^r \frac{x_{(i)}(\theta + 2x_{(i)})}{(\theta^2 + x_{(i)}\theta)^2} - \alpha(n-r) \cdot \frac{x_{(r)}(\theta + 2x_{(r)})}{(\theta^2 + x_{(r)}\theta)^2} \end{aligned}$$

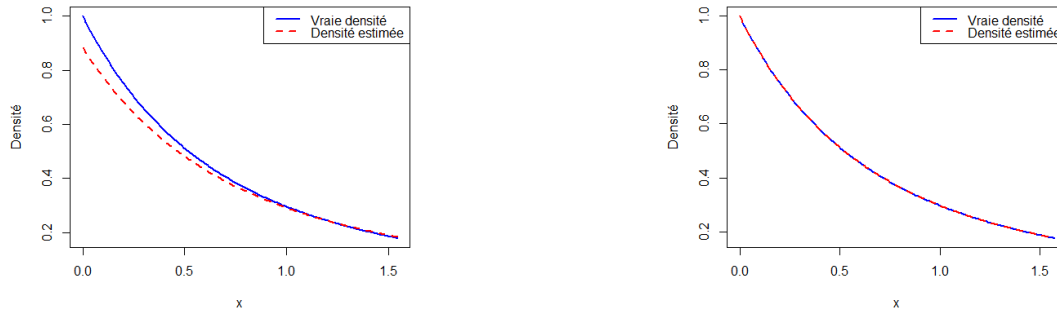
Nous effectuons une étude par simulation numérique utilisant le logiciel R, en tenant compte de la censure de type II avec un taux de censure de 30 %. L'objectif de cette étude est de comparer les performances des estimateurs des paramètres inconnus de la loi de Lomax sous différentes méthodes d'estimation, et ce afin de déterminer les estimateurs les plus précis. Pour cela, nous générons 100 échantillons de différentes tailles ($n = 100, 500, 1000, 2000$) suivant une loi de Lomax avec des paramètres $\alpha = 2$ et $\theta = 2$, puis nous appliquons une censure de type II en conservant uniquement les 70 % premières valeurs ordonnées. Après cela, nous estimons les paramètres en utilisant différentes méthodes d'estimation, et nous comparons les résultats obtenus en nous basant sur les indicateurs de performance habituels : moyenne, biais, MAE et RMSE.

TABLE 3.3 – Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec le censure type II pour $\alpha = 2$. et $\theta = 2$

n	Moyenne		MAE		RMSE		Biais	
	α	θ	α	θ	α	θ	α	θ
100	2.4250	2.5478	0.6888	0.9241	1.08007	1.4694	0.4250	0.5478
500	2.0537	2.0501	0.2154	0.3003	0.2737	0.3835	0.0537	0.0501
1000	2.0195	2.0231	0.1458	0.2164	0.1812	0.2724	0.0195	0.0231
2000	2.0106	2.0123	0.1017	0.1425	0.1207	0.1754	0.0106	0.0123

TABLE 3.4 – Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec le censure type II pour $\alpha = 2.5$ et $\theta = 3$

n	Moyenne		MAE		RMSE		Biais	
	α	θ	α	θ	α	θ	α	θ
100	2.42909	3.1042	0.07492	0.1091	0.1245	0.1828	-0.0709	0.1042
500	2.4408	3.0840	0.05911	0.0840	0.0852	0.1218	-0.0511	0.0840
1000	2.4580	3.0596	0.0419	0.0596	0.06780	0.09665	-0.0419	0.0596
2000	2.4621	3.0533	0.0378	0.0533	0.05631	0.0793	-0.0378	0.0533



(b) Taille d'échantillon $n=100$

(b) Taille d'échantillon $n=2000$

FIGURE 3.2 – Estimation du paramètre du modèle de Lomax avec censure type II

On observe une amélioration notable des performances des estimateurs (en termes de MAE, RMSE et biais) lorsque la taille de l'échantillon augmente, ce qui confirme la consistance des estimateurs utilisés pour le modèle de Lomax sous censure de type II.

3.4 Inférence pour la loi de Lomax sous censure progressive de type II

Dans cette section, nous considérons la situation où les données issues d'un échantillon suivent un schéma de censure progressive de type II. Ce type de censure est particulièrement adapté aux expériences de fiabilité où un certain nombre d'unités sont retirées de l'expérience à différents moments prédéterminés, en fonction des temps de défaillance observés.

Soit n le nombre total d'unités à l'essai, et r le nombre de défaillances observées avant la fin de l'expérience. Après chaque défaillance i , un nombre R_i d'unités encore en vie est retiré de l'expérience, avec :

$$\sum_{i=1}^r R_i = n - r$$

Soient $x_1, x_2, \dots, x_r$ les temps de défaillance observés, ordonnés, et supposés suivre une loi de Lomax de densité :

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha}{\theta} \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)}$$

et fonction de survie :

$$S(x; \alpha, \theta) = \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-\alpha}$$

La fonction de vraisemblance sous une censure progressive de type II s'écrit :

$$L(\alpha, \theta) = C \cdot \prod_{i=1}^r f(x_i; \alpha, \theta) \cdot S(x_i; \alpha, \theta)^{R_i}$$

où $C = \frac{n!}{(n-r)! \cdot \prod_{i=1}^r R_i!}$ est une constante combinatoire.

En remplaçant f et S , on obtient :

$$L(\alpha, \theta) = C \cdot \left(\frac{\alpha^r}{\theta^r}\right) \cdot \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)} \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-R_i \alpha}$$

3.4.1 Gradient de la log-vraisemblance

La fonction de log-vraisemblance s'écrit :

$$\ell(\alpha, \theta) = \log C + r \log \alpha - r \log \theta + \sum_{i=1}^r \left[-(\alpha + 1) \log \left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right) - R_i \alpha \log \left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right) \right]$$

Les dérivées partielles (le gradient) sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} &= \frac{r}{\alpha} + \sum_{i=1}^r (-R_i - 1) \log \left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right) \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta} &= \frac{-r}{\theta} + \sum_{i=1}^r (\alpha(1 + R_i) + 1) \cdot \frac{x_i}{\theta(\theta + x_i)} \end{aligned}$$

3.4.2 Matrice Hessienne

$$\begin{aligned} H(\alpha, \theta) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \\ - \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} &= -\frac{r}{\alpha^2} \\ - \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \theta} &= \sum_{i=1}^r (1 + R_i) \cdot \left(\frac{x_i}{\theta(\theta + x_i)} \right) \\ - \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} &= \frac{r}{\theta^2} - \sum_{i=1}^r (\alpha(1 + R_i) + 1) \cdot \left[\frac{x_i(2\theta + x_i)}{\theta^2(\theta + x_i)^2} \right] \end{aligned}$$

Les résultats présentés dans les tableaux suivants ont été obtenus à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance (MLE), en utilisant un schéma de censure progressive de type II spécifique pour chaque cas. Chaque estimation a été basée sur 1000 répétitions de simulations Monte Carlo, en adoptant des schémas de censure R différents

pour illustrer l'effet de la censure progressive sur l'estimation des paramètres du modèle de Lomax.

TABLE 3.5 – Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec censure progressive de type II pour $\alpha = 1, \theta = 1$

n	r	MLE		Biais		RMSE	
		α	θ	α	θ	α	θ
30	10	0.4803	0.7901	-0.5196	-0.2098	0.5487	0.2182
30	15	0.4262	0.7774	-0.5737	-0.2225	0.6002	0.235520
30	20	0.6228	0.8229	-0.3771	-0.1770	0.3946	0.1834
50	10	0.7377	0.7884	-0.2622	-0.2115	0.2749	0.2129
50	15	0.7360	0.8142	-0.2693	-0.1857	0.2787	0.1864
50	20	0.7213	0.8349	-0.2786	-0.1650	0.2861	0.1656

TABLE 3.6 – Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec censure progressive de type II pour $\alpha = 2, \theta = 2$

n	r	MLE		Biais		RMSE	
		α	θ	α	θ	α	θ
30	10	0.7503	0.8098	-0.2496	-0.1901	0.2586	0.1936
30	15	0.7364	0.8404	-0.2635	-0.1595	0.2704	0.1611
30	20	0.7063	0.8449	-0.2936	-0.1550	0.3009	0.1564
50	10	0.7514	0.7867	-0.2485	-0.2132	0.2584	0.2145
50	15	0.7504	0.8102	-0.2495	-0.1897	0.2561	0.1908
50	20	0.7490	0.8296	-0.2509	-0.1703	0.2560	0.1712

3.5 Inférence sur la distribution de Lomax sous un modèle d'accélération exponentiel de type CSALT

Dans le cadre des tests d'accélération, il est courant de supposer que le paramètre d'échelle d'un modèle de fiabilité dépend du facteur d'accélération z selon une relation exponentielle du type :

$$\theta(z) = \theta_0 \cdot \exp(-\beta z), \text{ où } \theta_0 > 0$$

représente le paramètre d'échelle sous conditions normales, et β mesure l'effet du facteur d'accélération sur la fiabilité du système.

En appliquant cette relation au modèle de Lomax, dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha}{\theta} \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)}$$

on obtient la densité ajustée au facteur z :

$$f(x; \alpha, \theta_0, \beta) = \frac{\alpha}{\theta_0 e^{-\beta z}} \left(1 + \frac{x}{\theta_0 e^{-\beta z}}\right)^{-(\alpha+1)}.$$

La log-vraisemblance associée à un échantillon $(x_1, \dots, x_n)$ observé sous un facteur constant z est :

$$\ell(\alpha, \theta_0, \beta) = n \log(\alpha) - n \log(\theta_0) + n \beta z - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{x_i}{\theta_0 e^{-\beta z}} \right).$$

Les dérivées premières (gradient) sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{x_i}{\theta_0 e^{-\beta z}} \right), \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta_0} &= -\frac{n}{\theta_0} + (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i}{\theta_0^2 e^{-\beta z} \left(1 + \frac{x_i}{\theta_0 e^{-\beta z}} \right)} \right], \\ \frac{\partial \ell}{\partial \beta} &= n z + (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \left[-\frac{x_i z}{\theta_0 e^{-\beta z} \left(1 + \frac{x_i}{\theta_0 e^{-\beta z}} \right)} \right]. \end{aligned}$$

3.5.1 Matrice hessienne

$$\text{où } y_i = \frac{x_i}{\theta_0 e^{-\beta z}},$$

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\alpha^2} & \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{(1+y_i)\theta_0} & \sum_{i=1}^n \frac{y_i z}{(1+y_i)} \\ \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{(1+y_i)\theta_0} & \frac{n}{\theta_0^2} - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i^2}{(1+y_i)^2 \theta_0^2} - \frac{2y_i}{(1+y_i)\theta_0^2} \right] & -(\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i^2 z}{(1+y_i)^2 \theta_0} - \frac{y_i z}{(1+y_i)\theta_0} \right] \\ \sum_{i=1}^n \frac{y_i z}{(1+y_i)} & -(\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i^2 z}{(1+y_i)^2 \theta_0} - \frac{y_i z}{(1+y_i)\theta_0} \right] & -(\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i^2 z^2}{(1+y_i)^2} + \frac{y_i z^2}{(1+y_i)} \right] \end{bmatrix}$$

3.5.2 Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec le test d'accélération CSALT

Les résultats du tableau 3.7 sont obtenus à partir de 100 répliquions pour chaque taille d'échantillon, en considérant un facteur d'accélération constant $z = 3$.

TABLE 3.7 – Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec CSALT pour $\alpha = 1.2$, $\theta_0 = 2.8$ et $\beta = 1$

n	<i>MLE</i>			<i>Biais</i>			<i>RMSE</i>		
	α	θ_0	β	α	θ_0	β	α	θ_0	β
50	1.4385	3.0237	1.0162	0.2386	0.2237	0.0162	0.6147	0.2277	0.1704
100	1.33	2.9973	1.009	0.13	0.1973	0.009	0.3092	0.1986	0.1109
200	1.2396	3.0531	0.9721	0.0391	0.1972	-0.0279	0.2113	0.19842	0.0889
500	1.2088	2.9891	0.9773	0.0088	0.1891	-0.0227	0.1288	0.1980	0.0611

3.6 Inférence sur la distribution de Lomax sous un modèle d'accélération exponentiel de type CSALT avec censure de type II

la densité de probabilité est donnée par :

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha}{\theta} \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)}, \quad x \geq 0.$$

Dans un test de vie accéléré à contrainte constante (CSALT), on suppose que l'échelle θ dépend du niveau de stress z selon le modèle exponentiel

$$\theta(z) = \theta_0 e^{-\beta z},$$

où θ_0 est la valeur de référence (stress nul) et $\beta > 0$ le coefficient de sensibilité au stress. Sous censure de type II (arrêt après r défaillances observées sur un total de n échantillons), la fonction de vraisemblance s'écrit

$$L(\alpha, \theta_0, \beta) = \prod_{i=1}^r f(x_i; \alpha, \theta(z)) \times [1 - F(x_{(r)}; \alpha, \theta(z))]^{n-r},$$

avec

$$F(x; \alpha, \theta) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-\alpha}.$$

On en déduit la log-vraisemblance

$$\ell(\alpha, \theta_0, \beta) = r \ln \alpha - r \ln \theta(z) - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^r \ln \left(1 + \frac{x_i}{\theta(z)}\right) - \alpha (n - r) \ln \left(1 + \frac{x_{(r)}}{\theta(z)}\right).$$

3.6.1 Dérivées premières

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{r}{\alpha} - \sum_{i=1}^r \ln \left(1 + \frac{x_i}{\theta(z)}\right) - (n - r) \ln \left(1 + \frac{x_{(r)}}{\theta(z)}\right),$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta_0} = \left(-\frac{r}{\theta(z)} + (\alpha + 1) \sum_{i=1}^r \frac{x_i/\theta(z)^2}{1 + x_i/\theta(z)} + \alpha(n-r) \frac{x_{(r)}/\theta(z)^2}{1 + x_{(r)}/\theta(z)} \right) \times e^{-\beta z}.$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = z \left[r + (\alpha + 1) \sum_{i=1}^r \frac{x_i}{\theta(z) + x_i} + \alpha(n-r) \cdot \frac{x_{(r)}}{\theta(z) + x_{(r)}} \right]$$

3.6.2 Matrice Hessienne

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} = -\frac{r}{\alpha^2},$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_0^2} = \left[\frac{r}{\theta(z)^2} + (\alpha + 1) \sum_{i=1}^r \left(-\frac{x_i(2\theta(z) + x_i)}{\theta(z)^2(\theta(z) + x_i)^2} \right) + \alpha(n-r) \left(-\frac{x_{(r)}(2\theta(z) + x_{(r)})}{\theta(z)^2(\theta(z) + x_{(r)})^2} \right) \right] \times e^{-2\beta z},$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} = z^2 \left[(\alpha + 1) \sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i^2}{(\theta(z) + x_i)^2} \right) + \alpha(n-r) \cdot \left(\frac{x_{(r)}^2}{(\theta(z) + x_{(r)})^2} \right) \right],$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \theta_0} = - \sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i}{\theta(z)^2 + x_i \theta(z)} \right) e^{-\beta z} - (n-r) \left(\frac{x_{(r)}}{\theta(z)^2 + x_{(r)} \theta(z)} \right) e^{-\beta z},$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \beta} = -z \left[\sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i}{\theta(z) + x_i} \right) + (n-r) \left(\frac{x_{(r)}}{\theta(z) + x_{(r)}} \right) \right],$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \theta_0} = \left[\frac{r}{\theta(z)^2} + (\alpha + 1) \sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i(2\theta(z) + x_i)}{\theta(z)^2(\theta(z) + x_i)^2} \right) + \alpha(n-r) \cdot \left(\frac{x_{(r)}(2\theta(z) + x_{(r)})}{\theta(z)^2(\theta(z) + x_{(r)})^2} \right) \right] \times z e^{-\beta z}.$$

3.6.3 Estimation des paramètres sous censure de type II avec le test d'accélération CSALT

Les résultats présentés dans le tableau 3.8 sont obtenus à partir de 100 répliquions pour chaque taille d'échantillon, en considérant un facteur d'accélération constant $z = 25$. L'estimation des paramètres du modèle de Lomax a été réalisée sous censure de type II, où l'on suppose que seulement les $r = 0,7n$ premières défaillances sont observées dans chaque échantillon. Cette configuration permet d'étudier la performance des estimateurs dans un contexte réaliste où l'information est partiellement censurée.

TABLE 3.8 – Estimation des paramètres du modèle de Lomax avec CSALT et censure type II pour $\alpha = 2$, $\theta_0 = 3$ et $\beta = 2$

n	<i>MLE</i>			<i>Biais</i>			<i>RMSE</i>		
	α	θ_0	β	α	θ_0	β	α	θ_0	β
50	2.3616	2.9813	1.9461	0.3619	-0.0187	-0.0539	0.0632	0.0187	0.0726
100	2.0313	2.9925	2.0672	0.0313	-0.0075	0.0672	0.0313	0.0075	0.0672
200	2.0284	2.9935	2.0673	0.0284	-0.0065	0.0673	0.0284	0.0063	0.0563
500	2.0113	2.9965	2.0553	0.0113	-0.0025	0.0553	0.0152	0.0041	0.0328

Remarque : Le tableau 3.8 montre que la performance des estimateurs s'améliore avec l'augmentation de la taille de l'échantillon n . On observe que le biais ainsi que l'erreur quadratique moyenne (RMSE) diminuent progressivement lorsque n augmente. Cela indique que les estimateurs des paramètres α , θ_0 et β deviennent plus précis et plus stables dans le contexte de censure de type II combinée avec le plan d'accélération CSALT.

3.7 Inférence des paramètres du modèle de Lomax sous un plan à accélération constante multiplicative (CSALT) avec censure progressive de type II

On suppose que les temps de défaillance suivent une loi de **Lomax** avec une fonction de densité donnée par :

$$f(t; \alpha, \theta) = \lambda \frac{\alpha}{\theta} \left(1 + \frac{t}{\theta}\right)^{-(\alpha+1)}, \quad t > 0$$

et la fonction de survie associée :

$$S(t; \alpha, \theta) = \left(1 + \frac{t}{\theta}\right)^{-\alpha\lambda}$$

Nous considérons deux régimes d'essai :

Régime normal : la fonction est appliquée telle quelle.

Régime accéléré : la fonction de risque est multipliée par un facteur d'accélération $\lambda > 1$.

3.7.1 Fonction de risque

La fonction de taux de risque est

$$h(t) = \frac{\alpha}{\theta} \left(1 + \frac{t}{\theta}\right)^{-1} \quad t > 0, \quad \theta > 0, \quad \alpha > 0 \quad (3.8)$$

Sous le régime normal :

$$h_1(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = h(t)$$

Sous le régime accéléré :

$$h_2(t) = \lambda h_1(t) = \lambda \frac{\alpha}{\theta} \left(1 + \frac{t}{\theta}\right)^{-1} \quad t > 0, \quad \theta > 0, \quad \alpha > 0$$

3.7.2 Matrice Hessienne

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha^2} = -\frac{r}{\alpha^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} = -\frac{r}{\lambda^2} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \lambda} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \alpha} = -\sum_{i=1}^r R_i \log\left(1 + \frac{x_i}{\theta}\right) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha \partial \theta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \alpha} = \sum_{i=1}^r \frac{x_i}{\theta^2 + \theta x_i} + \lambda \sum_{i=1}^r R_i \frac{x_i}{\theta^2 + \theta x_i} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda \partial \theta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \lambda} = \alpha \sum_{i=1}^r R_i \cdot \frac{x_i}{\theta^2 + \theta x_i} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} = \frac{r}{\theta^2} - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^r \frac{x_i(\theta x_i + 2\theta^2)}{(\theta^2 + \theta x_i)^2} - \alpha \lambda \sum_{i=1}^r R_i \frac{x_i(\theta x_i + 2\theta^2)}{(\theta^2 + \theta x_i)^2} \quad (3.14)$$

Afin d'évaluer la performance de l'estimation des paramètres du modèle Lomax sous censure progressive de type II, une étude de simulation a été réalisée en utilisant 1000 répétitions pour différentes valeurs de n et r , tout en fixant les valeurs réelles des paramètres à α , θ et λ .

Les données censurées ont été générées selon *différents schémas de censure progressive* dans le code de simulation, où les distributions des unités éliminées après chaque échec ont été modifiées par le vecteur de censure R , afin de tester l'impact de la structure de censure sur la précision de l'estimation.

Pour chaque cas, les estimateurs du maximum de vraisemblance (EMV) ont été calculés, ainsi que le biais (Biais) et la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) associés à chaque paramètre du modèle, α , θ et λ . Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant.

TABLE 3.9 – Estimations des paramètres pour différentes valeurs de n et r avec CSALT et censure progressive type II pour $\alpha = 1$, $\theta = 2$ et $\lambda = 1.5$

n	r	$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	Biais $_{\alpha}$	Biais $_{\theta}$	Biais $_{\lambda}$	RMSE $_{\alpha}$	RMSE $_{\theta}$	RMSE $_{\lambda}$
30	10	1.0323	2.0525	1.4725	0.0323	0.0525	-0.0315	0.2552	0.3211	0.4154
	15	1.0103	2.0154	1.4924	0.0103	0.0154	-0.0103	0.2432	0.2921	0.3587
	20	0.9922	1.9656	1.5335	-0.0088	-0.0344	0.0388	0.2312	0.2811	0.3443
50	10	1.0223	2.0464	1.4858	0.0223	0.0464	-0.0221	0.1854	0.2437	0.3132
	15	1.0214	2.0456	1.5553	0.0124	0.0216	0.0456	0.1532	0.2157	0.2828
	20	0.9950	1.9721	1.5157	-0.0050	-0.0279	0.0157	0.1425	0.2120	0.2213

TABLE 3.10 – Estimations des paramètres pour différentes valeurs de n et r avec $\alpha = 2$, $\theta = 3$ et $\lambda = 2$ sous censure progressive de type II

n	r	$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	Biais $_{\alpha}$	Biais $_{\theta}$	Biais $_{\lambda}$	RMSE $_{\alpha}$	RMSE $_{\theta}$	RMSE $_{\lambda}$
30	10	2.0152	3.0525	1.9725	0.0152	0.0525	-0.0275	0.0323	0.0525	0.4154
	15	2.0103	3.0154	1.9924	0.0103	0.0154	-0.0076	0.0103	0.0154	0.3587
	20	1.9962	2.9654	1.9511	-0.0038	-0.0346	-0.0489	0.0154	0.0346	0.3443
50	10	2.0223	3.0464	2.0458	0.0223	0.0464	0.0458	0.0252	0.0464	0.3187
	15	2.0121	3.0056	2.0129	0.0121	0.0056	0.0129	0.0121	0.0056	0.2213
	20	1.9950	2.9721	2.0001	-0.0050	-0.0279	0.0001	0.0092	0.0279	0.2213

3.8 Application des Données Réelles

Dans cette section, nous procédons à une application pratique des données réelles collectées, avec pour objectif crucial d'évaluer l'adéquation des différentes distributions statistiques. En analysant ces données concrètes, nous cherchons à démontrer que la loi de Lomax surpasse les autres distributions dans la modélisation de ce phénomène, confirmant ainsi son importance et son efficacité dans l'interprétation du comportement statistique de ces données.

3.8.1 Ensemble des données

cet ensemble de données représente un ensemble de données non censurées correspondant à la rémission (en mois) d'un échantillon aléatoire de 128 patients atteints de cancer de la vessie rapportés dans Lee et Wang [45]

(0.08, 2.09, 3.48, 4.87, 6.94, 8.66, 13.11, 23.63, 0.20, 2.23, 3.52, 4.98, 6.97, 9.02, 13.29, 0.40, 2.26, 3.57, 5.06, 7.09, 9.22, 13.80, 25.74, 0.50, 2.46, 3.64, 5.09, 7.26, 9.47, 14.24, 25.82, 0.51, 2.54, 3.70, 5.17, 7.28, 9.74, 14.76, 26.31, 0.81, 2.62, 3.82, 5.32, 7.32, 10.06, 14.77, 32.15, 2.64, 3.88, 5.32, 7.39, 10.34, 14.83, 34.26, 0.90, 2.69, 4.18, 5.34, 7.59, 10.66, 15.96, 36.66, 1.05, 2.69, 4.23, 5.41, 7.62, 10.75, 16.62, 43.01, 1.19, 2.75, 4.26, 5.41, 7.63, 17.12, 46.12, 1.26, 2.83, 4.33, 5.49, 7.66, 11.25, 17.14, 79.05, 1.35, 2.87, 5.62, 7.87, 11.64, 17.36, 1.40, 3.02, 4.34, 5.71, 7.93, 11.79, 18.10, 1.46, 4.40, 5.85,

8.26, 11.98, 19.13, 1.76, 3.25, 4.50, 6.25, 8.37, 12.02, 2.02, 3.31, 4.51, 6.54, 8.53, 12.03, 20.28, 2.02, 3.36, 6.76, 12.07, 21.73, 2.07, 3.36, 6.93, 8.65, 12.63, 22.69)

Les données (waitingtimes) sont disponibles dans le package (Fitdistrplus); nous allons donc étudier les paramètres descriptifs.

3.8.2 Description des données

Les statistiques suivantes ont été obtenues à partir du résumé summary(x) :

TABLE 3.11 – Résumé de la description statistique du jeu de données

Statistique	Valeur
Minimum	0.06481
1 ^{er} quartile	0.4564
Médiane	1.17210
Moyenne	2.5327
3 ^e quartile	2.18651
Maximum	20.2305

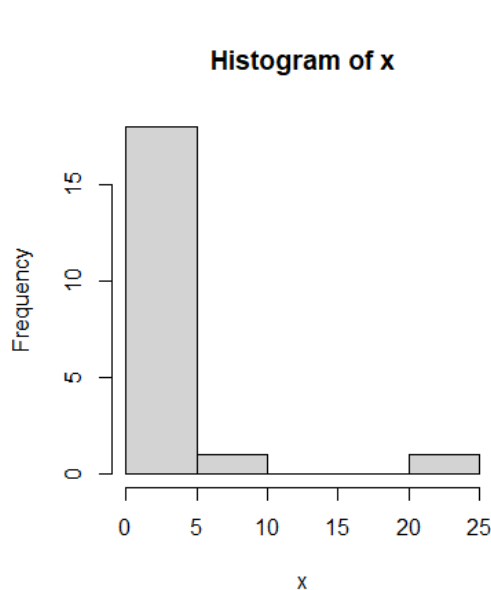


FIGURE 3.3 – Histogramme des paramètres descriptif des données des durées survie

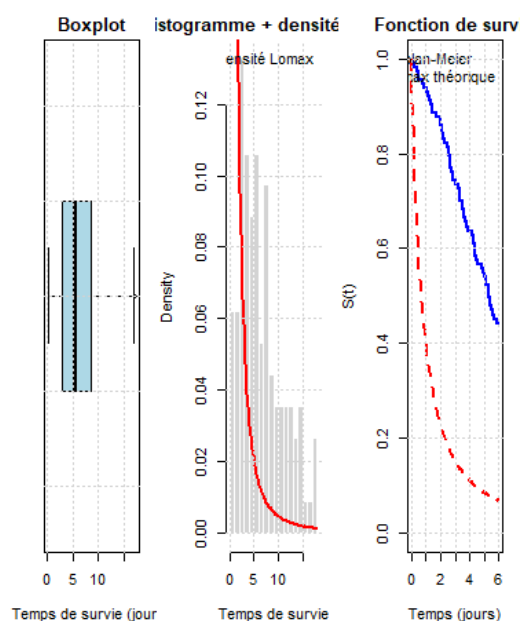


FIGURE 3.4 – Résumé graphique des durées de survie des cobayes infectés par des bacilles tuberculeux virulents

3.8.3 Ajustement des données par la loi de Lomax

Afin de comparer les trois modèles de distribution, nous considérons des critères comme, AIC (Akaike critère d'information), BIC (critère d'information bayésien) et KS (test de Kolmogorov-Smirnov), CV (cramer-von Mises) et AD (Anderson-Darling) pour

le jeu de données. La meilleure distribution correspond aux petits, AIC, BIC, KS, CV, et Valeurs AD :

$$AIC = 2K - 2l,$$

$$BIC = K * \log(n) - 2l \quad \text{et} \quad KS = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

$$V = \sqrt{\frac{x^2/n}{\min(I, J) - 1}} \quad \text{et} \quad A^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x)$$

où

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{X_i \leq x}$$

est la fonction de distribution empirique, $F(x)$ est la fonction de distribution cumulative, K est le nombre de paramètres dans le modèle statistique, n la taille de l'échantillon et l est la valeur maximisée de la fonction log-vraisemblance sous le modèle.

TABLE 3.12 – Comparaison des critères de validation de l'ajustement par des lois selon les critères AIC, BIC, KS, CvM et AD

Distribution	AIC	BIC	KS	CvM	AD
Exponentielle	79.1714	80.1672	0.21303	0.2728	1.5075
normal	119.8906	121.8821	0.3266	0.5878	3.2327
Weibull	77.3078	79.2992	0.1421	0.0577	0.4192
Lomax	74.8240	76.81	0.0914	0.0231	0.1819

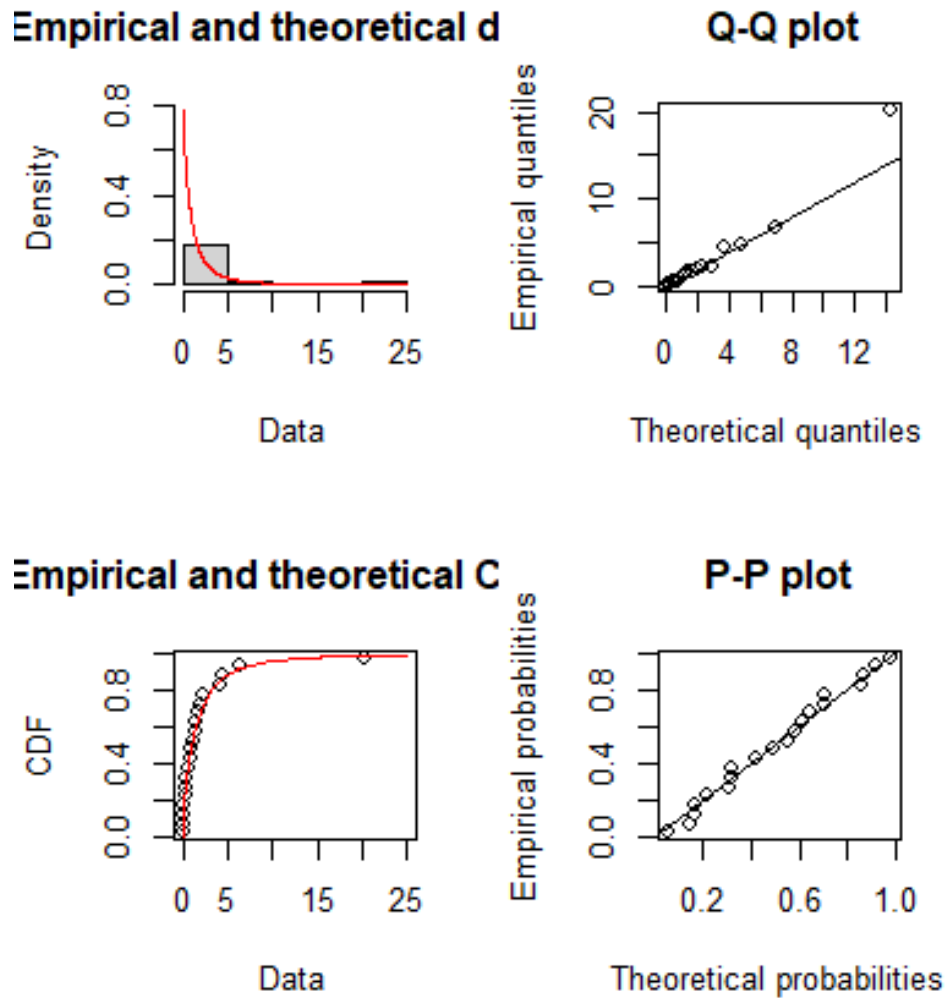


FIGURE 3.5 – Ajustement de la loi Lomax

3.8.4 Estimation des paramètres du modèle

À l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance (MLE) appliquée aux données complètes, nous avons obtenu les estimations suivantes des paramètres du modèle Lomax :

$$\hat{\alpha} = 1.912 \quad \text{et} \quad \hat{\theta} = 2.46$$

3.8.5 Estimation du Maximum de Vraisemblance (MLE) pour l'ensemble des données avec un censure progressive type II

Voici le tableau récapitulatif des estimations du Maximum de Vraisemblance (MLE) pour les paramètres α et θ du modèle de Lomax, calculées avec les données x , de taille $n = 128$ et un schéma de censure progressive de Type II standard (où tous les éléments

restants sont retirés au moment de la r -ième défaillance).

TABLE 3.13 – Estimations MLE avec Censure Progressive Type II pour l'ensemble des données réelles ($n = 128$)

r	$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	$n - r$
15	0.5741	1.3712	113
20	0.7410	1.5372	108
30	0.9022	1.8841	98

Ce tableau présente les valeurs estimées des paramètres α et θ de votre modèle pour chaque scénario de nombre de défaillances observées (r). Les valeurs de R_r indiquent le nombre d'unités restantes qui ont été retirées du test au moment de la r -ième défaillance.

3.8.6 Estimation du Maximum de Vraisemblance (MLE) avec censure progressive type II et un test d'accélération constante CSALT

Voici le tableau récapitulatif des estimations du Maximum de Vraisemblance (MLE) pour les paramètres α , θ , et λ ($\alpha=1$, $\theta=1$, $\lambda=2$), calculées avec vos données x , en considérant un nombre total d'éléments initialement testés $n = 128$ et un schéma de censure progressive de Type II standard (où tous les éléments restants sont retirés au moment de la r -ième défaillance).

TABLE 3.14 – Estimations MLE avec Censure Progressive Type II et un test d'accélération constante CSALT pour l'ensemble des données réelles ($n = 128$)

r	$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	$n - r$
15	0.6723	0.7221	1.4584	113
20	0.7812	0.9801	1.6992	108
30	0.9554	1.002	1.8434	98

Les tableaux de résultats démontrent la **supériorité de la loi de Lomax** pour modéliser les données de rémission du cancer de la vessie. Elle surpasse nettement les autres distributions (exponentielle, normale et Weibull), comme en témoignent clairement les valeurs plus faibles de l'AIC, du BIC, du KS, du CvM et de l'AD obtenues pour le modèle de Lomax.

Les estimations par la méthode du maximum de vraisemblance (MLE) indiquent que le modèle de Lomax à deux paramètres ($\hat{\alpha}$ et $\hat{\theta}$), ainsi que sa version étendue avec un paramètre d'accélération ($\hat{\lambda}$), s'ajustent très bien aux données, même sous des **schémas de censure progressive de Type II**. Il est également important de noter que les estimations des paramètres varient en fonction du nombre de défaillances observées (r), ce qui souligne l'impact de la quantité d'informations disponibles sur la précision des estimations.

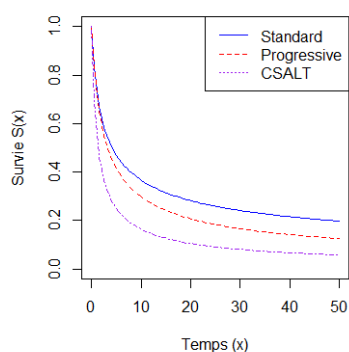


FIGURE 3.6 – Fonction de survie - Loi de Lomax pour $r=15$

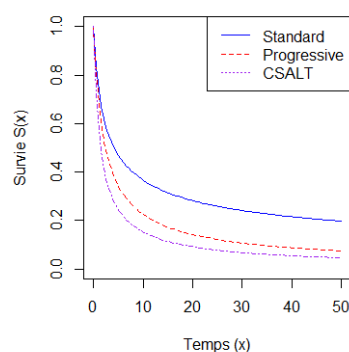


FIGURE 3.7 – Fonction de survie - Loi de Lomax pour $r=20$

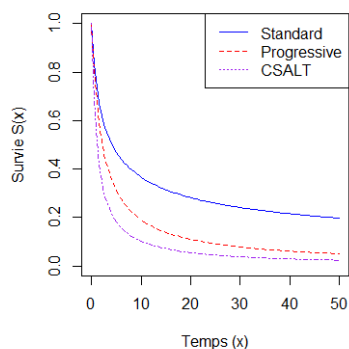


FIGURE 3.8 – Fonction de survie - Loi de Lomax pour $r=30$

Les trois figures comparent les fonctions de survie selon trois modèles :

- **Standard** : sans censure ni accélération (courbe bleue).
- **Progressive** : avec censure progressive de type II (courbe rouge).
- **CSALT** : avec censure progressive et test d'accélération constant (courbe violette).

Observations principales :

- Le modèle **CSALT** présente une décroissance plus rapide, ce qui indique un effet notable de l'accélération sur la durée de vie.
- Lorsque la valeur de r augmente (15 et 20, 30), les courbes deviennent plus stables et l'effet de la censure diminue.
- La différence entre les modèles est plus marquée pour des valeurs faibles de r , en raison de la quantité limitée d'information observée.

Conclusion : L'ajout d'un test d'accélération (CSALT) réduit significativement la survie estimée, notamment lorsque le nombre d'unités observées est faible. Cela met en évidence l'effet combiné de la censure progressive et de l'accélération sur la fiabilité du système.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Cette étude a permis d'approfondir la compréhension des concepts fondamentaux relatifs à la fiabilité des systèmes, avec un accent particulier sur l'application des tests d'accélération pour évaluer la durée de vie des produits et des composants. Grâce à l'utilisation de modèles statistiques, notamment le modèle de Lomax et les distributions probabilistes classiques, nous avons étudié l'impact des conditions opérationnelles sévères sur la fiabilité des systèmes.

L'une des contributions majeures de ce travail a été l'application des techniques de censure dans l'analyse de données incomplètes ou manquantes, un défi récurrent dans le domaine de la fiabilité. L'utilisation de la méthode de Newton-Raphson pour l'estimation des paramètres des modèles statistiques a également prouvé son efficacité, en permettant de surmonter les difficultés liées à la résolution d'équations numériques complexes.

De plus, l'intégration des tests d'accélération, notamment les tests de durée de vie accélérée (ALT), a montré son efficacité pour réduire le temps nécessaire à la collecte des données essentielles sur les produits et systèmes. Cela permet une meilleure prédiction des défaillances et améliore les stratégies de maintenance et de conception.

En conclusion, ce travail a mis en lumière l'importance de la fiabilité dans la conception et la gestion des systèmes, en soulignant les avantages de l'application des méthodes statistiques avancées et des tests d'accélération pour garantir des performances optimales et prolonger la durée de vie des produits. Les résultats obtenus ouvrent la voie à des recherches futures et à des améliorations dans ce domaine, appelant à poursuivre les efforts pour affiner les modèles de fiabilité et renforcer la robustesse des systèmes face aux défis de l'ingénierie moderne.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Waloddi Weibull. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of applied mechanics*, 1951.
- [2] D. V. Lindley. Fiducial distributions and bayes' theorem. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 20 :102–107, 1958.
- [3] M. E. Ghitany, B. Atieh, and S. Nadarajah. Lindley distribution and its application. *Mathematics and Computers in Simulation*, 78(4) :493–506, 2008.
- [4] M. E. Ghitany, F. Alqallaf, H. A. Husain, and D. K. Al-Mutairi. A two-parameter lindley distribution and its applications to survival data. *Applied Mathematics and Computation*, 216 :4263–4275, 2011.
- [5] S. Nadarajah and S. Kotz. The beta lindley distribution. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235 :2777–2782, 2011.
- [6] R. Shanker, K. K. Shukla, and S. Sharma. A two-parameter lindley distribution for modeling waiting and survival times data. *Applied Mathematics*, 4 :363–368, 2013.
- [7] R. Shanker, A. Mishra, and S. Sharma. A new lindley distribution with applications in reliability analysis. *International Journal of Statistics and Applications*, 7(6) :275–284, 2017.
- [8] S. Dey, S. Mazumdar, and S. Chakraborty. A new two-parameter lindley distribution : Properties and applications. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 48(9) :2304–2325, 2019.
- [9] V. K. Sharma, S. K. Singh, and C. Lee. On the inverse lindley distribution and its applications. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85 :2901–2915, 2015.

- [10] O. Arslan, A. I. Genc, and M. N. Cankaya. A new generalized lindley distribution and its application to lifetime data. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46 :501–519, 2017.
- [11] H. Zakerzadeh and A. Dolati. Generalized lindley distribution. *Journal of Applied Statistics*, 36(1) :17–31, 2009.
- [12] I. et al. Elbatal. A new three-parameter lindley distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 42(8) :1369–1388, 2013.
- [13] S.K. Ashour and M. Eltehiwy. Exponentiated three-parameter lindley distribution. *Applied Mathematical Modelling*, 39(19) :5936–5952, 2015.
- [14] B.O. Oluyede and W. Yang. The beta-generalized lindley distribution. *Statistics and Probability Letters*, 96 :110–120, 2015.
- [15] Siyi Chen and Wenhao Gui. Statistical analysis of a lifetime distribution with a bathtub-shaped failure rate function under adaptive progressive type-ii censoring. *Mathematics*, 8(5) :670, 2020.
- [16] N. Balakrishnan and E. Cramer. *The Art of Progressive Censoring : Applications to Reliability and Quality*. Springer, New York, 2014.
- [17] Erich L. Lehmann and George Casella. *Theory of Point Estimation*. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, 2nd edition, 1998.
- [18] N. Balakrishnan and U. Aggarwala. *Progressive Censoring : Theory, Methods, and Applications*. Birkhäuser, 2000.
- [19] Steven C Chapra and Raymond P Canale. Numerical methods for engineersmcgraw-hill. Inc., New York, 1988.
- [20] John Nelson. *Title of the Book*. Publisher Name, Publisher Location, 1980.
- [21] Wayne B. Nelson. *Accelerated Testing : Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [22] Svante Arrhenius. Über die reaktionsgeschwindigkeit bei der inversion von rohrzucker durch säuren. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 4 :226–248, 1887.
- [23] Henry Eyring, M.G. Evans, and Michael Polanyi. The theory of rate processes in chemical reactions. *Journal of Chemical Physics*, X(Y) :Z1–Z2, 1935.
- [24] Michael Polanyi. On the theory of adsorption and catalysis. *Journal of Physical Chemistry*, 39 :273–283, 1935.

- [25] Ishaq H. Khamis and James J. Higgins. A new model for step-stress testing. *IEEE Transactions on Reliability*, 47(2) :131–134, 1998.
- [26] Hai-Yan Xu and Yin-Cai Tang. A note on the khamis-higgins model. *IEEE Transactions on Reliability*, 52(1) :98–101, 2003.
- [27] Gouri K. Bhattacharyya and Zainal Soejoeti. A tampered failure rate model for step-stress accelerated life test. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 18(5) :1627–1643, 1989.
- [28] Vilfredo Pareto. *Cours d'économie politique*. F. Rouge, Lausanne, 1897.
- [29] Kenneth S Lomax. Business failures : Another example of the analysis of failure data. *Journal of the American statistical association*, 49(268) :847–852, 1954.
- [30] Harold T. Davis and Martin Feldstein. How inflation affects capital formation. *Brookings Papers on Economic Activity*, 1979(2) :593–651, 1979.
- [31] Scott D. Grimshaw. Computing maximum likelihood estimates for the generalized pareto distribution. *Technometrics*, 35(2) :185–191, 1993.
- [32] Saralees Nadarajah and Arjun K. Gupta. The exponentiated pareto distribution. *Statistics & Probability Letters*, 78(15) :2280–2286, 2008.
- [33] K. S. Lomax. Business failures : Another example of the analysis of failure data. *Journal of the American Statistical Association*, 49(268) :847–852, 1954.
- [34] C. M. Harris. The pareto distribution as a model for a variety of income distributions. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 365–377, 1968.
- [35] A. C. Atkinson and D. Harrison. The generalized pareto distribution with applications. *Journal of the Royal Statistical Society : Series C (Applied Statistics)*, 27(3) :251–260, 1978.
- [36] A. Hassan and A. S. Al-Ghamdi. A new method for estimating the parameters of the generalized pareto distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 79(2) :205–216, 2009.
- [37] N. Chandra and M. S. Khan. Estimation of parameters of generalized pareto distribution under progressive censoring. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 42(9) :2065–2080, 2013.
- [38] U. Corbellini et al. Statistical analysis of the generalized pareto distribution. *Metron*, 51(1-2) :23–39, 1993.

- [39] G. Campbell and M. V. Ratnaparkhi. Maximum likelihood estimation for the generalized pareto distribution. In *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, pages 528–533. American Statistical Association, 1993.
- [40] N. Balakrishnan and M. Ahsanullah. Relations for single and product moments of order statistics from the generalized pareto distribution. *Journal of Applied Statistical Science*, 1(1) :15–24, 1994.
- [41] M. C. Bryson. Heavy-tailed distributions : Properties and tests. *Technometrics*, 16(1) :61–68, 1974.
- [42] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. *Continuous univariate distributions, volume 1*, volume 1. John Wiley & Sons, 1994.
- [43] M. Chahkandi and M. Ganjali. A study on the lomax distribution and its applications. *Journal Name*, X(Y) :Z1–Z2, 2009.
- [44] Arne Henningsen and Ott Toomet. maxlik : A package for maximum likelihood estimation in r. *Computational Statistics*, 26(3) :443–458, 2010.
- [45] John P Klein, Hans C Van Houwelingen, Joseph George Ibrahim, and Thomas H Scheike. *Handbook of survival analysis*. CRC Press Boca Raton, FL :, 2014.