Collection
Formation des enseignants



Remi Ziglon

Vers les structures

NOUVELLE PÉDAGOGIE DE LA MATHÉMATIQUE

HERMANN
éditeurs des sciences et des arts 156, boulevard Saint-Germain

Table

Introduction 11

CHAPITRE 1. **Notions sur les ensembles I** 13

1. En guise d'introduction 13
2. Comment caractériser un ensemble 14
3. Appartenance 15
4. Parties d'un ensemble 17
5. Ensembles définis en compréhension 19
6. Thèmes de réflexion 20

CHAPITRE 2. **Notions sur les ensembles II** 23

1. Inclusion 23
2. Relation d'égalité 25
3. Retour sur les parties d'un ensemble 26
4. Organisation de $\mathfrak{P}(U)$ par la relation d'inclusion 27
5. Parties complémentaires dans un ensemble 28
6. *Négation* 30
7. Diagrammes 31
8. Thèmes de réflexion 33

CHAPITRE 3. **Les relations** 35

1. Notion de couple 35
2. Généralités sur les relations 37
3. Représentation des relations 42
4. Relation réciproque d'une relation 46
5. Relation dans un ensemble 47
6. Thèmes de réflexion 49

CHAPITRE 4. **Complémentaire - Négation - Intersection - Conjonction** . 51

1. Partie d'un ensemble associée à une formule 51
2. Négation d'une formule 53
3. Conjonction de formules 54
4. Intersection de deux parties d'un ensemble 56
5. Différence de deux parties d'un ensemble 59

CHAPITRE 5. **Réunion - Disjonction** 63

1. Réunion de deux parties d'un ensemble 63
2. Disjonction de formules 64
3. Équivalence logique 67
4. Indications sur la résolution d'exercices 71
5. Intersection et réunion de plusieurs parties d'un ensemble 73
6. Partition d'un ensemble 74
7. Thèmes de réflexion 76

CHAPITRE 6. **Alternative - Différence symétrique - Déduction - Inclusion** 79

1. Alternative de formules 79
2. Différence symétrique de deux parties d'un ensemble 81
3. Formules et parties associées 82
4. Déduction 85
5. Thèmes de réflexion 90
6. Vocabulaire et notations 91

CHAPITRE 7. **Fonction et application** 93

1. Retour sur les relations 93
2. Existentiel d'une fonction 96
3. Notations fonctionnelles 97
4. Relation réciproque d'une fonction 99
5. Application 100
6. Thèmes de réflexion 103
7. Équations 104

CHAPITRE 8. **Applications particulières** 109

1. Injection et surjection 110
2. Exercices 110
3. Autre définition de « surjection » 111
4. Autres définitions de « injection » 111
5. Bijection 112
6. Ensembles finis. Ensembles infinis 113
7. Nombre d'applications d'un ensemble fini vers un ensemble fini 116
8. Nombre d'injections d'un ensemble fini vers un ensemble fini 118
9. Nombre de bijections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments 119
10. Thèmes de réflexion 120

CHAPITRE 9. **Composition de relations** 121

1. Composition de relations 121
2. Relation réciproque de la composée de deux relations 126
3. Composition de fonctions 128
4. Composition d'applications 130
5. Composition d'injections 132
6. Composition de surjections 133
7. Composition de bijections 133
8. Thèmes de réflexion 134

CHAPITRE 10. **Propriétés des relations dans un ensemble** 135

1. Réflexivité 135
2. Symétrie 140
3. Antisymétrie 144
4. Transitivité 147
5. Thèmes de réflexion 151

CHAPITRE 11. **Équivalence et ordre** 153

1. Partition et relation d'équivalence 153
2. Définition 154
3. Classes d'équivalence 155
4. Ensemble quotient 157
5. Relation d'ordre 157
6. Autres problèmes sur l'ordre 160
7. Thèmes de réflexion 161

CHAPITRE 12. **Lois de composition I** 163

1. Qu'est-ce qu'une loi de composition? 163
2. Table de Pythagore d'une loi de composition dans un ensemble fini 166
3. Exercices 168
4. Commutativité 170
5. Associativité 171
6. Élément neutre 176
7. Une propriété de la composition des applications 178
8. Application identique dans un ensemble 181
9. Application itérée 181
10. Thèmes de réflexion 182

CHAPITRE 13. **Lois de composition II** 183

1. Élément absorbant 183
2. Élément régulier (ou simplifiable) 184
3. Élément symétrisable 185
4. Une condition suffisante pour qu'un élément soit régulier 188
5. Bijections réciproques et bijections symétriques 181
6. Distributivité d'une loi de composition sur une autre loi de composition 189
7. Terminologie 190
8. Thèmes de réflexion 191

CHAPITRE 14. **Structure de groupe** 193

1. Monoïde 193
2. Un monoïde particulier 196
3. Définition de « groupe » 197
4. Exercices 198
5. Ordre d'un groupe 199
6. Premières propriétés des groupes 199
7. Équation « $a * x = b$ » dans un groupe 200
8. La table de Pythagore d'un groupe est un carré latin 201
9. Sous-groupe $(G', *)$ d'un groupe $(G, *)$ 202
10. Thèmes de réflexion 204

CHAPITRE 15. **Isomorphismes de groupes** 207

1. Exemple 207
2. Définition 209
3. Transfert de structure 209
4. Groupes isomorphes 211
5. Exemples de groupes isomorphes 212
6. Thèmes de réflexion 215

ANNEXE 217

INDEX TERMINOLOGIQUE 219

INDEX DES NOTATIONS 221

BIBLIOGRAPHIE 225