ASSOCIATION D'ÉTUDE POUR L'EXPANSION DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Mathématiques supérieures pour l'homme moderne

2 - Algèbre linéaire



Formation continue des cadres et ingénieurs

Dunod

Table des matières

CHAPITRE 1. **Les espaces vectoriels** 1

1.1 Notion d'espace vectoriel 1
1.2 Exemples d'espaces vectoriels 2
1.3 Propriétés élémentaires des espaces vectoriels. Notations définitives 4
1.4 Applications linéaires et isomorphismes pour les espaces vectoriels 5
1.5 Exemples d'applications linéaires 6
1.6 Composition d'applications linéaires 8
1.7 Sous-espaces vectoriels 8
1.8 Espaces vectoriels quotients 10
1.9 Intersection de sous-espaces vectoriels. Systèmes de générateurs 11
1.10 Somme de sous-espaces vectoriels 13
1.11 Sous-espaces supplémentaires 14
1.12 Indépendance linéaire et bases 17
1.13 Théorèmes sur les bases 20
1.14 L'espace vectoriel $L(E, F)$ des applications linéaires 21

CHAPITRE 2. **Espaces vectoriels de dimension finie** 24

2.1 Notion de dimension 24
2.2 Isomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie 27
2.3 Sous-espaces des espaces vectoriels de dimension finie 27
2.4 Applications linéaires 29
2.5 Dimension de l'espace dual. Bases duales 30
2.6 Formes bilinéaires. Forme bilinéaire fondamentale 32
2.7 Espace bidual 32
2.8 Sous-espaces conjugués 33
2.9 Noyau et rang d'une application transposée 35
2.10 Equations linéaires vectorielles 35

CHAPITRE 3. **Les espaces affines** 39

3.1 Notion d'espace affine 39
3.2 Translations 40
3.3 Sous-espaces affines 41

3.4 Applications affines 42
3.5 Repères dans un espace affine 45
3.6 Barycentres 46

CHAPITRE 4. **Matrices et applications linéaires** 51

4.1 Représentation d'une application linéaire par une matrice.. 51
4.2 Exemples de matrices représentatives 52
4.3 Addition des matrices et multiplication par un scalaire 53
4.4 Produit de matrices rectangulaires 55
4.5 Exemples de produits de matrices 56
4.6 Transposition 58
4.7 Matrice représentative d'un vecteur par rapport à une base 59
4.8 *Matrice représentative d'une forme linéaire par rapport à une base* 60

CHAPITRE 5. **Endomorphismes et matrices carrées** 63

5.1 Algèbre des endomorphismes et des matrices carrées 63
5.2 Automorphismes et matrices inversibles 65
5.3 Matrices carrées particulières 68
5.4 Calcul d'une matrice inverse 68
5.5 Contravariance et covariance 70
5.6 Exemple : matrices associées aux angles d'Euler 72
5.7 Changements de base pour une application linéaire 73
5.8 Détermination du rang d'une matrice à partir de matrices carrées extraites 75

CHAPITRE 6. **Systèmes linéaires** 78

6.1 Première forme des conditions de possibilité 78
6.2 Autre forme des conditions de possibilité 79
6.3 Exemples de systèmes linéaires 80
6.4 Autre interprétation 81
6.5 Une méthode pratique de résolution 83

CHAPITRE 7. **Formes bilinéaires. Formes quadratiques** 87

7.1 Formes multilinéaires sur un espace vectoriel 87
7.2 Matrice d'une forme bilinéaire sur un espace vectoriel 88
7.3 Formes bilinéaires symétriques ou antisymétriques 91
7.4 Formes quadratiques 92
7.5 *Orthogonalité par rapport à une forme quadratique* 94
7.6 *Décomposition d'une forme quadratique en carrés* 95

CHAPITRE 8. **Déterminants** 97

8.1 Formes p-linéaires antisymétriques 97
8.2 Lemme sur les permutations 98
8.3 Formes n-linéaires antisymétriques sur un espace de dimension n 100
8.4 Notion de déterminant 102
8.5 Déterminant d'un produit d'endomorphismes ou de matrices 105
8.6 Théorème de transposition 107
8.7 Développement du déterminant d'une matrice 109
8.8 Exemples de développement de déterminants 112
8.9 Application aux systèmes linéaires. Formules de Cramer ... 113
8.10 Conditions de possibilité. Déterminants caractéristiques 114
8.11 Exemple de résolution d'un système linéaire 116

CHAPITRE 9. **Valeurs propres et vecteurs propres** 122

9.1 Le problème de la réduction des matrices carrées 122
9.2 Valeurs propres et vecteurs propres 123
9.3 Polynôme caractéristique 126
9.4 Exemples 127
9.5 Etude des sous-espaces propres. Condition de diagonalisation 129
9.6 Applications et exemples 131
9.7 Théorème d'Hamilton-Cayley 133
9.8 Complexification d'un espace vectoriel réel 134
9.9 Cas d'un endomorphisme d'un espace vectoriel réel 135

CHAPITRE 10. **Espaces euclidiens** 141

10.1 Signature d'une forme quadratique réelle 141
10.2 Espace vectoriel pseudo-euclidien 142
10.3 Espace vectoriel euclidien 144
10.4 Transformations orthogonales et matrices orthogonales ... 147
10.5 Exemples de transformations orthogonales 149
10.6 Etude des transformations orthogonales 151
10.7 Espace euclidien. Isométries 154
10.8 La géométrie ordinaire 156
10.9 Formes quadratiques réelles sur un espace vectoriel euclidien 156
10.10 Réduction d'une forme quadratique dans le groupe orthogonal 159

CHAPITRE 11. **Espaces hermitiens** 163

11.1 Formes semi-linéaires 163
11.2 Formes sesquilinéaires 164
11.3 Formes hermitiennes 167
11.4 Décomposition d'une forme hermitienne en carrés 168

11.5 Espace vectoriel pseudo-hermitien 169
11.6 Espace vectoriel hermitien 171
11.7 Transformations unitaires et matrices unitaires 172
11.8 Etude des transformations unitaires 174
11.9 Formes hermitiennes sur un espace vectoriel hermitien 175

CHAPITRE 12. **Espaces vectoriels normés** 177

12.1 Notion de norme 177
12.2 Normes usuelles dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ 179
12.3 Espaces euclidiens (dimension quelconque) 181
12.4 Espaces hermitiens (dimension quelconque) 187

INDEX 191