ASSOCIATION D'ÉTUDE POUR L'EXPANSION DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Mathématiques supérieures pour l'homme moderne

3 - Analyse élémentaire



Formation continue des cadres et ingénieurs

Dunod

Table des matières

Chapitre 1. NOTIONS DE CONTINUITÉ

1.1 De la notion intuitive à la définition mathématique 1
1.2 La notion générale de continuité (espaces métriques quelconques) . . . 3
1.3 La continuité dans les espaces métriques usuels 7
1.4 Opérations sur les fonctions continues 13
1.5 Applications continues d'un intervalle dans $\mathbb{R}$ 17
1.6 Bijections continues d'un intervalle sur un intervalle 21
1.7 Fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples 23
1.8 Fonctions réelles de plusieurs variables réelles 30
1.9 Fonctions vectorielles d'une variable réelle 32
1.10 Fonctions vectorielles de plusieurs variables réelles 33

Chapitre 2. NOTION DE LIMITE

2.1 Suites convergentes 37
2.2 Critère de Cauchy. Espaces métriques complets 41
2.3 Opérations sur les suites convergentes de réels 43
2.4 Suites divergentes 46
2.5 Suites monotones de réels 48
2.6 Limite en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle 50
2.7 Limite à l'infini d'une fonction réelle d'une variable réelle 54
2.8 Généralisation des définitions précédentes 56
2.9 Propriétés des fonctions admettant une limite finie 57
2.10 Quelques limites usuelles 61

Chapitre 3. DÉRIVÉS ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

3.1 Préliminaires 63
3.2 Dérivabilité en un point x_0 66
3.3 Différentiabilité en un point x_0 68
3.4 Fonction affine tangente. Tangente au graphe 71
3.5 Notation de la différentielle 72
3.6 Fonctions différentiables sur un intervalle 74
3.7 Composition des fonctions différentiables 75
3.8 Propriétés de linéarité 78
3.9 Produit de fonctions différentiables 79
3.10 Quotient de fonctions différentiables 82
3.11 Fonction réciproque d'une fonction différentiable 84
3.12 Dérivées des fonctions usuelles 86

Chapitre 4. LA NOTION GÉNÉRALE DE DIFFÉRENTIABILITÉ

4.1 Définition 90
4.2 Propriétés fondamentales 93
4.3 Applications différentiables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Généralités 95
4.4 Cas d'une fonction vectorielle d'une variable réelle ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$) 96
4.5 Cas d'une fonction réelle de plusieurs variables réelles ($f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$) 99
4.6 Cas général ($\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$) 105
4.7 Calcul des différentielles. Différentielle d'une somme et d'un produit 107
4.8 Matrice jacobienne de la composée de deux fonctions différentiables 111
4.9 Matrice jacobienne de la réciproque d'une fonction différentiable 115
4.10 Notions sur les fonctions implicites 117

Chapitre 5. THÉORÈME DE LA MOYENNE ET FORMULE DE TAYLOR

5.1 Théorème de la moyenne pour une fonction réelle d'une variable réelle 121
5.2 Application aux primitives 126
5.3 Application au sens de variation d'une fonction 128
5.4 Théorème de la moyenne pour une fonction vectorielle 129
5.5 Théorème de la moyenne pour une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ 131
5.6 Formule de Taylor pour une fonction réelle d'une variable réelle ... 135
5.7 Application aux polynômes 138
5.8 Application aux développements limités 139
5.9 Formule de Taylor pour une fonction vectorielle 142
5.10 Formule de Taylor à l'ordre 1 pour une fonction de plusieurs variables 143
Appendice. Formules particulières aux fonctions à valeurs réelles 144

Chapitre 6. FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES. ISOMORPHISMES CONTINUS

6.1 La fonction logarithme népérien 148
6.2 La fonction exponentielle, fonction réciproque de la fonction logarithme népérien 154
6.3 Le nombre e. Nouvelle notation de l'exponentielle 158
6.4 Caractérisation des applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 161
6.5 Les fonctions « logarithme de base b » 162
6.6 Les fonctions « exponentielle de base b » 164
6.7 Fonctions puissances 166
6.8 Fonctions hyperboliques directes et réciproques 170
6.9 La fonction exponentielle complexe 174

Chapitre 7. RECHERCHE DES PRIMITIVES

7.1 Généralités 177
7.2 Premiers exemples de primitives 179
7.3 Utilisation de la linéarité 184
7.4 Méthode dite du « changement de variable » 188
7.5 Méthode dite d'« intégration par parties » 197

Chapitre 8. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

8.1 Préliminaires 200
8.2 Equations différentielles à variables séparées 201
8.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre 206

Chapitre 9. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

9.1 Préliminaires 212
9.2 Etude des systèmes homogènes 215
9.3 Systèmes linéaires non homogènes 222
9.4 Systèmes linéaires réels 225

Chapitre 10. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE *n*, A COEFFICIENTS CONSTANTS

10.1 Théorèmes généraux (cas du second ordre) 230
10.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants 236
10.3 Résolution d'une équation linéaire non homogène du second ordre 239
10.4 Généralisation aux équations d'ordre *n* 246
10.5 Exemple de système linéaire d'ordre supérieur à 1 249

Chapitre 11. PROBLÈMES SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

11.1 Intégration d'une forme différentielle 251
11.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles 256

Chapitre 12. SÉRIES NUMÉRIQUES. GÉNÉRALITÉS

12.1 Position du problème 258
12.2 Définitions relatives aux séries 259
12.3 Le critère de Cauchy pour les séries 260
12.4 Addition et multiplication par un scalaire 261

Chapitre 13. SÉRIES A TERMES POSITIFS

13.1 Une condition nécessaire et suffisante de convergence 263
13.2 Exemples de séries à termes positifs 263
13.3 Comparaison des séries à termes positifs 267
13.4 Comparaison à la série géométrique 268
13.5 Comparaison à une série de Riemann 270

Chapitre 14. SÉRIES ABSOLUMENT CONVERGENTES. FAMILLES SOMMABLES

14.1 Convergence absolue et convergence 273
14.2 Critères de convergence absolue 274
14.3 Commutativité des séries absolument convergentes 276
14.4 Familles sommables 277
14.5 Associativité des familles sommables 279
14.6 Opérations sur les séries absolument convergentes 282

Chapitre 15. CONVERGENCE NON ABSOLUE

15.1 Séries alternées 285
15.2 Associativité restreinte, non-commutativité 286
15.3 Opérations sur les séries convergentes (absolument ou non) 288

Index 291