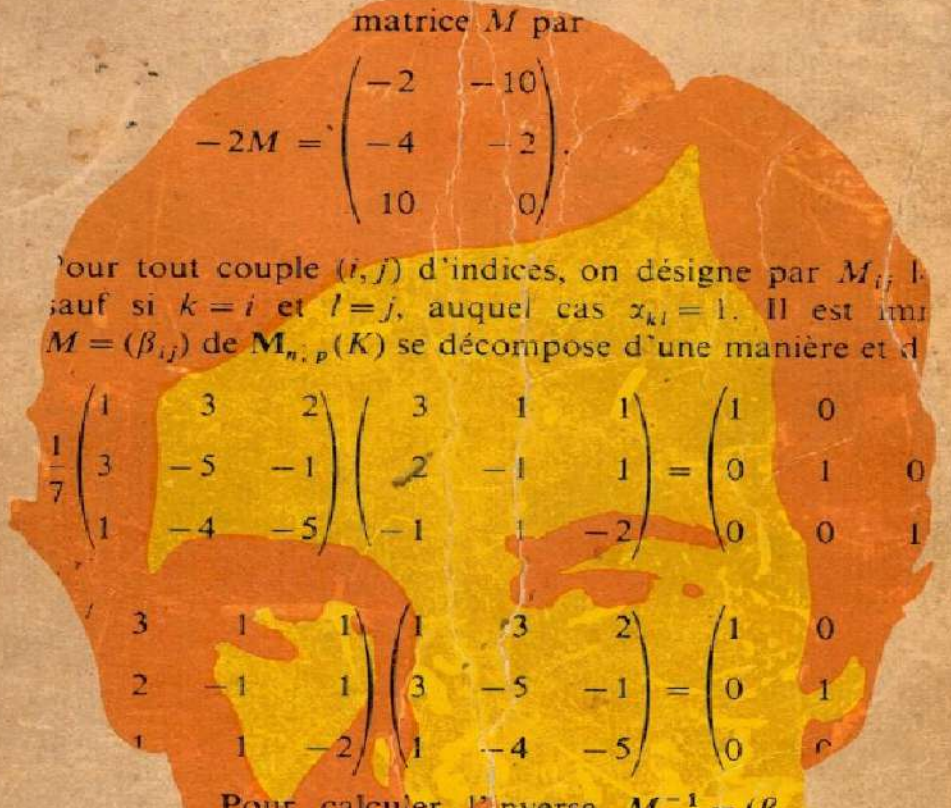
J. QUINET

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

1 - Algèbre



matrice M par

$$-2M = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -4 & -2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

our tout couple (i, j) d'indices, on désigne par M_{ij} l
auf si $k = i$ et $l = j$, auquel cas $\alpha_{kl} = 1$. Il est imm
$M = (\beta_{ij})$ de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ se décompose d'une manière et d

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Pour calculer l'inverse $M^{-1} = (\beta_{ij})$
3 et de déterminant Δ non nul,
nsposée ${}^tM = ({}^t\gamma_{ij})$;
i-ième ligne et la j-ième colonne;
erminant de la matrice d'ordre 2 ainsi obtenue;
ultiplie ce déterminant par 1 si $i+j$ est pair, par -1 dans le cas contrai
e quotient par Δ de la valeur trouvée est égal à β_{ij}.

Retrouver par ce proc

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

ons la transposée

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soient d'autre part U une application linéaire de E dans F et V u
linéaire de F dans G. Nous allons définir
$\mathbf{M}_{m,n}(K)$ par un élément M de $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ de t

$$M_{C,D}(V)\, M_{B,C}(U) = M_{B,D}(V \circ U).$$

Soient donc (α_{ij}) la matrice associée à U dans les bases B et C et
associée à V dans les bases C et D. Alors, pour tout élément j de [1

$$(V \circ U)(e_j) = V\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} V(f_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\right.$$

La matrice

6e édition

dunod

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. **Les ensembles**

1.1 Ensembles et relations 1
1.2. Égalité. Appartenance 2
1.3 Parties d'un ensemble 3
1.4 Opérations sur les ensembles 5
1.5 Ensemble produit 9
1.6 Relations binaires 10
1.7 Relations d'équivalence 11
1.8 Relations d'ordre 12
1.9 Parties majorées, minorées, bornées 13
1.10 Applications 14
1.11 Équations 16
1.12 Composition des applications 18
1.13 Images réciproques 20

Exercices 22

CHAPITRE 2. **Structures élémentaires**

2.1 Lois de composition internes 24
2.2 Morphismes 29
2.3 Groupes 31
2.4 Sous-groupes 34
2.5 Morphismes de groupes 35
2.6 Anneaux 37
2.7 Sous-anneaux 40
2.8 Morphismes d'anneaux 40
2.9 Idéaux d'un anneau commutatif 40
2.10 Binôme de Newton 41
2.11 Suites arithmétiques 42
2.12 Corps 43
2.13 Suites géométriques 44

Exercices 46

CHAPITRE 3. **Les nombres réels**

3.1 Nombres entiers naturels 48
3.2 Raisonnement par récurrence 49
3.3 Systèmes de numération 50
3.4 Nombres entiers rationnels 54
3.5 Structure des idéaux de **Z** 55
3.6 Nombres rationnels 56
3.7 Suites de nombres rationnels 56
3.8 Nombres réels 59

3.9 Racine *n*-ième d'un nombre réel positif 60
3.10 Récapitulation 61

Exercices 62

CHAPITRE 4. **Les nombres complexes**

4.1 Présentation des nombres complexes 63
4.2 Corps des nombres complexes 63
4.3 Forme cartésienne des nombres complexes 64
4.4 Nombres complexes conjugués 65
4.5 Module d'un nombre complexe 66
4.6 Suites de nombres complexes 68
4.7 Représentation géométrique des nombres complexes 68
4.8 Forme trigonométrique des nombres complexes 70
4.9 Le nombre complexe j, opérateur de rotation 73
4.10 Formule de Moivre 75
4.11 Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe 76
4.12 Calcul d'une racine carrée d'un nombre complexe 78
4.13 Application à la résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes 79
4.14 Exponentielle à exposant complexe 81
4.15 Représentation par une exponentielle d'un nombre complexe 81
4.16 Application trigonométrique des formules d'Euler 82
4.17 Représentation d'une grandeur sinusoïdale par un nombre complexe 84
4.18 Représentation exponentielle de la dérivée d'une fonction sinusoïdale 87
4.19 Applications à l'électricité 88
4.20 Montages en série ou en parallèle 91

Exercices 93

CHAPITRE 5. **Introduction à l'algèbre linéaire**

5.1 Lois de composition externes 95
5.2 Espaces vectoriels 95
5.3 Règles de calcul dans les espaces vectoriels 98
5.4 Sous-espaces vectoriels 99
5.5 Applications linéaires 101
5.6 Isomorphismes d'espaces vectoriels 102
5.7 Image et noyau d'une application linéaire 103
5.8 Espaces vectoriels d'applications linéaires 104
5.9 Sous-espaces vectoriels supplémentaires 105
5.10 Applications bilinéaires. Algèbres 107
5.11 Sous-algèbres 108
5.12 Morphismes d'algèbres 108

Exercices 109

CHAPITRE 6. **Espaces vectoriels de dimension finie**

6.1 Bases 111
6.2 Espaces vectoriels de dimension finie 112

6.3 Caractérisation des espaces vectoriels de dimension inférieure à n 113
6.4 Détermination d'une application linéaire 115
6.5 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie 115
6.6 Rang d'une application linéaire 117
6.7 Noyaux des formes linéaires 117
6.8 Récurrences linéaires 118

Exercices 123

CHAPITRE 7. **Les matrices**

7.1 Matrices et applications linéaires 125
7.2 Opérations sur les matrices 127
7.3 Anneau des matrices carrées 130
7.4 Transposée d'une matrice 131
7.5 Matrices de passage 132
7.6 Matrices diagonales 133

Exercices 135

CHAPITRE 8. **Systèmes d'équations linéaires**

8.1 Déterminants d'ordre 2 138
8.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 140
8.3 Déterminant d'un endomorphisme 141
8.4 Systèmes de deux équations linéaires à plusieurs inconnues 142
8.5 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues 142
8.6 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 143
8.7 Systèmes de deux équations linéaires homogènes à trois inconnues 145
8.8 Applications trilinéaires 145
8.9 Déterminants de trois vecteurs 146
8.10 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 147
8.11 Systèmes de trois équations linéaires à plusieurs inconnues 148
8.12 Systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues 148
8.13 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 150

Exercices 153

CHAPITRE 9. **Polynômes et fractions rationnelles**

9.1 Anneau des polynômes 156
9.2 Degré d'un polynôme 157
9.3 Valuation d'un polynôme 158
9.4 Divisibilité 159
9.5 Division euclidienne des polynômes 160
9.6 Structure des idéaux de l'anneau des polynômes 161
9.7 Division suivant les puissances croissantes 163
9.8 Fonctions polynomiales 165
9.9 Recherche pratique de la valeur d'un polynôme en un point 165
9.10 Racines rationnelles 167
9.11 Dérivées 168
9.12 Dérivées successives 169
9.13 Formule de Taylor 169
9.14 Fractions rationnelles 170

9.7 Fonctions rationnelles 172
9.8 Décomposition en éléments simples 173
Exercices 178

CHAPITRE 10. **Diagonalisation des matrices carrées**

10.1 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme 181
10.2 Endomorphismes et matrices diagonalisables 182
10.3 Indépendance linéaire des vecteurs propres 183
Exercices 187

CHAPITRE 11. **Applications du calcul matriciel aux quadripôles électriques**

11.1 Généralités 188
11.2 Détermination des paramètres 190
11.3 Relations entre les différents paramètres 190
11.4 Les différents modes d'association des quadripôles linéaires 192
11.5 Six exercices 203

CHAPITRE 12. **Géométrie euclidienne**

12.1 Produit scalaire 229
12.2 Inégalité de Schwarz 230
12.3 Longueur 230
12.4 Distance 233
12.5 Orthogonalité 233
12.6 Orthogonalité dans les plans euclidiens 234
12.7 Orthogonalité dans les espaces vectoriels euclidiens de dimension 3 235
12.8 Orientations d'un espace vectoriel 236
12.9 Coordonnées polaires, coordonnées cylindriques 237
12.10 Produit mixte 238
12.11 Produit vectoriel 238
Exercices 241

Solutions des exercices

Chapitre 1 242
Chapitre 2 246
Chapitre 3 250
Chapitre 4 253
Chapitre 5 255
Chapitre 6 258
Chapitre 7 261
Chapitre 8 266
Chapitre 9 268
Chapitre 10 272
Chapitre 12 274

Formules de trigonométrie 276

Index terminologique 279