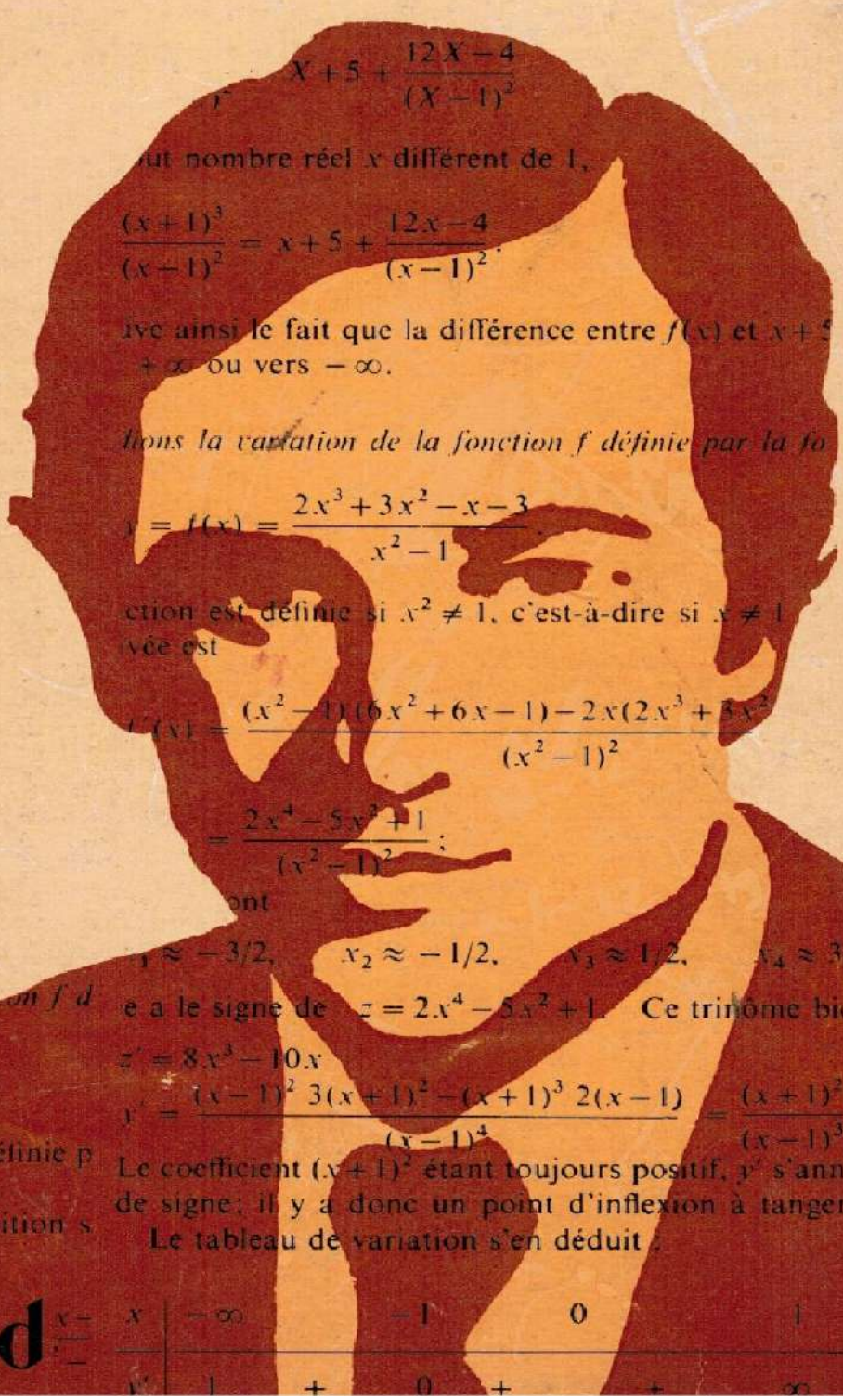
J. QUINET

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

2-Fonctions usuelles



$$X + 5 + \frac{12X - 4}{(X-1)^2}$$

ut nombre réel x différent de 1,

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = x + 5 + \frac{12x-4}{(x-1)^2},$$

ive ainsi le fait que la différence entre $f(x)$ et $x+5$
$+\infty$ ou vers $-\infty$.

ions la variation de la fonction f définie par la fo

$$y = f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1}.$$

ction est définie si $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire si $x \neq 1$
ivée est

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)(6x^2+6x-1) - 2x(2x^3+3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 5x^2 + 1}{(x^2-1)^2};$$

ont

$x_1 \approx -3/2, \quad x_2 \approx -1/2, \quad x_3 \approx 1/2, \quad x_4 \approx 3/2$)

e a le signe de $z = 2x^4 - 5x^2 + 1$. Ce trinôme bicarré, dont la dérivée

$z' = 8x^3 - 10x$

$$y' = \frac{(x-1)^2\, 3(x+1)^2 - (x+1)^3\, 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}[3$$

Le coefficient $(x+1)^2$ étant toujours positif, y' s'annule pour $x = -1$ sans cha
de signe; il y a donc un point d'inflexion à tangente horizontale.

Le tableau de variation s'en déduit :

x	$-\infty$		-1		0		1		5	
y'	$+$	$+$	0	$+$		$+$	∞	$-$	0	$+$

m f d

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x - 3}$$

nction n'est pas définie p
$x = 3$ et $x = -1$.
tervalles de définition s
ons la dérivée :

$x -$
$y' \frac{-}{-}$

6e édition

dunod

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. **Fonctions numériques**

1.1 Définition 1
1.2 Limite d'une fonction en un point 1
1.3 Fonction continue en un point 3
1.4 Continuité sur un intervalle 4
1.5 Croissance d'une fonction 6
1.6 Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone 9
1.7 Fonction puissance m-ième, m entier naturel non nul 10
1.8 Fonction racine m-ième, m entier naturel non nul 11
1.9 Fonctions circulaires réciproques 12
1.10 Fonctions à valeurs complexes 16
Exercices 17

CHAPITRE 2. **Les dérivées**

2.1 Introduction 19
2.2 Préliminaire au calcul des dérivées 19
2.3 Définition de la dérivée d'une fonction 20
2.4 Importance de la notion de dérivée 20
2.5 Procédé général de calcul des dérivées 21
2.6 Fonction dérivée d'une fonction 21
2.7 Dérivées des fonctions circulaires. 22
2.8 Propriétés des fonctions dérivables. 25
2.9 Exemples de calculs de dérivées 30
2.10 Interprétation géométrique de la dérivée 32
2.11 Équation de la tangente en un point 34
2.12 Extension de la notion de dérivée 36
2.13 Dérivation des fonctions à valeurs complexes 36
2.14 Dérivées successives 37
2.15 Propriétés des fonctions n fois dérivables 39
Exercices 41

CHAPITRE 3. **Les différentielles**

3.1 Fonctions différentiables 44
3.2 Différentielle d'une fonction 45
3.3 Différentielle d'une somme, d'un produit, d'un quotient 46
3.4 Différentielle d'une fonction composée 46
3.5 Notation différentielle de la dérivée 47
3.6 Exemples de calculs de différentielles 48
3.7 La notation différentielle en physique 49
3.8 Applications des différentielles au calcul numérique 50
3.9 Applications des différentielles à l'étude de la sensibilité 52
Exercices 54

CHAPITRE 4. **Applications des dérivées à l'étude de la variation des fonctions**

4.1 Maximums et minimums 57
4.2 Théorème de Rolle 58
4.3 Formule des accroissements finis 59
4.4 Application au sens de variation des fonctions 61
4.5 Exemples 63
4.6 Formule de Taylor-Lagrange 65
4.7 Applications de la formule de Taylor-Lagrange au calcul numérique 67
4.8 Application de la formule de Taylor-Lagrange à l'étude des points d'inflexion 69
Exercices 73

CHAPITRE 5. **Recherche des maximums et des minimums pour des applications pratiques**

5.1 Problème de la boîte 75
5.2 Problème de la casserole 76
5.3 Problème de la boîte de conserve 77
5.4 Problème de la réflexion de la lumière (Descartes) 78
5.5 Problème de la réfraction de la lumière (Descartes) 79
5.6 Problème du navire 81
5.7 Problème de la statue 81
5.8 Problème de l'autobus 83
5.9 Problème du transformateur électrique 84
5.10 Problème du projectile 85
5.11 Problème de la résonance électrique 87
5.12 Problème de l'induction magnétique 88
5.13 Problème de la puissance électrique maximale 89
5.14 Problème du meilleur groupement de générateurs électriques 90
5.15 Problème du pont de Wheatstone 91
5.16 Problème du rendement d'un transformateur électrique 93
5.17 Problème du condensateur shunté par une résistance 94
5.18 Problème de la ligne téléphonique 96

CHAPITRE 6. **Étude pratique de la variation des fonctions**

6.1 Marche à suivre 98
6.2 Trinôme du second degré 100
6.3 Fonction bicarrée 101
6.4 Fonction homographique 103
6.5 Quinze exemples 104
Exercices 125

CHAPITRE 7. **Les intégrales**

7.1 Primitives 126
7.2 Notion d'intégrale 127

7.3 Définition des fonctions intégrables 129
7.4 Valeur moyenne d'une fonction 131
7.5 Existence de fonctions intégrables 131
7.6 Changement d'intervalle d'intégration 132
7.7 Propriétés des fonctions intégrables 133
7.8 Intégrales et primitives 135
7.9 Exemples de calculs d'intégrales 138
7.10 Intégrales fonctions des deux bornes 138
7.11 Notation intégrale des primitives 139
7.12 Changement de variable 140
7.13 Utilisation de symétries et de périodicité 142
7.14 Intégration par parties 144
7.15 Primitives des fonctions à valeurs complexes 145
7.16 Intégrale des fonctions à valeurs complexes 145
7.17 Valeur moyenne d'un courant 146
7.18 Valeur efficace d'un courant. 147
7.19 Puissance fournie par un courant alternatif 148
7.20 Calcul du travail à fournir pour allonger un ressort 148
7.21 Calcul de l'énergie fournie par un condensateur électrique qui se décharge . 149
7.22 Calcul du travail à fournir pour écarter les plaques d'un condensateur . . . 149
7.23 Calcul du temps nécessaire pour qu'un réservoir d'eau se vide. 151
7.24 Calcul de la poussée hydraulique sur une surface verticale 152
7.25 Calcul de la diminution de la longueur d'une tige verticale 152
Exercices 154

CHAPITRE 8. **Fonctions logarithmes et exponentielles**

8.1 Préliminaires 155
8.2 Définition des fonctions logarithmes 155
8.3 Propriétés des fonctions logarithmes 156
8.4 Logarithme népérien 157
8.5 Logarithme de base *a* 159
8.6 Dérivée logarithmique 161
8.7 Différentielle logarithmique 162
8.8 Fonction exponentielle 163
8.9 Fonction exponentielle de base *a* 165
8.10 Exercices sur les exponentielles 167
8.11 Exercices de dérivation des fonctions logarithmes et exponentielles 168
8.12 Fonctions puissances. 170
8.13 Formes indéterminées exponentielles 171
8.14 Exemples. 173
8.15 Quelques remarques supplémentaires sur le nombre e 174
8.16 Exemples de fonctions faisant intervenir les fonctions puissances. 176
8.17 Définition des fonctions hyperboliques 180
8.18 Dérivées des fonctions hyperboliques. 181
8.19 Variation des fonctions hyperboliques 181
8.20 Trigonométrie hyperbolique 184
8.21 Fonctions hyperboliques réciproques 185
8.22 Interprétation géométrique des fonctions hyperboliques. 187
Exercices 188
Dérivées usuelles 190

Solutions des exercices

Chapitre 1 191
Chapitre 2 199
Chapitre 3 211
Chapitre 4 220
Chapitre 6 225
Chapitre 7 236
Chapitre 8 240

Index terminologique 250